ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2017, том 55, № 4, с. 564–569

УДК 536.21

ОБ ОБРАТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ К АНИЗОТРОПНЫМ ТЕЛАМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

© 2017 г. В. Ф. Формалев*, С. А. Колесник**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия
125993 Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
**E-mail: formalev38@mail.ru*
***E-mail: sergey@oviont.com*

Поступила в редакцию 14.06.2016 г.

Предложен замкнутый метод восстановления тепловых потоков к анизотропным телам в условиях аэрогазодинамического нагрева по экспериментальным данным температур в пространственно-временны́х узлах. Тепловая защита тела изготовлена из анизотропных материалов, компоненты тензора теплопроводности которых зависят от температуры, т.е. являются нелинейными. Метод построен на основе аппроксимации пространственной зависимости теплового потока линейной комбинацией базисных функций с искомыми коэффициентами (параметрами), определяемыми с помощью минимизации квадратичного функционала невязки между экспериментальными и теоретическими значениями температур по неявному методу градиентного спуска, а также на основе построения и численного решения задач по определению коэффициентов чувствительности. Для увеличения степени корректности обратной задачи наряду с основным функционалом построены и использованы регуляризирующие функционалы на основе требований гладкости пространственных функций тепловых потоков по первой и второй производным, что позволило восстанавливать при сопряженном теплообмене тепловые потоки в виде произвольных функций: монотонных, немонотонных, имеющих экстремумы, точки перегиба и т.п. Получены и обсуждаются многочисленные результаты восстановления тепловых потоков к анизотропным телам, причем в каждом случае подобран параметр регуляризации.

DOI: 10.7868/S0040364417040068

ВВЕДЕНИЕ

При тепловом проектировании скоростных летательных аппаратов (ЛА) решаются сопряженные задачи теплопереноса между вязкими теплогазодинамическими течениями и обтекаемыми элементами конструкций ЛА, внутри которых необходимо определять нестационарные температурные поля. При теоретическом определении тепловых потоков необходимо численно решать существенно нелинейную систему уравнений вязкой теплогазодинамики, что не всегда приемлемо из-за сложности проблемы. Экспериментальное определение тепловых потоков затруднено вследствие конечных размеров измерительных приборов (термопар), возмущающих газодинамический поток.

Тепловые потоки к телу с допустимой точностью можно оценить, используя экспериментальные данные других характеристик, от которых в существенной мере зависят тепловые потоки, например от распределения температур в конечном числе пространственно-временны́х точек. Экспериментальные значения температур затем необходимо использовать при решении обратных граничных задач теплопереноса по заранее разработанной методике. Однако решение обратных задач вообще и теплопереноса в частности представляет собой одну из сложнейших проблем естествознания, поскольку в подавляющем большинстве они являются некорректными в смысле существования, единственности и устойчивости решений.

В данной работе предложен замкнутый метод численного решения обратных граничных задач нелинейной теплопроводности в анизотропных телах по восстановлению тепловых потоков в виде гладких функций пространственных переменных довольно общего вида – монотонных, немонотонных, возрастающих, убывающих, имеющих экстремумы, точки перегиба и т.п.

Обратным задачам теплопроводности посвящены работы О.М. Алифанова и его школы [1, 2], А.А. Самарского и П. Вабищевича [3], аналитические и численные методы решения прямых задач теплопроводности, в том числе в анизотропных телах, подробно рассмотрены в работах Э.М. Карташова [4], Г. Карслоу и Д. Егера [5], В.Ф. Форма-

лева [6, 9, 10], И.В. Кудинова и В.А. Кудинова [7], методы регуляризации анализировались в работах А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [8]. Однако обратные граничные задачи линейной теплопроводности в анизотропных телах по восстановлению симметричных относительно одной из координатных осей тепловых потоков гауссовского типа рассматривались в работе авторов [7] на основе полученного аналитического решения. Обратная граничная задача нелинейной теплопроводности в анизотропных телах по восстановлению произвольных тепловых потоков не принималась во внимание вообще.

Метод восстановления тепловых потоков на границах анизотропных тел включает в себя следующие процедуры:

– формирование функционала квадратичной невязки между экспериментальными и теоретическими значениями температур в нумерованных пространственно-временны́х точках;

– формирование регуляризирующего функционала с параметром регуляризации и объединение его с основным функционалом для увеличения запаса устойчивости итерационных методов;

– неявный метод градиентного спуска минимизации суммарного функционала также для увеличения запаса устойчивости итерационных методов;

– метод параметрической идентификации, в соответствии с которым искомая функция теплового потока представляется в виде линейной комбинации базисных функций, приписанных к узлам пространственных конечных элементов, на которые делится граница; при этом вектор коэффициентов линейной комбинации (параметров) является искомым вектором;

– формирование и численные методы решения задач по определению элементов матрицы чувствительности, причем эти задачи формируются путем дифференцирования прямых задач по искомым параметрам;

– численные методы решения прямых задач анизотропной теплопроводности, содержащих смешанные производные; эти же методы используются и для решения задач относительно коэффициентов чувствительности;

– построение итогового итерационного процесса по уточнению коэффициентов линейной комбинации с исследованием сходимости итерационного процесса.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для анизотропной пластины $l_1 \times l_2$ в декартовой системе координат Ox, Oy ставится задача восстановления распределения по переменной x плотности тепловых потоков $q(x)$ на границе $y = 0$ с использованием экспериментальных значений температур

$$T\left((x,y),t^k\right) = \tilde{T}_{i,k}, \quad i = \overline{1,I}, \quad k = \overline{1,K}, \tag{1}$$

где I – количество пространственных узлов, в которых расположены термопары, K – количество точек по времени ограничения в виде следующей нелинейной задачи анизотропной теплопроводности:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{12}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{21}(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{22}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0,l_1), \\ y \in (0,l_2), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}-\left(\lambda_{21}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = q(x), \\ x \in (0,l_1), \quad y = 0, \quad t > 0,\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{21}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0, \\ x \in (0,l_1), \quad y = l_2, \quad t > 0,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}-\left(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0, \\ x = 0, \quad y \in (0,l_2), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{11}(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0, \\ x = l_1, \quad y \in (0,l_2), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}T(x,y,0) = T_0(x,y), \\ x \in [0,l_1], \quad y \in [0,l_2], \quad t = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Функция $q(x)$ определяется в классе функций с непрерывными производными первого порядка.

Восстанавливаемая функция $q(x)$ представляется в виде следующей линейной комбинации линейно-непрерывных базисных функций $N_m(x)$, задаваемых на конечных элементах Δx_m, полученных разбиением отрезка $x \in [0,l_1]$ точками x_m, $m = \overline{0,M}$:

$$q(x) \approx \sum_{m=0}^{M} q_m N_m(x), \tag{8}$$

причем $N_m(x_r) = 1$, $m = r$ и $N_m(x_r) = 0$ при $m \neq r$.

Решение сводится к поиску вектора $\mathbf{q} = (q_0,..,q_m,..,q_M)$.

Так как дифференциальный оператор в уравнении (2) является нелинейным (квазилиней-

ным), то для решения задачи (2)–(7) необходимо использовать численные методы минимизации функционала

$$S(\overline{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\left[T_{i,k}(\mathbf{q}) - \tilde{T}_{i,k}\right]^2 \tag{9}$$

в виде суммы по пространственно-временны́м переменным квадратов отклонения экспериментальных значений $\tilde{T}_{i,k}$ в точках $\left((x,y)_i, t^k\right)$ от расчетных $T_{i,k}(\mathbf{q}) \equiv T_{i,k}\left((x,y)_i, t^k, \mathbf{q}\right)$ в тех же точках, полученных при некотором фиксированном векторе $\mathbf{q}$.

Для минимизации функционала (9) используется *неявный* метод градиентного спуска

$$\mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{q}^{(n)} - \alpha_n \operatorname{grad} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right), \tag{10}$$

где n – номер предыдущей итерации, α_n – малые параметрические шаги, подчиняющиеся условию $(\alpha_n > 0)$

$$S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) < S\left(\mathbf{q}^{(n)}\right). \tag{11}$$

Первоначальное значение α_0 может быть выбрано произвольно. Тогда, если в результате следующей итерации условие (11) не выполнилось, α_n *на этой итерации* уменьшается и расчет повторяется, в противном случае (когда (11) выполняется) *для следующей итерации значение* α_n можно увеличить для ускорения сходимости итерационного процесса.

Окончание итерационного процесса устанавливается по близости к нулю $\operatorname{grad} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right)$, т.е. при выполнении условия

$$\left|\operatorname{grad} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right)\right| \le \varepsilon, \tag{12}$$

где ε – заданная точность.

Для вычисления градиента функционала в выражении (10) и определения вектора $\Delta\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{q}^{(n+1)} - \mathbf{q}^{(n)}$ разложим в ряд Тейлора функцию $T_{i,k}\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right)$ в окрестности $\mathbf{q}^{(n)}$. Сохраняя линейные относительно $\Delta\mathbf{q}^{(n)}$ члены, получим

$$\begin{gathered} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\left[\left(T_{i,k}\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{l=0}^{M}\frac{\partial T_{i,k}\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)}{\partial q_l}\Delta q_l^{(n)}\right) - \tilde{T}_{i,k}\right]^2 + \\ + O\left(\|\Delta\mathbf{q}\|^2\right), \quad l = \overline{0, M}. \end{gathered} \tag{13}$$

Тогда градиент функционала (13) в векторно-матричной форме представляется в виде соотношения

$$\begin{gathered} \operatorname{grad} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) = Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\left(T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) - \tilde{\tilde{T}}\right) + \\ + Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)Z\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\Delta\mathbf{q}^{(n)}, \end{gathered} \tag{14}$$

$$Z\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} z^0\left((x,y)_1, t^1, \mathbf{q}^{(n)}\right) & \dots & z^m\left((x,y)_1, t^1, \mathbf{q}^{(n)}\right) & \dots & z^M\left((x,y)_1, t^1, \mathbf{q}^{(n)}\right) \\ z^0\left((x,y)_2, t^1, \mathbf{q}^{(n)}\right) & \dots & z^m\left((x,y)_2, t^1, \mathbf{q}^{(n)}\right) & \dots & z^M\left((x,y)_2, t^1, \mathbf{q}^{(n)}\right) \\ \dots & & \dots & & \dots \\ z^0\left((x,y)_I, t^K, \mathbf{q}^{(n)}\right) & \dots & z^m\left((x,y)_I, t^K, \mathbf{q}^{(n)}\right) & \dots & z^M\left((x,y)_I, t^K, \mathbf{q}^{(n)}\right) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Элементы этой матрицы определяются из решения задач относительно производных от прямой задачи (2)–(7) по каждому компоненту q_l, $l = \overline{0, M}$. Матрица (15) называется матрицей чувствительности.

Подставляя (14) в (10), приходим к следующему итерационному соотношению:

$$\begin{gathered} \Delta\mathbf{q}^{(n)} = -\alpha_n\left(E + \alpha_n Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)Z\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\right)^{-1} \times \\ \times Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\left(T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) - \tilde{T}\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Для определения элементов матрицы чувствительности (15) необходимо решить $(M+1)$ независимые начально-краевые задачи относительно функций $z^0(x,y,t) = \dfrac{\partial T}{\partial q_0}$, $z^m(x,y,t) = \dfrac{\partial T}{\partial q_m}$, $z^M(x,y,t) = \dfrac{\partial T}{\partial q_M}$, которые можно получить, продифференцировав задачу (2)–(7) по соответствующим параметрам $q_0, \dots, q_M$.

Эти задачи для каждой функции $N_m(x)$, $m = \overline{0, M}$ решаются с помощью метода переменных направлений с экстраполяцией по времени (МРЭВ) [8], как и прямая задача (2)–(7), причем на каждом итерационном шаге они могут решаться параллельно с использованием метода решения прямой задачи (2)–(7) для текущего вектора $\mathbf{q}^{(n)}$.

Поскольку на функцию теплового потока не накладывается никаких априорных ограничений, то восстанавливаемые тепловые потоки, будучи непрерывными в местах стыковки конечных элементов, получают разрывы первого рода производных в этих узлах, что приводит к возникновению значительных колебаний искомых функций, т.е. обратная задача становится некорректной. Для увеличения устойчивости необходимо составить регуляризирующий функционал $R(\overline{q})$ [6, 7] и добавить его к функционалу квадратичной невязки:

$$S_a(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}) + R_a(\mathbf{q}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{K}\left[T_{i,k}(\mathbf{q}) - \tilde{T}_{i,k}\right]^2 + R_a(\mathbf{q}). \quad (17)$$

Функционал $R(\mathbf{q})$ формируется на основе дополнительных априорных условий, накладываемых на восстанавливаемую функцию $q(x)$, например, гладкость n-го порядка, ограничение сверху или снизу и др.

В векторно-матричной форме регуляризирующий функционал представляется в виде [6]

$$R_a(\mathbf{q}) = \frac{a}{2}\|B\mathbf{q}\|^2,$$

где a – параметр регуляризации.

Тогда градиент функционала (17) примет вид

$$\operatorname{grad} S_a\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) = \operatorname{grad} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) + \operatorname{grad} R_a\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) = \\ = \operatorname{grad} S\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) + aB^T\left(B\mathbf{q}^{(n+1)}\right).$$

Используя выражение (14), получим

$$\operatorname{grad} S_a\left(\mathbf{q}^{(n+1)}\right) = Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\left(T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) - \tilde{T}\right) + \\ + Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)Z\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\Delta\mathbf{q}^{(n)} + aB^TB\left(\mathbf{q}^{(n)} + \Delta\mathbf{q}^{(n)}\right). \quad (18)$$

Подставив (18) в итерационное выражение (10) метода градиентного спуска, находим

$$\Delta\mathbf{q}^{(n)} = -\alpha_n\left[Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\left(T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) - \tilde{T}\right) + \\ + Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)Z\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\Delta\mathbf{q}^{(n)} + aB^TB\left(\mathbf{q}^{(n)} + \Delta\mathbf{q}^{(n)}\right)\right],$$

откуда следует

$$\Delta\mathbf{q}^{(n)} = \\ = -\alpha_n\left(E + \alpha_n\left\{Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)Z\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) + a\cdot B^TB\right\}\right)^{-1}\times \quad (19) \\ \times\left\{Z^T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right)\left(T\left(\mathbf{q}^{(n)}\right) - \tilde{T}\right) + a\cdot B^TB\cdot\mathbf{q}^{(n)}\right\}.$$

Таким образом, итерационный процесс (19) построен теперь для вектора $\mathbf{q}$ узловых значений коэффициентов линейных комбинаций, так как $\Delta\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{q}^{(n+1)} - \mathbf{q}^{(n)}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

По изложенному методу разработан программный комплекс, с помощью которого проведены численные эксперименты, результаты которых приведены ниже. Входные данные принимали следующие значения:

$$l_1 = 0.1\ \text{м},\quad l_2 = 0.05\ \text{м},$$
$$c\rho = 2.23\times10^6\ \text{Дж}/\left(\text{м}^3\,\text{К}\right),$$
$$\lambda_\xi = 2\ \text{Вт}/(\text{м}\,\text{К}),\quad \lambda_\eta = 6\ \text{Вт}/(\text{м}\,\text{К}),\quad \varphi = \pi/6.$$

Количество I пространственных узлов принималось равным девяти с координатами $x = \{0.025, 0.05, 0.075\}$; $y = \{0.005, 0.025, 0.035\}$ (рис. 1); моменты времени $t^k = 10k$, $k = 1, \ldots, 200$; $t^{\text{кон}} = 2000$ с. Экспериментальные значения температур получены с помощью численного решения задачи (2)–(7) с перечисленными входными данными и различными функциями теплового потока.

На рис. 2–4 представлены восстановленные соответствующие тепловые потоки.

Матрица регуляризирующего оператора, выбранного по условию непрерывности первых производных искомых функций, имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где первая и последняя строки обнулены, так как информация о поведении искомой функции в узлах $x = 0$ и $x = l_1$ отсутствует.

К точным значениям температур в пространственно-временны́х точках добавляется относи-

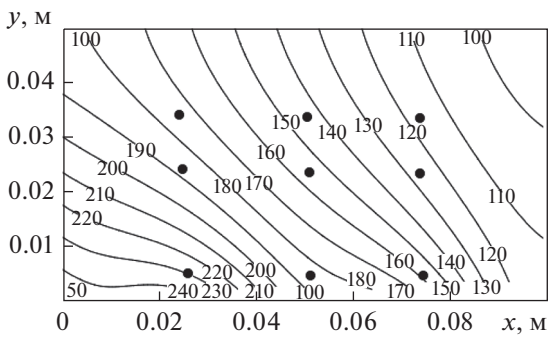

Рис. 1. Рассчитанное температурное поле в анизотропной пластине в момент времени $t_{\text{кон}} = 2000$ с и координаты расположения термопар.

тельная погрешность δ в виде случайной величины с равномерным распределением на отрезке (−10,10). На рис. 1 показаны координаты расположения термопар в девяти точках и пример распределения температур в пластине, полученного теоретически в момент времени $t = 2000$ с для теплового потока на границе $y = 0$ в виде функции $q(x) = 10^4(\sin(6(x/l_1) - 3)^2 + \cos(x/l_1 + 0.5))$.

На рис. 2 представлены восстановленные тепловые потоки для варианта, в котором искомая функция при экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ задавалась как $q(x) = -10^4 \times \times \left((x - 0.05)^2/l_1^2 - 1\right)$. Количество M принималось равным 20.

На рис. 3 представлены восстановленные тепловые потоки, которые при экспериментальных значениях температур $\tilde{T}_{i,k}$ задавались функцией $q(x) = 10^4 \exp\left(-30(x/l_1 - 0.5)^2\right) + 60\exp(9x/l_1 - 0.5)$. Количество элементов $M = 30$.

Рис. 2 и 3 показывают, во-первых, что предложенный метод численного решения обратных граничных задач анизотропной теплопроводности можно применять для восстановления практически произвольных гладких функций и, во-вторых, что с увеличением числа M конечных элементов отдельные свойства восстанавливаемых функций (такие как промежутки монотонности, экстремумы и их положение, точки перегиба и т.п.) воспроизводятся гораздо лучше, при этом незначительные погрешности наблюдаются на концах отрезка, на котором действуют тепловые потоки.

Для вариантов на рис. 2 и 3 *регуляризирующий оператор строился по непрерывности первых производных искомых функций по переменной x.*

На рис. 4 представлены восстановленные тепловые потоки, заложенные в экспериментальные значения температур $\tilde{T}_{i,k}$, в виде функции $q(x) = 10^4(\sin(6(x/l_1)3))^2 + \cos(x/l_1 + 0.5))$ при $M = 20$.

Матрица регуляризирующего оператора *выбрана по условию непрерывности вторых производных искомых функций по переменной x:*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ 0 & .. & 1 & -4 & 6 & -3 & \\ 0 & .. & 0 & 1 & -3 & 2 & \end{pmatrix}.$$

Как видно из рисунка, восстановленная плотность теплового потока практически не отличается от искомой, хотя последняя имеет три экстремума и две точки перегиба.

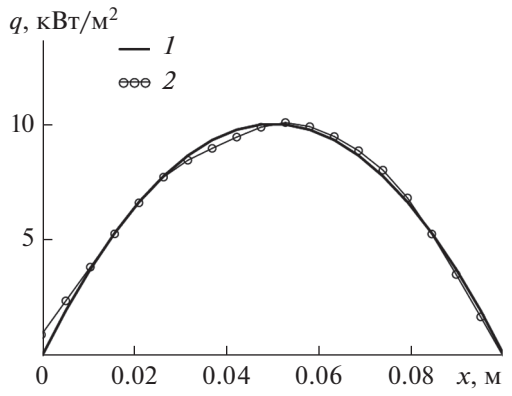

Рис. 2. Восстановленный тепловой поток при $M = 20$ с параметром регуляризации $a = 0.01$: *1* – восстановленная функция, *2* – искомая функция.

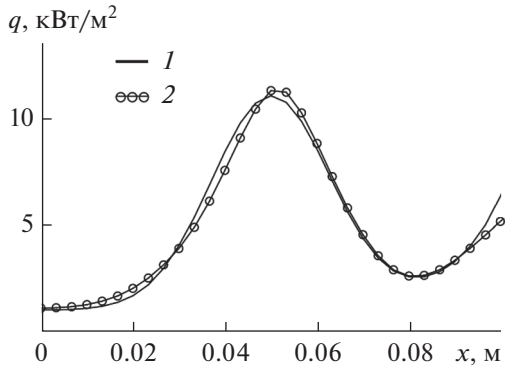

Рис. 3. Восстановленный тепловой поток при $M = 30$ с параметром регуляризации $a = 0.01$: *1* – восстановленная функция, *2* – искомая функция.

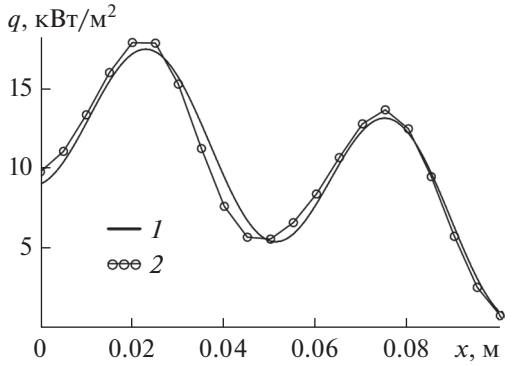

Рис. 4. Восстановленный тепловой поток при $M = 20$ с параметром регуляризации $a = 0.001$: *1* – восстановленная функция, *2* – искомая функция.

В обратных задачах теплопереноса в анизотропных телах вообще и в граничных обратных

задачах в частности с регуляризацией функционала невязки основной проблемой является определение параметра регуляризации. Численные эксперименты показали существенное повышение устойчивости восстанавливаемой функции (корректности) при использовании способа формализации в регуляризирующем функционале априорных предположений о принадлежности искомых функций классу гладкости по первой или второй производным, а также от значений параметра регуляризации. Ясно, что параметр регуляризации не может быть слишком малым, поскольку при его уменьшении сильнее проявляется некорректность обратной задачи. В то же время он не может быть слишком большим, поскольку можно получить совершенно другое решение, значительно отличающееся от истинного.

В данной работе использован метод подбора, в соответствии с которым параметр регуляризации подбирается по соответствию апостериорной качественной информации о решении с априорной качественной информацией (монотонность, непрерывность, непрерывность производных первого или второго порядков, наличие экстремумов и точек перегиба и т.п.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен новый метод численного решения обратных граничных задач теплопроводности в анизотропных телах с нелинейными характеристиками теплопереноса на основе неявного метода градиентного спуска, параметрической идентификации, построения регуляризирующих функционалов и метода решения нелинейных задач по определению элементов матрицы коэффициентов чувствительности.

2. Построены регуляризирующие функционалы и матрицы регуляризирующих функционалов на основе предположений о непрерывности первых и вторых производных восстанавливаемых тепловых потоков на отдельных пространственных конечных элементах, на которые делится граничная область действия тепловых потоков.

3. Неявный метод градиентного спуска и методы регуляризации позволили получить высокоточный и устойчивый алгоритм восстановления пространственных функций тепловых потоков практически произвольного вида: монотонных, многоэкстремальных, имеющих точки перегиба – с погрешностями, не превышающими погрешности экспериментальных данных, что подтверждают полученные результаты.

4. Установлено, что регуляризирующий функционал, построенный по условию гладкости по второй производной дает возможность восстанавливать тепловые потоки с бо̀льшим количеством характерных точек, чем регуляризирующий функционал, построенный по непрерывности первых производных.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-19-10340).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
2. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
4. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
6. *Формалев В.Ф.* Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 276 с.
7. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Задачи динамической термоупругости на основе аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности // ТВТ. 2015. Т. 53. № 4. С. 551.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
9. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел // ТВТ. 2013. Т. 51. № 6. С. 875.
10. *Колесник С.А., Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л.* О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // ТВТ. 2015. Т. 53. № 1. С. 72.