Современная математика и ее приложения. Том 100 (2016). С. 134–144

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

© 2016 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. Аннотация. Изучена нестационарная начально-краевая задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в случае большой вязкости. Установлены оценки сходимости решений к решениям, соответствующих линеаризованных задач, при стремлении вязкости к бесконечности. Рассмотрен также случай периодической по времени задачи.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В настоящей работе исследован вопрос обоснования асимптотики решений начально-краевых задач для нестационарных уравнений Навье—Стокса, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости, при неограниченном возрастании коэффициента вязкости.

Отметим, что с точки зрения гидромеханики большая величина коэффициента кинематической вязкости (малого числа Рейнольдса) означает (см., например, [6, гл. VIII]), что силы инерции малы по сравнению с силами вязкости. Поэтому приближенная трактовка движений такого типа состоит в отбрасывании из уравнений гидромеханики членов, дающих силы инерции. Однако этот подход требует определенного обоснования, поскольку, как известно, в случае большой вязкости возникает временной пограничный слой. Из значительного числа работ по асимптотике представления решений начально-краевых задач для линеаризованных уравнений Навье—Стокса в случае большой вязкости укажем работу [3], где в § 8 гл. 1 и § 4 гл. 6 рассмотрены вопросы обоснования. В случае нелинейной нестационарной системы Навье—Стокса вопрос асимптотики наиболее полно на наш взгляд отражен в статье [12]. Однако вопрос обоснования в этой работе не затрагивался. В статье [2] для абстрактных полулинейных уравнений с параметром осуществлен переход к интегральным уравнениям, после чего для обоснования асимптотического поведения решений использована теория степени отображений, однако оценки сходимости не приводятся.

В настоящей статье доказана асимптотическая сходимость (в различных нормах) решений к соответствующим «предельным» решениям, учитывающим пограничный слой. Эти результаты являются развитием работы автора [9]. Рассмотрены случаи начально-краевой и периодической по времени задач в двумерной и трехмерной областях.

Характерной особенностью данной работы является получение эффективных оценок скорости сходимости (по вязкости) решений к «предельным» решениям соответствующих линеаризованных задач во всех рассматриваемых ситуациях. При этом акцент делается на порядок оценок и

ISSN 1512–1712

вычисление констант через данные задачи. Приводится сравнительный анализ точности различных линеаризаций.

Перейдем к точным формулировкам. Будем использовать термины и обозначения, принятые в [4, 7].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с липшицевой границей $\partial\Omega$, $T > 0$ — заданное число. Движение вязкой несжимаемой жидкости в $Q_T := \Omega \times (0, T)$ описывается уравнениями (см., например, [4, гл. VI])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\,\Delta u + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x,t) - \nabla p_*, \qquad \operatorname{div} u = 0 \quad (x \in \Omega,\ t \in (0,T)); \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad (t \in (0,T),\ x \in \partial\Omega); \qquad u(x,0) = a(x) \quad (x \in \bar{\Omega}); \qquad \int\limits_{\Omega} p_*(x)dx = 0. \tag{2}$$

Здесь векторная функция u и скалярная функция p_* — искомые скорость жидкости и давление, соответственно. Векторные функции a и f — соответственно начальное условие на скорость жидкости и вектор плотности внешних сил заданы, μ — кинематический коэффициент вязкости.

Решением (сильным) задачи (1), (2) называют пару функций $u(t,x)$, $p_*(t,x)$, имеющих все входящие в уравнение (обобщенные) производные из $L_2(Q_T)$ и удовлетворяющие уравнениям (1) и краевым условиям (2).

Введем обозначения, необходимые для определения слабого решения. Пусть $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — пространство квадратично суммируемых векторных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \, dx, \quad \|u\| = (u,u)^{1/2}.$$

Обозначим через H замыкание пространства гладких финитных соленоидальных векторных полей J (см., например, [4]) по норме $\|\cdot\|$, а через V — по норме $\|\cdot\|_1$, порождаемой скалярным произведением

$$(u,v)_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx. \tag{3}$$

Пусть V^* — пространство, сопряженное к V. Значение функционала $f \in V^*$ на элементе $v \in V$ будем обозначать $\langle f, v\rangle$. Как известно, справедливо непрерывное вложение $V \subset H \subset V^*$, так что $\langle f, v\rangle = (f, v)$ для $f \in H$, $v \in V$.

Ниже в работе ограничимся для простоты случаем, когда неоднородность f в правой части уравнения (1) принадлежит пространству $L_2(0, T, H)$.

Зададим трилинейную форму b соотношением

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx \tag{4}$$

для тройки таких векторных функций u, v, w, для которых определено выражение справа. Форма (4) непрерывна, например, на $V \times V \times V$ (см. [7, гл. II, § 1]). Отметим известное (см., например, [7, гл. II, § 1]) свойство трилинейной формы b:

$$b(u,v,v) = 0 \quad \forall u, v \in V. \tag{5}$$

Задача об обобщенном (слабом) решении для системы (1), (2) может быть сформулирована в виде: для заданных функций $f \in L_2(0,T,H)$ и $a \in H$ ищется функция $u \in L_2(0,T,V)$ такая, что $u' \in L_2(0,T,V^*)$ и

$$\langle u', v\rangle + \mu(u,v)_1 + b(u,u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V, \tag{6}$$

$$u\big|_{t=0} = a. \tag{7}$$

В [7, гл. III, § 3] показано, что в случае липшицевости границы области для любых $a \in H$, $f \in L_2(0,T,H)$ задача (6), (7) имеет решение. В случае двумерной области Ω решение задачи (6), (7) единственно.

Обозначим через P ортопроектор в $L_2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ на подпространство H (см., например, [4, гл. I, § 2]). Оператором Стокса (будем обозначать его A) называют расширение по Фридрихсу оператора, задаваемого выражением $-P\Delta u$ на области определения $D(A) = \{u \in W_2^2(\Omega) \cap V\}$. Как известно (см., например, [4, гл. II, § 4]), оператор A самосопряжен, положительно определен и обратный A^{-1} вполне непрерывен (в случае ограниченной области Ω). Согласно (3)

$$(u,v)_1 = \big(A^{1/2}u, A^{1/2}v\big) \quad \forall u,v \in V,$$

где $A^{1/2}$ — корень квадратный из оператора A.

2. Асимптотика при большой вязкости. Метод пограничного слоя

Изучим задачу (1), (2), точнее, обобщенную задачу (6), (7) при большой вязкости. Сразу заметим, что приводимые ниже в леммах 1–3 оценки известны (см., например, [4, гл. VI, §§ 2, 3]): они основаны на энергетическом методе. Для нас было важно проследить зависимость соответствующих оценок от μ. Эти результаты важны при оценке асимптотики в теоремах 1–7.

Лемма 1. *Пусть $a \in H$, $f \in L_2(0,T,H)$. Тогда решение $u : [0,T] \to V$ задачи (6), (7) удовлетворяет оценке*

$$\|u(t)\| \leqslant e^{-\mu\kappa t}\|a\| + \frac{1}{\sqrt{2\mu\kappa}}\|f\|_{L_2(0,T,H)} \quad \forall t \in [0,T],\ \forall \mu > 0, \tag{8}$$

где $\|f\|_{L_2(0,T,H)}$ обозначает норму в $L_2(0,T,H)$.

Кроме того, для всякого фиксированного $\mu_* > 0$ выполнена оценка

$$\int_0^T \|u(t)\|_1^2 dt \leqslant \frac{c_*}{\mu} \quad \forall \mu \geqslant \mu_*, \tag{9}$$

где κ — первое собственное значение оператора Стокса, а $c_* > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $\mu \geqslant \mu_*$.

Действительно, полагая в (6) $v = u$ и используя свойство (5), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|^2\big) + \mu\|u\|_1^2 = (f,u). \tag{10}$$

Согласно определению κ для всех $v \in V$ выполнено соотношение $\|v\|_1^2 \geqslant \kappa\|v\|^2$. Тогда в силу (10)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|^2\big) + \mu\kappa\|u\|^2 \leqslant \|f\| \cdot \|u\|.$$

В правой части мы воспользовались неравенством Коши—Буняковского.

Отсюда аналогично [4, с. 113], рассматривая случаи $\|u(t)\| \neq 0$ и $\|u(t)\| = 0$ отдельно, выводим:

$$\frac{d}{dt}\big(\|u\|\big) + \mu\kappa\|u\| \leqslant \|f\|. \tag{11}$$

По теореме о дифференциальных неравенствах из (11) следует соотношение

$$\big\|u(t)\big\| \leqslant e^{-\mu\kappa t}\|a\| + \int_0^t e^{-\mu\kappa(t-s)}\big\|f(s)\big\|ds.$$

Интеграл в правой части оценим посредством применения неравенства Коши—Буняковского величиной

$$\left(\int\limits_0^t e^{-2\mu\kappa(t-s)}ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^t \big\|f(s)\big\|^2 ds\right)^{1/2},$$

откуда и следует оценка (8). В частности, при $\mu \geqslant \mu_*$ имеем

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|u(t)\big\| \leqslant \|a\| + \frac{1}{\sqrt{2\mu_*\kappa}}\|f\|_{L_2(0,T,H)} := \rho_*. \tag{12}$$

Интегрируя (10) по t от 0 до T и используя (12), установим, что справедлива оценка (9) с постоянной $c_* = \frac{1}{2}\|a\|^2 + \sqrt{T}\rho_*\|f\|_{L_2(0,T,H)}$.

Рассмотрим поведение решений u^μ задачи (6), (7) при $\mu \to +\infty$. Разделим (6) на $\mu > 0$. Устремляя $\mu \to +\infty$, формально получим

$$(u^\infty, h)_1 = 0 \quad \forall h \in V.$$

Решением этого уравнения, причем единственным, в силу положительной определенности формы $(\cdot,\cdot)_1$, является $u^\infty = 0$. Однако при этом, вообще говоря, не выполнено условие (7) при $t = 0$.

Чтобы учесть поведение решения вблизи $t = 0$, рассмотрим задачу

$$\left\langle \frac{\partial w}{dt}, v\right\rangle + \mu(w,v)_1 = 0, \quad t \in (0,T),\ v \in V, \tag{13}$$

$$w\big|_{t=0} = a. \tag{14}$$

Однозначная разрешимость линейной задачи (13), (14) вытекает, например, из [7, гл. III, § 1]. Аналогично (8), (9) для решения задачи (13), (14) получаются оценки

$$\big\|w(t)\big\| \leqslant e^{-\mu\kappa t}\|a\|, \quad \int\limits_0^T \big\|w(t)\big\|_1^2\,dt \leqslant \frac{c}{\mu}. \tag{15}$$

Оценка (8) показывает, что для любого фиксированного момента времени $t_0 \in (0,T]$ выполнено соотношение $\max\limits_{t\in[t_0,T]}\big\|u^\mu(t)\big\| \to 0$ при $\mu \to +\infty$. Оценка (15) характеризует $w(t)$ как погранслойную функцию. При достаточно большом $\mu > 0$ она мало отличается от нуля лишь в окрестности точки $t = 0$. В целом, оценки (8), (9) и (15) показывают, что с возрастанием вязкости μ движение жидкости замедляется.

Замечание 1. Задача (13)–(14) соответствует как обобщенная задаче в пространстве H: $w' + \mu Aw = 0$, $w(0) = a$, где A — оператор Стокса. Решение такой задачи, как известно, дается формулой (см., например, [11, гл. 3, § 3.2]), использующей операторную экспоненту $w(t) = e^{-\mu At}a$ $(t > 0)$.

Асимптотическое поведение решений задачи (6), (7) при $\mu \to +\infty$ в случае двумерной области характеризуется следующей теоремой. Фиксируем произвольное $\mu_* > 0$.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей и выполнены условия $a \in H$, $f \in L_2(0,T,H)$. Тогда при достаточно больших $\mu \geqslant \mu_*$ разность $u^\mu - w^\mu$ решений задачи (6), (7) и решений задачи (13), (14) стремится к нулю равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$. При этом справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\Big\|u^\mu(t) - w^\mu(t)\Big\| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\mu}} \quad \forall \mu \geqslant \mu_* \tag{16}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от $\mu \geqslant \mu_*$.

Доказательство. Полагая $\psi = u^\mu - w^\mu$ и вычитая (13) из (6), при $v = \psi$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\psi\|^2\right) + \mu\,(u^\mu,\psi)_1 - \mu\,(w^\mu,\psi)_1 + b\,(u^\mu,u^\mu,\psi) = (f,\psi)\,.$$

Воспользовавшись линейностью формы $(\cdot,\cdot)_1$, отсюда выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\psi\|^2\right) + \mu\|\psi\|_1^2 \leqslant \|f\|\cdot\|\psi\| + \left|b\,(u^\mu,u^\mu,\psi)\,\right|. \tag{17}$$

При этом для двумерной области Ω согласно [7, с. 235] и в силу (12)

$$\left|b\big(u^\mu,u^\mu,\psi\big)\right| \leqslant \sqrt{2}\cdot\|u^\mu\|\cdot\|u^\mu\|_1\cdot\|\psi\|_1 \leqslant c_1\|u^\mu\|_1\cdot\|\psi\|_1$$

для постоянной $c_1 = \sqrt{2}\rho_*$. Тогда из (17) следует

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\psi\|^2\big) + \mu\|\psi\|_1^2 \leqslant \|f\|\cdot\|\psi\| + c_1\|u^\mu\|_1\cdot\|\psi\|_1. \tag{18}$$

Неравенство (18) приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\|\psi\|^2\right) + \mu\|\psi\|_1^2 \leqslant 2\|f\|\cdot\|\psi\| - \mu\|\psi\|_1^2 + 2c_1\|u^\mu\|_1\cdot\|\psi\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant 2\|f\|\cdot\|\psi\| - \mu\left(\|\psi\|_1 - \frac{c_1}{\mu}\|u^\mu\|_1\right)^2 + \frac{c_1^2}{\mu}\|u^\mu\|_1^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\|\psi\|^2\right) + \mu\|\psi\|_1^2 \leqslant 2\|f\|\cdot\|\psi\| + \frac{c_1^2}{\mu}\|u^\mu\|_1^2. \tag{19}$$

Отсюда при κ, равном первому собственному значению оператора Стокса, можем записать

$$\frac{d}{dt}\left(\|\psi\|^2\right) + \mu\kappa\|\psi\|^2 \leqslant 2\|f\|\cdot\|\psi\| + \frac{c_1^2}{\mu}\|u^\mu\|_1^2.$$

Оценим здесь $\|f\|\cdot\|\psi\|$ посредством неравенства Юнга (см., например, [4, с. 18]):

$$\|\psi\|\|f\| \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mu\kappa}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{\mu\kappa}\|f\|^2.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\|\psi\|^2\right) + \frac{\mu\kappa}{2}\|\psi\|^2 \leqslant \frac{2}{\mu\kappa}\|f\|^2 + \frac{c_1^2}{\mu}\|u^\mu\|_1^2.$$

По теореме о дифференциальных неравенствах при $\gamma = \kappa/2$ с учетом условия $\psi(0) = 0$ отсюда вытекает

$$\big\|\psi(t)\big\|^2 \leqslant \frac{2}{\mu\kappa}\int\limits_0^t e^{-\mu\gamma(t-s)}\big\|f(s)\big\|^2\,ds + \frac{c_1^2}{\mu}\int\limits_0^t e^{-\mu\gamma(t-s)}\big\|u^\mu(s)\big\|_1^2\,ds. \tag{20}$$

В силу (9) для новой постоянной $c_2 > 0$ (равной $c_1^2 c_*$) отсюда следует

$$\big\|\psi(t)\big\|^2 \leqslant \frac{2}{\mu\kappa}\int\limits_0^t \big\|f(s)\big\|^2\,ds + \frac{c_1^2}{\mu}\int\limits_0^t \big\|u^\mu(s)\big\|_1^2\,ds \leqslant \frac{2}{\mu\kappa}\|f\|^2_{L_2(0,T,H)} + \frac{c_2}{\mu^2},$$

что и влечет оценку (16) с постоянной

$$c = \left(\frac{2}{\kappa}\|f\|^2_{L_2(0,T,H)} + \frac{c_2}{\mu_*}\right)^{1/2}.$$

□

Отметим, что оценка (16) имеет порядок $O(\mu^{-1/2})$. В случае, если $f \in L_p(0,T,H)$ при $p \geqslant 2$ порядок оценки будет $O(\mu^{1/p-1})$. Это следует из (20), в котором первый интеграл справа оценивается с помощью неравенства Гельдера.

Рассмотрим более подробно случай $f \in L_\infty(0,T,H)$. В этом предположении справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *но* $f \in L_\infty(0,T,H)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\max_{t[0,T]} \left\| u^\mu(t) - w^\mu(t) \right\| \leqslant \frac{c}{\mu} \quad \forall \mu \geqslant \mu_* \tag{21}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, *не зависящей от* $\mu \geqslant \mu_*$.

Доказательство. Действительно, положим $M := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left\| f(t) \right\|$. В рассматриваемом случае формула (8) превращается в

$$\left\| u(t) \right\| \leqslant e^{-\mu\kappa t} \|a\| + \frac{M}{\mu\kappa} \quad \forall t \in [0,T],\ \forall \mu > 0.$$

Формула (12) превращается в

$$\max_{t\in[0,T]} \left\| u(t) \right\| \leqslant \|a\| + \frac{M}{\mu_*\kappa} := r_* \quad \forall \mu > \mu_*.$$

А из соотношения (20) следует оценка

$$\left\| \psi(t) \right\|^2 \leqslant \left(\frac{2}{\mu\kappa} \right)^2 M^2 + \frac{c_3}{\mu^2}, \quad c_3 := 2r_*^2 c_*,$$

которая влечет утверждение теоремы 2 с постоянной

$$c = \left(\left(\frac{2M}{\kappa} \right)^2 + c_3 \right)^{1/2}.$$

□

В случае размерности $n = 3$ утверждения теорем 1, 2 имеют место при дополнительных ограничениях. При их выводе используется следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 9 из [4, гл. VI, § 4].

Лемма 2. *Пусть* Ω — *ограниченная трехмерная область класса* C^2 *и выполнены условия* $a \in V$ *для начального условия и* $f \in L_2(0,T,H)$ *для неоднородности. Тогда найдется такое значение коэффициента вязкости* $\mu_\infty > 0$, *что при* $\mu > \mu_\infty$ *задача* (6), (7) *имеет единственное решение* $u \in L_\infty(0,T,V)$ *и справедлива равномерная оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| u^\mu(t) \right\|_1 \leqslant c_\infty, \quad \mu \geqslant \mu_\infty, \tag{22}$$

где постоянная $c_\infty > 0$ *не зависит от* $\mu \geqslant \mu_\infty$.

При этом величины μ_∞ и c_∞ определяются соотношениями из [4, гл. VI, § 3, лемма 9] по данным задачи.

Замечание 2. Оценка (22) справедлива также в случае липшицевости границы области Ω из $\mathbb{R}^3$. Однако при условиях $a \in W_2^2(\Omega,\mathbb{R}^3) \cap V$, $f \in L_\infty(0,T,H)$, $f' \in L_1(0,T,H)$ этот результат следует из теоремы 6 и леммы 3, приведенных в [4, гл. VI, §§ 3, 4]. Близкий результат имеется в [7, гл. II, § 3, теорема 3.8].

Теорема 3. *Пусть* Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с липшицевой границей и выполнены условия леммы* 2. *Тогда при достаточно больших* $\mu \geqslant \mu_\infty$ *разность решений* $u^\mu - w^\mu$ *задачи* (6), (7) *и задачи* (13), (14) *стремится к нулю равномерно по* $t \in [0,T]$ *в норме* $L_2(\Omega,\mathbb{R}^3)$. *При этом справедлива оценка* (16) *с некоторой постоянной* $c > 0$, *не зависящей от* $\mu \geqslant \mu_\infty$. *При дополнительном предположении* $f \in L_\infty(0,T,H)$ *справедлива оценка* (21).

Доказательство. аналогично доказательствам теорем 1, 2. Отличие состоит в оценке трилинейной формы b. В трехмерной области Ω справедлива оценка (см. [7, с. 133])

$$\bigl|b(u,v,w)\bigr| \leqslant c_\Omega \|u\|_1 \cdot \|v\|_1 \cdot \|w\|_1 \quad \forall u,v,w \in V,$$

где постоянная $c_\Omega > 0$ зависит лишь от области Ω.

Рассмотрим оценку разности $u^\mu - w^\mu = \psi$. Из неравенства (17) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigl(\|\psi\|^2\bigr) + \mu\|\psi\|_1^2 \leqslant \|f\| \cdot \|\psi\| + c_\Omega \|u^\mu\|_1^2 \|\psi\|_1.$$

Используя оценку (22) леммы 2, отсюда при $\mu > \mu_\infty$ выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigl(\|\psi\|^2\bigr) + \mu\|\psi\|_1^2 \leqslant \|f\| \cdot \|\psi\| + c\|u^\mu\|_1 \cdot \|\psi\|_1,$$

где через c обозначена постоянная, равная $c_\Omega c_\infty$. Эта оценка практически совпадает с (18). Поэтому доказательство завершается аналогично доказательству теорем 1 и 2. □

3. Метод линеаризации

Изучим вопрос обоснования возможности отбрасывания нелинейных членов в уравнениях (1) и (6). Для этого оценим близость решений нелинейных и соответствующих линеаризованных задач в зависимости от вязкости.

Рассмотрим вместо (13) неоднородную линеаризацию

$$\left\langle \frac{\partial w}{dt}, v \right\rangle + \mu(w,v)_1 = (f,v), \quad t \in (0,T),\ v \in V. \tag{23}$$

Пусть $\tilde{w}$ — решение задачи (23), (14).

Теорема 4. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей и выполнены условия $a \in H$, $f \in L_2(0,T,H)$. Тогда при достаточно больших $\mu \geqslant \mu_*$ решения u^μ задачи (6), (7) близки равномерно по $t \in [0,T]$ к решениям $\tilde{w}^\mu$ задачи (13), (14) в норме $L_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$. При этом справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \Bigl\|u^\mu(t) - \tilde{w}^\mu(t)\Bigr\| \leqslant \frac{\tilde{c}}{\mu} \quad \forall \mu \geqslant \mu_*, \tag{24}$$

где постоянная $\tilde{c} > 0$ не зависит от $\mu \geqslant \mu_*$.

Доказательство. Действительно, полагая $\tilde{\psi} = u^\mu - \tilde{w}^\mu$ и вычитая (23) из (6), при $v = \tilde{\psi}$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigl(\|\tilde{\psi}\|^2\bigr) + \mu\|\tilde{\psi}\|_1^2 \leqslant \bigl|b(u^\mu, u^\mu, \tilde{\psi})\bigr|. \tag{25}$$

Отсюда аналогично (19) найдем

$$\frac{d}{dt}\bigl(\|\tilde{\psi}\|^2\bigr) + \mu\|\tilde{\psi}\|_1^2 \leqslant \frac{c_1^2}{\mu}\|u^\mu\|_1^2. \tag{26}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\bigl(\|\tilde{\psi}\|^2\bigr) + \mu\kappa\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \frac{c_1^2}{\mu}\|u^\mu\|_1^2.$$

Тогда по теореме о дифференциальных неравенствах с учетом условия $\tilde{\psi}(0) = 0$ заключаем

$$\|\tilde{\psi}(t)\|^2 \leqslant \frac{c_1^2}{\mu}\int_0^t e^{-\mu\kappa(t-s)}\bigl\|u^\mu(s)\bigr\|_1^2\,ds \leqslant \frac{c_1^2}{\mu}\int_0^t \bigl\|u^\mu(s)\bigr\|_1^2\,ds.$$

Отсюда, согласно (9) получим (24) при $\tilde{c} = c_1\sqrt{c_*}$. □

Теорема 5. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ и выполнены условия леммы 2. Тогда при достаточно больших $\mu \geqslant \mu_\infty > 0$ решения u^μ задачи (6), (7) близки равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ к решениям $\tilde{w}$ задачи (23), (14). При этом справедлива оценка (24) с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от $\mu \geqslant \mu_\infty$.*

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы 5 имеет место соотношение (25). Оценивая в нем трилинейную форму b как в теореме 3 и используя (22), получим неравенство (совпадающее с (18) при $f \equiv 0$)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\tilde{\psi}\|^2\big) + \mu\|\tilde{\psi}\|_1^2 \leqslant c\|u^\mu\|_1 \cdot \|\tilde{\psi}\|_1,$$

откуда аналогично теореме 1 установим справедливость (26) в нашем случае. Дальнейшие рассуждения повторяют, приведенные в теореме 4. ☐

Отметим, что оценка (24) имеет тот же порядок $O(\mu^{-1})$, что и оценка (21), хотя, казалось бы, задача (23), (14) лучше приближает исходную задачу (6), (7), чем задача (13), (14). Тут все дело в окрестности точки $t = 0$. Однако в среднем ситуация иная.

Следствие 1. *Если выполнены условия теорем 4 и 5, то при $\mu \geqslant \mu_*$ справедлива следующая оценка в $L_2(0,T,V)$:*

$$\int\limits_0^T \Big\|u^\mu(t) - \tilde{w}^\mu(t)\Big\|_1^2\,dt \leqslant \frac{c}{\mu^3},$$

где постоянная c не зависит от $\mu \geqslant \mu_*$.

Это утверждение получается после интегрирования неравенства (26) по t от 0 до T и использования (9).

Для сравнения заметим, что из (19) после интегрирования по t и использования (9) и (21) получается оценка

$$\int\limits_0^T \Big\|u^\mu(t) - w^\mu(t)\Big\|_1^2\,dt \leqslant \frac{c}{\mu^2}.$$

Имеет место сходимость $u^\mu - \tilde{w}^\mu$ и $u^\mu - w^\mu$ к нулю при $\mu \to +\infty$ и в других нормах. А именно, обозначим через $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ норму в пространстве $L_p(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ и выполнены условия леммы 2. Тогда при достаточно больших $\mu \geqslant \mu_\infty > 0$ решения u^μ задачи (6), (7) близки равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_p(\Omega,\mathbb{R}^3)$ для $p \in [2,6)$ к решениям $\tilde{w}^\mu$ задач (23), (14). При этом справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \Big\|u^\mu(t) - \tilde{w}^\mu(t)\Big\|_{p,\Omega} \leqslant \frac{c}{\mu^{1-\alpha}}, \quad \alpha := \frac{3}{2} - \frac{3}{p}, \tag{27}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от μ.

Доказательство использует мультипликативное неравенство (см. например, [4, гл. I, § 1])

$$\|u\|_{p,\Omega} \leqslant c(p)\|u\|_1^\alpha \cdot \|u\|^{1-\alpha}, \quad \alpha := \frac{3}{2} - \frac{3}{p},$$

где постоянная $c(p)$ зависит только от области Ω и p. В качестве u рассматривается разность $\Big\|u^\mu(t) - \tilde{w}^\mu(t)\Big\|_{\mathbb{R}^3}$ и используется оценка (24). Кроме того, используется оценка (22), а также аналогичная оценка для решения задачи (23), (14).

Утверждение теоремы 6 справедливо и для погранслойной функции w.

Важным классом задач гидродинамики являются задачи обтекания. Моделируются они, как правило, системой уравнений Навье—Стокса, рассматриваемой в неограниченных областях. Существование обобщенного решения соответствующих задач известно (см., например, [4, гл. IV, § 4, теоремы 6, 7]; см. также [7, гл. III, § 3, замечание 3.2]). В случае $n = 2$ обобщенное решение единственно. В случае $n = 3$ оно единственно для достаточно больших $\mu > 0$. При этом для решений системы уравнений Навье—Стокса в неограниченной области справедливо энергетическое неравенство (в наших обозначениях)

$$\|u(t)\|^2 + 2\mu \int_0^t \|u(s)\|_1^2\, ds \leqslant \|a\|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle\, ds.$$

Оно позволяет распространить результаты теорем 1, 2, 4 на случай двумерной неограниченной области.

В случае размерности области $n = 3$ в предположении дополнительной гладкости начальных данных, определяемых в [4, гл. VI, § 4, теорема 7], при достаточно больших $\mu > 0$ устанавливается единственность обобщенного решения задачи (6), (7) и оценка (22). Поэтому в этих условиях в трехмерных неограниченных областях имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть Ω — неограниченная трехмерная область с границей класса C^2 и выполнены условия $a \in W_2^2(\Omega) \cap V$ для начальных данных, $f \in L_2(0, T, H)$ для неоднородности и $f' \in L_1(0, T, H)$ для ее производной. Тогда справедливы заключения теорем 3, 5, 6.*

4. Периодическая задача

Для уравнения (6) в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ рассмотрим T-периодическую задачу

$$u(0) = u(T). \tag{28}$$

В [5, гл. 4, § 6.2] показано, что при $f \in L_2(0, T, H)$ в случае липшицевости границы задача (6), (28) имеет решение. В двумерной и трехмерной областях оно единственно при достаточно больших $\mu > 0$. Обозначим его $u^{T,\mu}$.

Чтобы избежать громоздких формул, рассмотрим случай $f \in L_\infty(0, T, H)$. Тогда для решения задачи (6), (28) справедливы оценки

$$\|u^{T,\mu}\| \leqslant \frac{1}{\mu\kappa} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|f(t)\| \tag{29}$$

и

$$\int_0^T \|u^{T,\mu}\|_1^2\, dt \leqslant \frac{T}{\mu^2\kappa} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|f(t)\|\right)^2. \tag{30}$$

Оценка (29) получается из (11) по теореме о дифференциальных неравенствах в периодическом случае (см., например, [8, гл. I, § 1.1]). Для получения оценки (30) формула (10) интегрируется от 0 до T и используется T-периодичность функции $u^{T,\mu}$ и оценка (29).

В качестве приближенной функции в периодическом случае используем T-периодическое решение неоднородного уравнения (23), а именно, решение задачи

$$\langle w', v\rangle + \mu(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \tag{31}$$

$$w(0) = w(T). \tag{32}$$

Обозначим его $w^{T,\mu}$. Имеет место утверждение, аналогичное теореме 2.

Теорема 8. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей и выполнены условия $a \in H$, $f \in L_\infty(0, T, H)$. Тогда при достаточно больших $\mu > 0$ решения $u^{T,\mu}$ задачи (6), (28) близки равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ к решениям $w^{T,\mu}$ задачи (31), (32) и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \left\|u^{T,\mu}(t) - w^{T,\mu}(t)\right\| \leqslant \frac{c}{\mu^2} \tag{33}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от μ.

Доказательство. теоремы 8 есть модификация доказательства теоремы 4. Укажем необходимые изменения, связанные с выбором решения $w^{T,\mu}$ задачи (31), (32). А именно, положим $\phi = u^{T,\mu} - w^{T,\mu}$. Вычитая (31) из (6) и полагая $v = \phi$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\phi\|^2\big) + \mu\|\phi\|_1^2 + b\big(u^{T,\mu}, u^{T,\mu}, \phi\big) = 0.$$

Отсюда, аналогично доказательству теоремы 4 с учетом (29) выведем неравенство

$$\frac{d}{dt}\big(\|\phi\|^2\big) + \mu\kappa\|\phi\|^2 \leqslant \frac{c^2}{\mu^2}\|u^{T,\mu}\|_1^2. \tag{34}$$

По теореме о дифференциальных неравенствах в периодическом случае (см., например, [8, гл. I, § 1.1], а также [1, гл. II, § 4]) из (34) получим

$$\big\|\phi(t)\big\|^2 \leqslant \frac{c^2}{\mu^2}\int\limits_0^T G(t-s)\big\|u^{T,\mu}(s)\big\|_1^2\,ds,$$

где $G(t) = e^{-\mu\kappa t}(I - e^{-\mu\kappa T})^{-1}$, $0 < t < T$, и функция G считается продолженной T-периодическим образом на всю вещественную ось. Отсюда

$$\big\|\phi(t)\big\|^2 \leqslant \frac{c^2}{\kappa\mu^2}\int\limits_0^T \big\|u^{T,\mu}(s)\big\|^2\,ds.$$

Тогда с учетом (30) получим оценку (33). □

Отметим, что оценка (33) имеет порядок $O(\mu^{-2})$, что лучше, чем для начально-краевой задачи (см. оценки (21), (24) порядка $O(\mu^{-1})$) при тех же условиях.

Для рассмотрения случая трехмерной области Ω можно использовать следующее утверждение (см., например, [10, лемма 3]).

Лемма 3. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей класса C^2, $f \in L_\infty(0,T,H)$. Тогда найдется такая постоянная $\mu_\infty^T > 0$, что для решений $u^{T,\mu}$ задач (6), (28) при $\mu \geqslant \mu_\infty^T$ имеет место оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\big\|u^{T,\mu}(t)\big\|_1 \leqslant \frac{c_\infty^T}{\sqrt{\mu}}, \tag{35}$$

где постоянная c_∞^T не зависит от $\mu \geqslant \mu_\infty^T$.

Теорема 9. *В условиях леммы 3 при $\mu \geqslant \mu_\infty^T$ справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|u^{T,\mu}(t) - w^{T,\mu}(t)\big\| \leqslant \frac{c}{\mu^{3/2}}$$

с некоторой постоянной c, не зависящей от $\mu \geqslant \mu_\infty^T$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5 с учетом оценки (35).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
2. *Каменский М. И.* О принципе усреднения для квазилинейных параболических уравнений с запаздыванием// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 3. — С. 304–306.
3. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.
5. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
6. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1978. — 736 с.

7. *Темам Р.* Уравнение Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
8. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Минск, Наука и техника, 1986. — 198 с.
9. *Хацкевич В. Л.* Об асимптотическом представлении решения начально-краевой задачи системы уравнений Навье—Стокса в случае большой вязкости// Докл. РАН. — 1998. — *362*, № 6. — С. 773–775.
10. *Хацкевич В. Л.* О принципе усреднения в периодической по времени задаче для уравнений Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 764–777.
11. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
12. *Черноусько Ф. Л.* Движение тела с полостями, заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса// Вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — *5*, № 6. — С. 1049–1070.

В. Л. Хацкевич
Воронежский государственный университет
E-mail: `vlkhats@mail.ru`