K. K. Lavrent'ev, Inverse problems of the finding boundary condition in the theory of propagation of nonstationary waves. II, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1975, Volume 51, 129–133

Лаврентьев К.К.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН. II.

§ I.

Данная работа, как и работа [I], посвящена нахождению неизвестного коэффициента в граничном условии третьего рода по некоторым сведениям о поведении функции Грина. Рассмотрено несколько более сложных, чем в статье [I], задач с использованием разработанного там аппарата. В дальнейшем ссылки на статью [I] будут даваться в следующей форме – (№.№ , I), а нумерация задач в этой работе продолжает нумерацию статьи [I].

Пусть $\mathcal{U}(x,z,t)$, по-прежнему, является решением задачи (I.I, I). Рассмотрим обратную задачу IУ о восстановлении функции $h(x)$ при $x>0$ по известной функции $\theta(t)=2\pi t\sqrt{\frac{t^2-z_0^2}{t^2+z_0^2}}\,\frac{d}{dt}\Big[\mathcal{U}(0,z_0,t)-\frac{1}{\pi(t^2-z_0^2)_+^{1/2}}\Big]$, если предполагается, что $h(x)$ при $x<0$ задана. Для задачи IУ справедлива следующая теорема.

<u>Теорема Ш</u>. Если $h(x)$ ищется в классе непрерывных функций, для которых $|h(x)|<M$ при $x\in(0;s^*)\left(s^*=\frac{t^{*2}-z_0^2}{2t^*}\right)$, где M достаточно велико и $|h(x)|<M_0$ при $x<0$, а заданная функция $\theta(t)$ непрерывна при $t<t^*$, $|\theta(t)|<M_0$ и $\theta(t)\equiv 0$ при $t<z_0$, то существует такое s^* , зависящее от M , M_0 , z_0 , что решение обратной задачи IУ существует и единственно. Докажем это утверждение. Доказательство будет состоять в том, что мы аналогично [I] получим нелинейную систему вида

$$\left.\begin{aligned} h &= A_1'(h,\omega) \\ \omega &= A_2'(h,\omega) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.1)$$

которая будет являться системой с оператором сжатия в некотором шаре подходящим образом выбранного банахова пространства.

Так как $\mathcal{U}(x,z,t)$ удовлетворяет (I.I, I), то

$$\mathcal{U}(0,z_0,t)=\frac{1}{\pi(t^2-z_0^2)_+^{1/2}}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{h(\xi)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{\left[(t-\tau)^2-(\xi^2+z_0^2)\right]_+^{1/2}} . \qquad (2.1)$$

В (2.1) $\varphi(x,t)=\mathcal{U}(x,0,t)$. Введя функции $\varphi_0(x,t)=\varphi(x,t)-\frac{1}{\pi(t^2-x^2)_+^{1/2}}$ и $\alpha(t)=\mathcal{U}(0,z_0,t)-\frac{1}{\pi(t^2-z_0^2)_+^{1/2}}$, получим:

527 9

$$\alpha(t)=-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\tau<t}\frac{h(\xi)d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(\xi^2+z_0^2)]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{h(\xi)\varphi_0(\xi,\tau)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(\xi^2+z_0^2)]_+^{1/2}}. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.1)

$$-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\tau<t}\frac{h(\xi)d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(\xi^2+z_0^2)]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}}=\int\limits_{-\frac{t^2-z_0^2}{2t}}^{\frac{t^2-z_0^2}{2t}}L_h(x,t,\xi)d\xi\,,$$

где $L_h=-\frac{1}{\pi^2}h(\xi)\cdot\int\frac{d\tau}{[(t-\tau)^2-(\xi^2+z_0^2)]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}}$. Для $L_h(x,t,\xi)$ справедливо:

1) $L_h\big|_{t<|x|}\equiv 0$

2) $L_h\big|_{\xi=\pm\frac{t^2-z_0^2}{2t}}=-h\left(\pm\frac{t^2-z_0^2}{2t}\right)\cdot\sqrt{\frac{t^2+z_0^2}{t^2-z_0^2}}\cdot\frac{1}{2\pi t}$

3) L_h и $K_h=\frac{\partial}{\partial t}L_h$ – суммируемые по ξ функции при $\xi\in\left[-\frac{t^2-z_0^2}{2t};\frac{t^2-z_0^2}{2t}\right]$, причем $\lim\limits_{t\to z_0}\left|2\pi t\sqrt{\frac{t^2-z_0^2}{t^2+z_0^2}}\int\limits_0^{\frac{t^2-z_0^2}{2t}}K_h(x,t,\xi)d\xi\right|<$
$<\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\max\limits_{x\in(0;s)}|h(x)|$.

Для того, чтобы выделить $h(x)$, стоящее не под знаком интеграла, продифференцируем (3.1) по t . Аналогично (5.2, 1) получим:

$$\theta(t)=\Phi(t)-h\left(\frac{t^2-z_0^2}{2t}\right)+2\pi t\sqrt{\frac{t^2-z_0^2}{t^2+z_0^2}}\int\limits_0^{\frac{t^2-z_0^2}{2t}}K_h(x,t,\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}t\sqrt{\frac{t^2-z_0^2}{t^2+z_0^2}}\int\limits_0^{\frac{t^2-z_0^2}{2t}}\frac{h(\xi)d\xi}{(t^2-2\xi t-z_0^2)^{1/2}}\int\limits_0^{\xi}\frac{h(\xi_1)d\xi_1}{\sqrt{\xi_1(\xi-\xi_1)}}- \qquad (4.1)$$

$$-\frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{t^2-z_0^2}{t^2+z_0^2}}\iint\limits_{\tau<t}\frac{h(\xi)\omega(\xi,\tau)d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(z_0^2+\xi^2)]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}}\,.$$

В $\Phi(t)$ выделены все известные функции, содержащиеся в правой части уравнения (4.1). Выражая h из (4.1), имеем:

$$h=A_1'(h,\omega)\,. \qquad (5.1)$$

Так как для $\omega(x,t)$, по-прежнему, справедливо уравнение (5.2, 1) с $x_0=0$, то подставляя в (5.2, 1) вместо $h\left(\frac{x+t}{2}\right)$ ее выражение из (5.1) и объединяя получившееся после этой подстановки уравнение с уравнением (5.1), мы получим систему вида (1.1). Введем теперь семейство банаховых пространств C_{s^*,z^0} , элементами которых являются пары непрерывных функций $h(x)$, $x\in(0,s^*)$ и $\omega(x,t)$, $(x;t)\in S^{z_0t^*}$ (см.рис.1). $\|X\|=$

$= max\{\max_{x\in(0,s^*)}|h(x)|;\ \max_{(x;t)\in S^{z_0,t^*}}|\omega(x,t)|\}$. Нетрудно про-

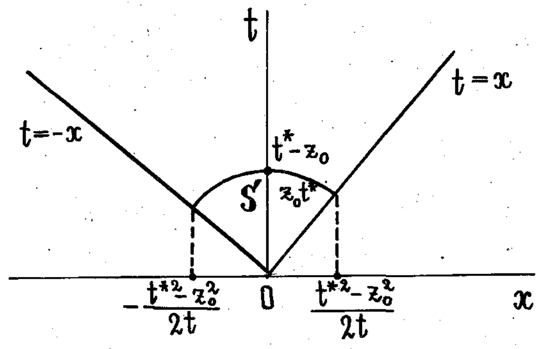

Рис.I.

верить, что полученная система уравнений является при достаточно малых s^* системой с оператором сжатия в некотором шаре пространства C_{s^*,z^0} .

§ 2.

Пусть теперь $h(x)$ – четная функция и $h(x)$ при $|x|<x_0$, где $x_0 \geqslant 0$ известна. Рассмотрим следующие обратные задачи.

Задача I$'$.

Функция $h(x)$ ищется в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|h(x)|<M$, где M достаточно велико, при $|x|>x_0$ $(x_0>0)$, при $|x|<x_0$, $|h(x)|<M_0$. Заданная функция $\theta(t)$ непрерывна и $|\theta(t)|<M_0$ при $t<t^*$. При $t>2x_0$, θ задается произвольно, а при $t<2x_0$, θ однозначно определяется по известной $h(x)$ при $|x|<x_0$.

Задача II$'$.

$h(x)$ ищется в классе непрерывных функций, допускающих при $|x|<q^*$ представление $h(x)=h(0)+h_1(x)x^\alpha$, ($|h_1(x)|<M$, M достаточно велико), $\alpha>0$. Заданная функция $\theta(t)$ непрерывна и имеет представление $\theta(t)=\theta_1(t)t^\alpha$, где $|\theta_1(t)|<M_0$, при $t<t^*$.

Задача IУ .

$h(x)$ ищется в классе непрерывных функций, $|h(x)|<M$ при $|x|<s^*\left(s^*=\frac{t^{*2}-z_0^2}{2t^*}\right)$, где M достаточно велико. Заданная функция $\theta(t)$ непрерывна и $|\theta(t)|<M_0$ при $t<t^*$. $\theta(t)=0$ при $t<z_0$.

Функции θ во всех трех задачах совпадают с функциями задач I, II, IУ статьи [I] .

Для всех трех задач имеют место теоремы существования и единственности решения в некоторой области. Доказательства этих теорем аналогичны доказательствам теорем I и Ш, поэтому мы не будем их приводить. Задачи I′, П′ и IУ′ помимо непосредственного интереса имеют также вспомогательный характер, так как дают возможность решить вопрос о существовании решения задач, к изучению которых мы сейчас переходим.

§ 3.

Пусть $U_n(x,z,t)$ является решением прямой задачи:

$$\left.\begin{aligned} &U_{ntt}=\Delta_2 U_n+\Big[\sum_{i=1}^{n} q_i(z)\,\delta(x-x_i)\Big]U_n \\ &\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0}=\delta(x,t),\quad U\big|_{t<0}\equiv 0,\quad 0\le z<\infty,\ -\infty<x<\infty \end{aligned}\right\}. \qquad (1.3)$$

Наличие в уравнении члена с потенциалом $\sum_{i=1}^{n} q_i(z)\,\delta(x-x_i)$ есть запись того, что при каждом $x=x_i$ функция $U_n(x,z,t)$ удовлетворяет: I) требованию непрерывности, 2) скачок производной $\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{x=x_i}=q_i(z)U\big|_{x=x_i}$(I.3) – корректная задача математической физики и ее решение существует и единственно.

Нас будет интересовать обратная задача (задача У) нахождения коэффициентов $q_i(z)$ по значениям $U_n(x,z,t)$ в точках $x=\hat{x}_j$; $z=0$, $j=1,2,\ldots$.

Выведем интегральное уравнение связывающее $q_i(z)$, $U_n(x,z,t)$ и $U_n(x_i,z,t)$. Продолжим $q_i(z)$ четным образом на $z<0$: $\tilde{q}_i(z)=q_i(z)$ при $z\geqslant 0$ и $\tilde{q}_i(z)=q_i(-z)$ при $z\leqslant 0$. Тогда $U_n(x,z,t)=\tilde{U}_n(x,z,t)$ при $z\geqslant 0$, где $\tilde{U}_n(x,z,t)$ удовлетворяет

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{U}_{ntt}=\Delta_2\tilde{U}_n+\Big[\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i(z)\,\delta(x-x_i)\Big]\tilde{U}_n \\ &\tilde{U}_n\big|_{t<0}\equiv 0 \qquad (x;t)\in R^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.3)$$

Очевидно:

$$U_n(x,z,t)=\frac{1}{\pi(t^2-x^2-z^2)_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\tau<t}\frac{\tilde{U}_n(x_i,\xi,\tau)\tilde{q}_i(\xi)\,d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2-(x-x_i)} \qquad (3.3)$$

Положим здесь $x=x_j$ ($j=1,2,\ldots,n$)

$$\tilde{U}_n=\frac{1}{\pi(t^2-x^2-z^2)_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{U}_n(x_i,\xi,\tau)q_i(\xi)\,d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(x_j-x_i)^2-(z-\xi)^2]_+^{1/2}} \qquad (4.3)$$

(4.3) есть система интегральных уравнений, связывающих $2n$ функций $\tilde{U}_n(x_i,z,t)$ при разных x_i и $\tilde{q}_i(z)$. Подставляя в (3.3) $x=\hat{x}_j$; $z=0$, получим еще n уравнений. Найденная система

$2n$ уравнений по существу не отличается от аналогичных систем, получавшихся в задачах, рассмотренных ранее. Проиллюстрируем этот факт для простейших случаев ($n=1$, $n=2$).

Пусть $n=1$, $x_1=0$

$$U_1(x,z,t)=\frac{1}{\pi(t^2-x^2-z^2)_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{\tilde{U}_1(0,\xi,\tau)\tilde{q}_1(\xi)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2-x^2]_+^{1/2}}. \tag{5.3}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.2, 1), поэтому, если рассматривать обратную задачу нахождения функции $\tilde{q}_1$ по значениям $\tilde{U}_1(x,z,t)$ в точке $x=\hat{x}_1$; $z=0$, то для нее будут справедливы все утверждения, сформулированные для обратной задачи с четной функцией $h(x)$ в § 2.

Пусть теперь $n=2$, $x_1=\hat{x}_1=0$, $x_2=\hat{x}_2=1$, тогда (4.3) дает:

$$U_2(0,z,t)=\frac{1}{\pi(t^2-z^2)_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{\tilde{U}_2(0,\xi,\tau)q_1(\xi)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2]_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{\tilde{U}_2(1,\xi,\tau)q_2(\xi)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2-1]_+^{1/2}}$$

$$U_2(1,z,t)=\frac{1}{\pi(t^2-z^2-1)_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{U_2(0,\xi,\tau)q_1(\xi)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2-1]_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{\tilde{U}_2(1,\xi,\tau)q_2(\xi)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2]_+^{1/2}}. \tag{6.3}$$

Из очевидного равенства $\tilde{U}_2(1,z,t)=0$ при $t^2<z^2+1$ вытекает, что первое из уравнений (6.3) при $t<2$ имеет вид:

$$\tilde{U}_2(0,z,t)=\frac{1}{\pi(t^2-z^2)_+^{1/2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{\tilde{U}_2(0,\xi,\tau)\tilde{q}_1(\xi)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(z-\xi)^2]_+^{1/2}}. \tag{7.3}$$

Отсюда ясно, что эта задача совпадает с рассматривавшейся выше ($n=1$). Пусть эта задача решена и $\tilde{q}_1$ известно для $|z|<1$, а $\tilde{U}_2(0,z,t)$ при $t<2-|z|$. Рассмотрим второе уравнение. При $t<1$ оно обращается в тождество $0\equiv 0$, при $t<2+\sqrt{2}-|z|$ первый из интегралов в правой части представляет собой известную функцию и, следовательно, оно отличается от интегрального уравнения задачи только свободным членом. Аналогичные рассмотрения можно продолжить и дальше.

Как и в статье [I] для всех рассмотренных выше задач справедлива теорема единственности на любую глубину.

Литература

I. А.С.Благовещенский, К.К.Лаврентьев. Обратные задачи нахождения граничного условия в теории распространения нестационарных волн. I.- Наст.сб. с. 78-84.