Ю. Л. Ершов, Об элементарных теориях многообразий Поста, *Алгебра и логика. Семинар*, 1967, том 6, номер 5, 7–15

Алгебра и логика, 6, №5 (1967), 7-15.

# ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПОСТА

Ю.Л.ЕРШОВ

Общее понятие многообразия Поста было определено в работе А.И.Мальцева [3]. В настоящей работе исследуются элементарные теории (теории [2]) таких многообразий.

1. Напомним определения некоторых понятий, которые нам понадобятся позже.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \{0, 1, \ldots, n\}, P_1^{m_1}, \ldots, P_k^{m_k} \rangle$ - конечная модель сигнатуры $\sigma = \langle P_1^{m_1}, \ldots, P_k^{m_k} \rangle$, содержащей только предикатные символы. Пусть $\mathfrak{L}$ - булева алгебра. Следуя А.Фостеру *) [6], определим булеву степень $\mathfrak{M}^{\mathfrak{L}}$ модели $\mathfrak{M}$ следующим образом:

а) основное множество модели $\mathfrak{M}^{\mathfrak{L}}$ состоит из всех упорядоченных наборов $\langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ по $n+1$ элементу алгебры $\mathfrak{L}$, таких, что $X_0 \cup \ldots \cup X_n = e$ и $X_i \cap X_j = \Lambda$ для $i \neq j$, где $e$, $\Lambda$ — соответственно единица и ноль булевой алгебры $\mathfrak{L}$;

б) сигнатура модели $\mathfrak{M}^{\mathfrak{L}}$ совпадает с сигнатурой $\sigma$ модели $\mathfrak{M}$;

в) предикат $P_i^{m_i} \in \sigma$ истинен на элементах

$$\langle X_0^1, \ldots, X_n^1 \rangle, \ldots, \langle X_0^{m_i}, \ldots, X_n^{m_i} \rangle$$

тогда и только тогда, когда

$$\bigcup_{\substack{(j_1, \ldots, j_{m_i}) \\ \mathfrak{M} \models P_i(j_1, \ldots, j_{m_i})}} (X_{j_1}^1 \cap \ldots \cap X_{j_{m_i}}^{m_i}) = e \qquad (*)$$

*) А.Фостер определяет булеву степень только для алгебр; указанное здесь определение для случая алгебр (когда операция заменяется на предикат) совпадает с определением А.Фостера.

Следуюшая лемма дает другое описание булевой степени $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$.

ЛЕММА 1. Пусть $X_{\mathfrak{B}}$ – топологическое пространство всех максимальных идеалов булевой алгебры $\mathfrak{B}$ (пространство Стоуна). В прямой степени $\mathfrak{M}^{X_{\mathfrak{B}}}$ рассмотрим подмодель $\mathfrak{M}'$ всех непрерывных функций на $X_{\mathfrak{B}}$, если считать основное множество $\{0,1,\ldots,n\}$ модели $\mathfrak{M}$ наделенным дискретной топологией. Тогда $\mathfrak{M}' \cong \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение $\varphi : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ следующим образом. Отождествим элементы булевой алгебры $\mathfrak{B}$ с открыто-замкнутыми подмножествами $X_{\mathfrak{B}}$, тогда $\varphi(f)$, где $f$ – непрерывное отображение $X_{\mathfrak{B}} \to \{0,1,\ldots,n\}$, есть набор

$$\langle f^{-1}(0), f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(n) \rangle$$

Непосредственно проверяется, что $\varphi$ определяет изоморфизм $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$.

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{M}$ – конечная модель. $\mathcal{B}$ – класс булевых алгебр,

$$\mathfrak{M}^{\mathcal{B}} = \{\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \mathcal{B}\},$$

тогда вопрос о разрешимости теории $Th(\mathfrak{M}^{\mathcal{B}})$ класса $\mathfrak{M}^{\mathcal{B}}$ эффективно сводится к вопросу о разрешимости теории $Th(\mathcal{B})$ класса $\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение очевидно. Для полноты приведем набросок доказательства. Определим эффективное отображение $\tau$ множества формул сигнатуры $\sigma$ в множество формул сигнатуры булевых алгебр так:

$$\tau(x = y) = \Big[\mathop{\&}_{i=0}^{n} x_i = y_i\Big];$$

$$\tau(P_i^{m_i}(x^1,\ldots,x^{m_i})) = \Big[\bigcup_{\substack{(j_1,\ldots,j_{m_i}) \\ \mathfrak{M} \models P_i(j_1,\ldots,j_{m_i})}} (x^1_{j_1} \cap \ldots \cap x^{m_i}_{j_{m_i}}) = e\Big];$$

$\tau(\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}) = \tau(\mathfrak{A}) \circ \tau(\mathfrak{B})$, где $\circ$ есть $\&$, $\vee$ или $\supset$ ;

$$\tau(\neg \mathfrak{A}) = \neg \tau(\mathfrak{A});$$

$$\tau((\forall x)\mathfrak{A}(x)) = [\forall X_0,\dots,X_n(X_0 \cup \dots \cup X_n = e \;\&\; \underset{i\neq j}{\&}\; X_i \cap X_j = \Lambda \supset \\ \supset \tau(\mathfrak{A}(x)))];$$

$$\tau((\exists x)\mathfrak{A}(x)) = [\exists X_0,\dots,X_n(X_0 \cup \dots \cup X_n = e \;\&\; \underset{i\neq j}{\&}\; X_i \cap X_j = \Lambda \;\& \\ \& \;\tau(\mathfrak{A}(x)))].$$

Если $\mathfrak{A}$–предложение, то $\tau(\mathfrak{A})$–также предложение и, очевидно, для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \models \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \tau(\mathfrak{A})$, следовательно, $\mathfrak{A} \in Th(\mathfrak{M}^{B}) \Leftrightarrow \tau(\mathfrak{A}) \in Th(B)$ .

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Если $Th(B_1) = Th(B_2)$, то $Th(\mathfrak{M}^{B_1}) = Th(\mathfrak{M}^{B_2})$.

Ещё одно описание булевой степени с точностью до элементарной эквивалентности дает

ЛЕММА 2. Пусть $I$ – некоторое множество, $D$ – фильтр на $I$. Если булева алгебра $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентна булевой алгебре $2^I/D$, то модель $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ элементарно эквивалентна приведенной степени $\mathfrak{M}^I/D$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 1 показано, что вопрос об истинности формулы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ равносилен истинности $\tau(\mathfrak{A})$ на $\mathfrak{B}$ . Следовательно, если $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентна $\mathfrak{B}_1$ , то $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ элементарно эквивалентна $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}_1}$. Для доказательства леммы остается только непосредственно проверить изоморфизм

$$\mathfrak{M}^{2^I/D} \cong \mathfrak{M}^I/D .$$

Для этого построим отображение $f : \mathfrak{M}^{2^I/D} \to \mathfrak{M}^I/D$ так: пусть $\langle X_0,\dots,X_n\rangle$ – элемент $\mathfrak{M}^{2^I/D}$ . Выберем во множестве I подмножества $Y_0,\dots,Y_n$ такие, что $Y_0 \cup \dots \cup Y_n = I$, $Y_i \cap Y_j = \Lambda$ для $i \neq j$ и $Y_i/D = X_i$. Построим элемент $g$ из $\mathfrak{M}^I$ так: $g(\alpha) = i$ , если $\alpha \in Y_i$. Полагаем $f(\langle X_0,\dots,X_n\rangle) = g/D$ . Нетрудно теперь проверить, что $g/D$ не зависит от выбора $Y_i$ и $f$ определяет изоморфное отображение $\mathfrak{M}^{2^I}/D$ на $\mathfrak{M}^I/D$ .

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $K_1 = \{\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B}$ – булева алгебра, $\}$ – класс всех булевых степеней модели $\mathfrak{M}$, $K_2=\{\mathfrak{M}^I/D \mid I$ – произвольное множество, $D$ – фильтр на $I\}$ – класс всех приведенных степеней $\mathfrak{M}$, тогда

$$Th(K_1)=Th(K_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1] показано, что для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ существует множество $I$ и фильтр $D$ такие, что

$$Th(\mathfrak{B})=Th(2^I/D).$$

2. Пусть $\mathfrak{M}=\langle\{0,\dots,n\},f_1^{k_1},\dots,f_s^{k_s}\rangle$ – функционально полная алгебра. Тогда многообразие $\widehat{\mathfrak{M}}$, порожденное этой алгеброй, называется постовским многообразием порядка $n+1$ [3].

ТЕОРЕМА 1. *Любое постовское многообразие конечного порядка имеет разрешимую теорию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А.Фостер доказал [7], что для любой конечной функционально полной алгебры $\mathfrak{M}$ имеет место равенство $\widehat{\mathfrak{M}}=\{\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B}$ – булева алгебра $\}$. Так как теория всех булевых алгебр разрешима [1], то для доказательства теоремы достаточно применить предложение 1.

Теорема доказана.

Представляет несомненный интерес исследование теории класса всех алгебр, принадлежащих постовским многообразиям всех конечных порядков. Нужно заметить, что вопрос сформулирован не совсем точно, так как нужно, чтобы все алгебры рассматривались в одной и той же сигнатуре. Заметим, что очень легко выбрать единственную сигнатуру так, что полученный класс будет иметь неразрешимую теорию, так как любая конечная алгебра может быть формульно получена из функционально полной. Например, для этого можно использовать последовательность конечных симметрических или знакопеременных групп и т.п. Более интересно то, что можно так выбрать сигнатуру и последовательность функциональных алгебр, что теория всех алгебр из объединения многообразий Поста разрешима. Ниже это будет доказано для тех классов алгебр, которые уже встречались в литературе как обобщение булевых алгебр, а именно класс постовских алгебр (Розенблюм) и класс решеток Поста (Эпстейн) [3]. Отметим, что решетки Поста разных порядков имеют разную сигнатуру, но это затруднение легко элиминируется.

Пусть $\mathcal{R}_n = \langle\{0,\ldots,n-1\},\vee,'\rangle$-алгебра, операции которой определены так:

$$x \vee y = \min(x,y),\quad x' = x+1 \text{ для } x \neq n-1,\quad (n-1)' = 0.$$

Класс $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\mathcal{R}}_n$ назовем классом постовских алгебр. Каждая алгебра $\mathcal{R}_n$ – функционально полная, поэтому $\hat{\mathcal{R}}_n$ – многообразие Поста порядка $n$.

ТЕОРЕМА 2. Класс постовских алгебр $\mathcal{P}$ имеет разрешимую теорию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим класс $\mathcal{P}_0 = \{\mathcal{R}_n / n$ – натуральное$\}$. Покажем, что теория $Th(\mathcal{P}_0)$ разрешима. Давно и хорошо известно, что класс $L_0$ всех конечных линейно упорядоченных множеств имеет разрешимую теорию [2].

Но на классе $L_0$ можно очевидным образом определить формульно операции $\vee$ и $'$ так, что класс $L_0$ с этой формульной сигнатурой совпадает с $\mathcal{P}_0$. Покажем, как сделать это:

$$x = 0 \Leftrightarrow \forall y(x \leqslant y);\quad x = e \Leftrightarrow \forall y(y \leqslant x);$$

$$x' = y \Leftrightarrow (x = e \,\&\, y = 0) \vee (x \neq e \,\&\, x < y \,\&\, \forall z\,(x \leqslant z \,\&$$

$$\&\, z \leqslant y \supset x = z \vee y = z);$$

$$x \vee y = z \Leftrightarrow (z = x \,\&\, x \leqslant y) \vee (z = y \,\&\, y \leqslant x).$$

Отсюда непосредственно следует разрешимость $Th(\mathcal{P}_0)$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее предложение, имеющее самостоятельный интерес. Это предложение касается обобщенных произведений в смысле Фефермана–Воота и непосредственно следует из основной теоремы об этих произведениях, хотя в указанном виде это предложение, кажется, ещё не было явно сформулировано. Все определения, формулировку и доказательство основной теоремы можно найти в статьях [2, 5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $K_1$ – класс алгебр подмножеств, $K_2$ – некоторый класс моделей. Если $Th(K_1)$ разрешима и $Th(K_2)$ разрешима, то разрешима и теория класса $K_2^{K_1}$ всех обобщенных степеней $\mathfrak{M}^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{M} \in K_2$, $\mathfrak{F} \in K_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma$ - произвольное предложение сигнатуры языка $K_2^{K_1}$. По основной теореме эффективно найдем последовательность $\zeta = \langle \Phi, \Theta_0, \ldots, \Theta_m \rangle$ со свойствами, сформулированными в основной теореме. Используя разрешимость теории $Th(K_2)$, эффективно найдем все наборы $\tau_i = \langle \Theta_{i_1}, \ldots, \Theta_{i_{k_i}} \rangle$, $i_1 < \ldots < i_{k_i} \leq m$ такие, что существует модель $\mathfrak{A}_i$ из $K_2$ такая, что

$$\mathfrak{A}_i \models \Theta_j \Longleftrightarrow \Theta_j \in \tau_i\,, \quad j \leq m.$$

Теперь эффективно проверяем, будут ли формулы

$$\Phi_i = \Phi \begin{matrix} x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_i}}, x, \ldots \\ e, \ldots, e, \ \wedge, \ldots \end{matrix}$$

принадлежать теории $K_1$. Если для всех $i$

$$\Phi_i \in Th(K_1)\,,$$

то $\Gamma \in Th(K_2^{K_1})$. Если же это неверно, то есть существует $i$ такое, что $\Phi_i \notin Th(K_1)$ (иными словами, существует $\mathfrak{F} \in K_1$ такое, что $\mathfrak{F} \models \neg \Phi_i$), то $\Gamma \notin Th(K_2^{K_1})$. (Действительно, на модели $\mathfrak{A}_i^{\mathfrak{F}} \in K_2^{K_1}$ имеем $\mathfrak{A}_i^{\mathfrak{F}} \models \neg \Gamma$).

Предложение доказано.

Для доказательства теоремы остается воспользоваться леммой 2, предложением 2 и тем фактом, что теория всех алгебр подмножеств с предикатами, выделяющими фильтр (теория фильтров), разрешима [1]. Действительно, пусть $\overline{\mathcal{R}}_n = \{\mathcal{R}_n^I / D \mid I$ - множество, $D$ - фильтр на $I\}$, пусть

$$\mathcal{P}_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{R}}_n\,.$$

Тогда по лемме 2, очевидно, $Th(\mathcal{P}) = Th(\mathcal{P}_1)$. Но $\mathcal{P}_1$ можно рассматривать как $\mathcal{P}_0^{K_0}$, где $K_0$ - класс всех алгебр подмножеств с выделенным фильтром. Остается сослаться на предложение 2.

Теорема доказана.

Обратимся теперь к решеткам Поста [3]. Пусть

$$\mathcal{L}_n = \langle \{0, \ldots, n-1\}, \vee, \wedge, c_0, \ldots, c_{n-1} \rangle,$$

где $x \vee y = max(x,y)$, $x \wedge y = min(x,y)$, $c_i(i)=n-1$; $c_i(x)=0$ для $x \neq i$.

Решетки Поста порядка $n$ – это алгебры многообразия $\hat{\mathcal{L}}_n$, порожденного алгеброй $\mathcal{L}_n$.

Чтобы можно было рассматривать решетки Поста разных порядков в одной сигнатуре, поступим следующим образом. Решетки Поста (порядка $n$) будем рассматривать как алгебраические системы в сигнатуре $\sigma_0 = \langle P_0^1, P_1^3, \vee, \wedge, 0, e \rangle$, где $0$ – наименьший элемент решетки, $e$ – наибольший элемент, $P_0^1(x) \Longleftrightarrow \exists i\,(c_i(x)=e)$;

$$P_1^3(x,y,z) \Longleftrightarrow P_0^1(x) \,\&\, \exists i\,(c_i(x) = e \,\&\, z = c_i(y)).$$

Рассмотрение решеток Поста всех порядков в сигнатуре $\sigma_0$ и позволит изучать класс всех решеток Поста.

Заметим, что каждая решетка Поста есть дистрибутивная решетка относительно операций $\vee$, $\wedge$, с нулем $0$ и единицей $e$. Предикат $P_0$ выделяет конечное подмножество $M$ элементов (мощность этого множества равна порядку многообразия), которое линейно упорядочено, $0, e \in M = \{0 = a_0 < \ldots < a_{n-1} = e\}$ и предикат $P_1(a_i, x, y)$ определяет операцию $c_i$ на этой решетке.

ТЕОРЕМА 3. Класс $\mathcal{LP}$ всех решеток Поста (конечных порядков) имеет разрешимую теорию.

Доказательство в основных чертах аналогично доказательству теоремы 2. Пусть $\mathcal{LP}_0 = \{\mathcal{L}_n\}$. Нетрудно показать, как в теореме 2, что $Th(\mathcal{LP}_0)$ разрешима.

Хотя элементы $\hat{\mathcal{L}}_n$, рассматриваемые в сигнатуре $\sigma_0$, не являются булевыми степенями модели $\mathcal{L}_n$, но в некотором смысле близки к ним. А именно, если в определении булевой степени в пункте в) определение истинности предикатов по формуле (*) производится для операций $\wedge$, $\vee$, а для предикатов $P_0$, $P_1$ воспользоваться следующими формулами:

$$P_0(\langle X_0,\ldots,X_n\rangle) \Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{n} \Big[\bigcup_{j\neq i} X_j = \Lambda\Big];$$

$$P_1(\langle X_0^1,\ldots,X_n^1\rangle,\langle X_0^2,\ldots,X_n^2\rangle,\langle X_0^3,\ldots,X_n^3\rangle) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{n}\Big\{\Big[\bigcup_{j\neq i} X_j^1 = \Lambda\Big] \& X_i^2 = X_n^3 \,\&\, \bigcup_{j\neq i} X_j^2 = X_0^3\Big]\Big\},$$

то можно утверждать, что любая решетка Поста из $\hat{\mathcal{L}}_n$ есть таким образом "видоизмененная" булева степень решетки $\mathcal{L}_n$.

Предложение 1, очевидно, остается в силе и для "видоизмененных" булевых степеней. Лемма 2 справедлива для "видоизмененных" булевых степеней, если вместо приведенной степени $\mathfrak{M}^I/D$ рассматривать обобщенную степень $\mathfrak{M}^{\langle 2^I, \cup, \ldots, D' \rangle}$ в смысле Фефермана-Воота, где $D'$ выделяет элементы фильтра $D$. Поэтому дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 2 остаются в силе.

Теорема доказана.

3. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Можно естественным образом определить "самую общую" булеву степень конечной модели, добавив в сигнатуру все предикаты, которые можно определить на основном множестве булевой степени, используя формулы булевой алгебры и модели $\mathfrak{M}$ так, как это делается в определении обобщенного произведения Фефермана-Воота, и доказать предложение 1 и лемму 2 (с заменой приведенной степени ~~на~~ обобщенную).

2) Теорема Фостера, упомянутая в доказательстве теоремы 1, утверждает, что для конечной функционально полной алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $\hat{\mathfrak{A}} = S\Pi\mathfrak{A}$ (обозначения смотрим [4] вместо обычного (по Биркгофу) $\hat{\mathfrak{A}} = HS\Pi\mathfrak{A}$). Лемма 2 позволяет в этом случае указать ещё одну формулу $\hat{\mathfrak{A}} = [H\Pi\mathfrak{A}]$, где [ ] – обозначает взятие арифметического замыкания (то есть добавление к классу всех алгебр элементарно эквивалентных некоторым алгебрам из этого класса).

Поступила в редакцию
15. XI. 1967 г.

Литература

1. Ю.Л.Ершов. Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров. – Алгебра и логика. Семинар, 3, №3 (1964), стр. 17-38.

2. Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайцлин. Элементарные теории. – Успехи матем. наук, 20, № 4(124) (1965), 37-108.

3. А.И.Мальцев. Итеративные алгебры и многообразия Поста.–Алгебра и логика. Семинар, 5, №2 (1966), 5-24.

4. А.И.Мальцев. Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем. - Алгебра и логика. Семинар, 5, № 3 (1966), 3-9.

5. A.L.Foster. Generalized "Boolean" theory of universal algebras I. Subdirect sums and normal representation theory. Math.Z.,58,306-336,1953.

6. A.L.Foster. Generalized "Boolean" theory of universal algebras II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras.Math.Z.,59,191-199,1953.

7. S.Feferman,R.Vaught. The first order properties of products of algebraic systems.Fund.Math.47,57-103,1959.