Д. В. Коледа, О целых алгебраических числах и унитарных многочленах второй степени, *Чебышевский сб.*, 2016, том 17, выпуск 1, 117–129

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.35, 511.48, 511.75

О ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ И УНИТАРНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Д. В. Коледа (г. Минск)

Аннотация

В статье рассматриваются алгебраические целые числа второй степени и приводимые квадратичные унитарные многочлены с целыми коэффициентами.

Пусть $Q \geqslant 4$ — целое число. Пусть $\Omega_n(Q,S)$ — количество целых алгебраических чисел степени n и высоты $\leqslant Q$, принадлежащих множеству $S \subseteq \mathbb{R}$. В работе уточнён остаточный член в асимптотической формуле для $\Omega_2(Q,I)$, где I — произвольный отрезок.

Обозначим через $\mathcal{R}(Q)$ множество приводимых унитарных многочленов второй степени с целыми коэффициентами и высотой $\leqslant Q$. Получена формула

$$\#\mathcal{R}(Q) = 2\sum_{k=1}^{Q}\tau(k) + 2Q + \left[\sqrt{Q}\right] - 1,$$

где $\tau(k)$ — количество делителей числа k.

Показано также, что количество вещественных целых алгебраических чисел второй степени и высоты $\leqslant Q$ имеет асимптотику

$$\Omega_2(Q,\mathbb{R}) = 8Q^2 - \frac{16}{3}Q\sqrt{Q} - 4Q\ln Q + 8(1-\gamma)Q + O\Big(\sqrt{Q}\Big),$$

где γ — постоянная Эйлера.

Известно, что функция плотности распределения алгебраических целых степени n равномерно стремится к плотности алгебраических чисел степени $n-1$. Мы показываем, что при $n=2$ интеграл от их разности имеет ненулевой предел при стремлении высоты чисел к бесконечности.

Ключевые слова: целые алгебраические числа, распределение алгебраических целых, квадратичные иррациональности, целочисленные унитарные многочлены.

Библиография: 17 названий.

ON ALGEBRAIC INTEGERS AND MONIC POLYNOMIALS OF SECOND DEGREE

D. V. Koleda (Minsk, Belarus)

Abstract

In this paper we consider the algebraic integers of second degree and reducible quadratic monic polynomials with integer coefficients.

Let $Q \geqslant 4$ be an integer. Define $\Omega_n(Q,S)$ to be the number of algebraic integers of degree n and height $\leqslant Q$ belonging to $S \subseteq \mathbb{R}$. We improve the remainder term of the asymptotic formula for $\Omega_2(Q,I)$, where I is an arbitrary interval.

Denote by $\mathcal{R}(Q)$ the set of reducible monic polynomials of second degree with integer coefficients and height $\leqslant Q$. We obtain the formula

$$\#\mathcal{R}(Q) = 2\sum_{k=1}^{Q}\tau(k) + 2Q + \left[\sqrt{Q}\right] - 1,$$

where $\tau(k)$ is the number of divisors of k.

Besides we show that the number of real algebraic integers of second degree and height $\leqslant Q$ has the asymptotics

$$\Omega_2(Q,\mathbb{R}) = 8Q^2 - \frac{16}{3}Q\sqrt{Q} - 4Q\ln Q + 8(1-\gamma)Q + O\Big(\sqrt{Q}\Big),$$

where γ is the Euler constant.

It is known that the density function of the distribution of algebraic integers of degree n uniformly tends to the density function of algebraic numbers of degree $n-1$. We show that for $n = 2$ the integral of their difference over the real line has nonzero limit as height of numbers tends to infinity.

Keywords: algebraic integers, distribution of algebraic integers, quadratic irrationalities, integral monic polynomials.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение и основные результаты

В данной работе мы исследуем распределение целых алгебраических чисел второй степени. Цель данной статьи — уточнить остаточный член в формуле для количества целых алгебраических чисел на промежутке вещественной оси, которая была получена в [11] (теорема 1 ниже; см. также [15]). Для вещественных алгебраических чисел второй степени аналогичное уточнение было получено в [17].

Пусть $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ — многочлен степени n, и пусть $H(p)$ — его высота, определённая как $H(p) = \max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ — алгебраическое число. Минимальным многочленом алгебраического числа α будем называть ненулевой многочлен p наименьшей степени $\deg(p)$ с целыми взаимно простыми коэффициентами, такой что $p(\alpha) = 0$. Для алгебраического числа α его степень $\deg(\alpha)$ и высоту $H(\alpha)$ определим как степень и высоту соответствующего минимального многочлена.

Запись $\#M$ обозначает число элементов конечного множества M. Длину промежутка I будем обозначать через $|I|$. Для обозначения асимптотических соотношений между функциями будем использовать символ Виноградова $\ll$: выражение $f \ll g$ означает, что $f \leqslant c\,g$, где c — абсолютная постоянная. Запись $f \asymp g$ используется для асимптотически эквивалентных функций, т.е. $g \ll f \ll g$. Обозначение $f \ll_{x_1,x_2,\ldots} g$ показывает, что неявные постоянные зависят только от величин $x_1, x_2, \ldots$. Асимптотическая эквивалентность $f \asymp_{x_1,x_2,\ldots} g$ определяется аналогично.

Дадим краткий обзор основных результатов по тематике статьи.

В 1971 году Х. Браун и К. Малер [2] обобщили понятие последовательностей Фарея: *последовательностью Фарея степени n и порядка Q* называется множество всех корней целочисленных многочленов степени n и высоты $\leqslant Q$. Множество фактов и историю исследования классических последовательностей Фарея можно найти в обзоре К. Кобели и А. Захареску [6].

В [14] дана схема доказательства того, что количество алгебраических чисел степени n с высотой не более Q (иными словами, элементов обобщённой последовательности Фарея степени n и порядка Q) на промежутке I задаётся асимптотической формулой

$$\frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)}\int_I \phi_n(t)\,dt + O\left(Q^n(\ln Q)^{\ell(n)}\right). \tag{1}$$

Здесь функция $\phi_n(t)$ определяется по формуле:

$$\phi_n(t) = \int\limits_{G_n(t)} \left| \sum_{k=1}^{n} k p_k t^{k-1} \right| dp_1 \dots dp_n, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где

$$G_n(t) = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |p_i| \leqslant 1, \ \left| \sum_{k=1}^{n} p_k t^k \right| \leqslant 1 \right\},$$

$\zeta(x)$ — дзета-функция Римана. В остаточном члене неявная постоянная символа $O(\cdot)$ зависит только от степени n, а показатель степени логарифма равен:

$$\ell(n) = \begin{cases} 1, & n \leqslant 2, \\ 0, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Полное доказательство (1) для второй степени было опубликовано в [16], а для произвольной — в [10]. В [17] было показано, что на самом деле для $n = 2$ при $|I| \to 0$ остаточный член в (1) имеет вид $O(|I| Q^2 \ln Q + Q^2)$.

Пусть $\mathcal{O}_n$ — множество целых алгебраических чисел степени n. Пусть $\Omega_n(Q, S)$ обозначает количество вещественных целых алгебраических чисел степени n с высотой не более Q, лежащих во множестве S:

$$\Omega_n(Q, S) := \# \left\{ \alpha \in \mathcal{O}_n \cap S : H(\alpha) \leqslant Q \right\}.$$

Отметим, что $\mathcal{O}_1 = \mathbb{N}$, т.е. целые алгебраические числа первой степени суть целые рациональные числа.

В [11] была доказана следующая теорема. Схему доказательства можно также найти в [15].

Теорема 1 ([11]). *Для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ верно равенство:*

$$\Omega_n(Q, I) = Q^n \int_I \omega_n(Q^{-1}, t)\, dt + O\Big(Q^{n-1} (\ln Q)^{\ell(n)}\Big), \tag{3}$$

функция $\omega_n(\xi, t)$ имеет вид:

$$\omega_n(\xi, t) = \int\limits_{D_n(\xi,t)} \left| n \xi t^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k p_k t^{k-1} \right| dp_1 \dots dp_{n-1}, \tag{4}$$

где $D_n(\xi, t) = \Big\{ (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |p_i| \leqslant 1, \ \left| \xi t^n + \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k \right| \leqslant 1 \Big\}$.

Неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от степени n. При этом существуют промежутки, для которых остаточный член в (3) имеет порядок не менее $O(Q^{n-1})$.

По существу, в [11] (см. также [15]) было показано, что алгебраические целые числа степени n и высоты не более Q при $Q \to \infty$ распределяются на вещественной оси почти как алгебраические числа степени $(n-1)$ для тех же высот.

Кроме того, в ряде работ, связанных с асимптотическим подсчётом алгебраических чисел α заданной степени n, для измерения «величины» алгебраических чисел используется мультипликативная высота Вейля $\mathcal{H}(\alpha)$, которая выражается через меру Малера как $\mathcal{H}(\alpha) = M(\alpha)^{1/n}$. В 2001 году Черн и Ваалер [5] доказали асимптотические оценки для количества целочисленных многочленов степени n с Малеровой мерой не более T, где $T \to \infty$.

Пусть $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q}, X)$ — множество алгебраических целых чисел α степени n над $\mathbb{Q}$ с высотою Вейля $\mathcal{H}(\alpha) \leqslant X$. Из [5] сразу получаем

$$\#\mathcal{O}_n(\mathbb{Q}, X) = c(n)X^{n^2} + O(X^{n^2-1}),$$

где $c(n)$ — явная положительная постоянная; в символе «O большое» неявная постоянная зависит только от n. Заметим, что здесь X имеет порядок $Q^{1/n}$, где Q — верхняя граница для соответствующих обычных высот. В 2013 году Барроеро [1] расширил эти результаты на произвольные базовые поля. Отметим, что эти результаты, использующие высоту Вейля, не перекрываются с [11] и [10].

Множество унитарных многочленов второй степени с целыми коэффициентами и высотой не больше Q обозначим как:

$$\mathcal{U}(Q) = \left\{p \in \mathbb{Z}[x] : \deg(p(x) - x^2) < 2,\ H(p) \leqslant Q\right\}.$$

Пусть $\mathcal{R}(Q)$ есть множество приводимых многочленов из $\mathcal{U}(Q)$.

В разделе 2 будет доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $Q \geqslant 4$ — целое число. Пусть $\widetilde{\mathcal{R}}(Q, I)$ есть множество многочленов из $\mathcal{R}(Q)$, учтённых столько раз, сколько у них различных корней на I. Тогда*

$$\#\widetilde{\mathcal{R}}(Q, I) = \#\left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x + y| \leqslant Q,\ |xy| \leqslant Q,\ x \in I\right\}. \tag{5}$$

А для $\#\mathcal{R}(Q)$ верна формула

$$\#\mathcal{R}(Q) = 2T(Q) + 2Q + \left[\sqrt{Q}\right] - 1, \tag{6}$$

где $T(Q) = \sum_{k=1}^{Q} \tau(k)$, а $\tau(k)$ — количество положительных делителей натурального числа k.

Теорема 2 позволяет уточнить остаток в (3) при $n = 2$. В результате теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 3. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — произвольный промежуток. Тогда верно равенство:*

$$\Omega_2(Q, I) = Q^2 \int\limits_I \omega_2(Q^{-1}, t)\, dt - 2Q \int\limits_{I \cap [-Q, Q]} \frac{dt}{\max(1, |x|)} + O(Q), \tag{7}$$

функция $\omega_n(\xi, t)$ имеет вид:

$$\omega_2(\xi, t) = \int\limits_{D_2(\xi, t)} |2\xi t + p_1|\, dp_1, \tag{8}$$

где $D_2(\xi, t) = \left\{p_1 \in \mathbb{R} : |p_1| \leqslant 1,\ |\xi t^2 + p_1 t| \leqslant 1\right\}$.

Неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ абсолютна. При этом существуют промежутки, для которых остаточный член в (7) имеет порядок не менее $O(Q)$.

Ниже, в разделе 3, мы выразим $\omega_2(\xi, t)$ через элементарные функции. Как можно будет заметить, при $\xi \to 0$ функция $\omega_2(\xi, t)$ равномерно для всех $t \in \mathbb{R}$ стремится к функции плотности распределения рациональных чисел $\phi_1(t)$, где

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\max(1, x^2)}.$$

Тем не менее, имеет место следующая теорема, которая также доказана в разделе 3.

Теорема 4. *При* $\xi \leqslant 1/4$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\omega_2(\xi,t)-\phi_1(t))\,dt = 4-\frac{16}{3}\sqrt{\xi}+O(\xi), \tag{9}$$

где неявная постоянная в символе «О большое» абсолютна.

Раздел 4 посвящён асимптотике количества алгебраических целых второй степени, в частности, там будет доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $Q \geqslant 4$ *— натуральное число. Количество вещественных квадратичных алгебраических целых высоты не более* Q *имеет асимптотику*

$$\Omega_2(Q,\mathbb{R}) = 8Q^2-\frac{16}{3}Q\sqrt{Q}-4Q\ln Q+8(1-\gamma)Q+O(\sqrt{Q}), \tag{10}$$

где неявная постоянная в символе «О большое» абсолютна.

В разделе 5 рассмотрено распределение комплексных алгебраических целых второй степени с ненулевой мнимой частью.

2. Доказательство теоремы 2 и её следствия

Очевидно, если целочисленный унитарный многочлен второй степени приводим над $\mathbb{Q}$, то его корни α,β суть целые рациональные числа. При этом высота такого многочлена будет равна $\max(1,|\alpha+\beta|,|\alpha\beta|)$. Таким образом, подсчёт приводимых унитарных многочленов второй степени сводится к подсчёту пар $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2$ с условием $\max(|\alpha+\beta|,|\alpha\beta|)\leqslant Q$. Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $Q \geqslant 4$. *Пусть*

$$S := \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : |x+y|\leqslant Q,\ |xy|\leqslant Q\},$$

и

$$S_0 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : \max(|x|,|y|)\leqslant Q,\ |xy|\leqslant Q\}.$$

Тогда $S\subset S_0$ *и*

$$S_0\setminus S = \{(\pm1,\pm Q),(\pm Q,\pm1)\}.$$

Доказательство. Множества S и S_0 симметричны относительно прямых $y=x$ и $y=-x$. Поэтому достаточно рассматривать такие (x,y), что $x\geqslant|y|$.

Пусть $S_1 = \{(x,y)\in S_0\setminus S : x\geqslant|y|\}$. Пусть (x_1,y_1) есть решение системы

$$\begin{cases} x+y=Q,\\ xy=Q,\\ x\geqslant|y|. \end{cases}$$

Тогда

$$S_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x_1<x\leqslant Q,\ Q-x<y\leqslant Q/x\right\}\subset(x_1,Q]\times(0,y_1),$$

где $x_1=\frac{1}{2}(Q+\sqrt{Q^2-4Q})$. При $Q\geqslant4$ справедливо неравенство

$$y_1 = Q-x_1 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{4}{Q}}}\leqslant 2.$$

Поэтому в S_1 может быть не более двух целых точек: $(Q-1,1)$ и $(Q,1)$. Несложно проверить, что $S_1=\{(Q,1)\}$.

Пусть $S_2=\{(x,y)\in S\setminus S_0 : x\geqslant |y|\}$, и (x_2,y_2) есть решение системы

$$\begin{cases} x+y=Q,\\ xy=-Q,\\ x\geqslant |y|. \end{cases}$$

Тогда

$$S_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : Q<x\leqslant x_2,\ -Q/x\leqslant y\leqslant Q-x\right\}\subset (Q,x_2]\times(-1,0),$$

где $x_2=\frac{1}{2}(Q+\sqrt{Q^2+4Q})$. Очевидно, $S_2=\varnothing$.

В силу симметрий множеств S и S_0 получаем, что S_0 состоит из всех точек множества S и ещё четырёх точек: $(Q,1)$, $(1,Q)$, $(-Q,-1)$, $(-1,-Q)$. □

Любому многочлену из $\mathcal{R}(Q)$ с единственным корнем (возможно кратным) на I соответствует единственная точка из

$$S(Q,I)=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : |x+y|\leqslant Q,\ |xy|\leqslant Q,\ x\in I\right\},$$

и наоборот. Любому многочлену из $\mathcal{R}(Q)$ с корнями $\alpha,\beta\in I$ $(\alpha\neq\beta)$ соответствует ровно две точки из $S(Q,I)$: (α,β) и (β,α). Таким образом, верно (5).

Докажем (6). Несложно видеть, что

$$\#\mathcal{R}(Q)=\#\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x\geqslant y,\ |x+y|\leqslant Q,\ |xy|\leqslant Q\}=\frac{1}{2}\left(\#S+2\left[\sqrt{Q}\right]+1\right).$$

Из леммы 1 имеем $\#S=\#S_0-4$. При этом $\#S_0=4T(Q)+4Q+1$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1.

$$\#\widetilde{\mathcal{R}}(Q,I)=2Q\int\limits_{I\cap[-Q,Q]}\frac{dt}{\max(1,|t|)}+O\left(Q\right), \tag{11}$$

где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ абсолютна.

Доказательство. Оценивая количество целых точек в плоской области как её площадь (погрешность имеет порядок общей длины проекций границ области на координатные оси [7]), получаем утверждение следствия. □

Замечание. Поскольку остаток в (7) нельзя оценить лучше чем $O(Q)$ для отрезков общего вида, оценки (11) вполне достаточно для (7). Таким образом, теорема 3 доказана.

Теорема 2 сводит вычисление $\#\mathcal{R}(Q)$ к проблеме делителей Дирихле. Обозначая остаточный член через $\Delta(x)$, имеем

$$T(x)=x\ln x+(2\gamma-1)x+\Delta(x),$$

где γ — постоянная Эйлера, равная

$$\gamma:=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\ln N\right)=0{,}5772\ldots.$$

Харди показал [8], что существует постоянная K такая, что для каждого из неравенств $\Delta(x)>Kx^{1/4}$ и $\Delta(x)<-Kx^{1/4}$ существует бесконечно много значений x, для которых оно выполняется. Наилучшая известная оценка $|\Delta(x)|$ сверху (на январь 2016 года) принадлежит Хаксли [9], доказавшему, что

$$\Delta(x) = O\Big(x^{\frac{131}{416}}(\ln x)^{\frac{26947}{8320}}\Big).$$

Краткий обзор последовательных усилений верхней оценки можно найти в [12, §2.5].

Для нашей статьи достаточно оценки Вороного [13] (см. также [3, Chapter VIII]):

$$\Delta(x) = O\Big(x^{1/3}\ln x\Big).$$

Следствие 2. *Пусть $Q \geqslant 4$ — целое число. Тогда*

$$\#\mathcal{R}(Q) = 2Q\ln Q + 4\gamma Q + Q^{1/2} + O(Q^{1/3}\ln Q).$$

Отметим, что в работе [4] приведено соотношение

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{\#\mathcal{R}(Q)}{2Q\ln Q} = 1.$$

Однако для доказательства теоремы 5 нужно больше информации об асимптотике.

3. Вычисление функции плотности

Выразим функцию плотности квадратичных алгебраических целых через элементарные функции.

Теорема 6. *При $\xi \leqslant 1/4$,*

$$\omega_2(\xi,t) = \begin{cases} 1+4\xi t^2, & |t| \leqslant t_1,\\ \frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}+\xi(1-2|t|)+\frac{5}{2}\xi^2t^2, & t_1 < |t| \leqslant t_2,\\ \frac{1}{t^2}+\xi^2t^2, & t_2 < |t| \leqslant t_3,\\ 2\xi, & t_3 < |t| \leqslant t_4,\\ \frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}+\xi(1+2|t|)-\frac{3}{2}\xi^2t^2, & t_4 < |t| \leqslant t_5,\\ 0, & |t| > t_5, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$t_1 = t_1(\xi) = \frac{-1+\sqrt{1+4\xi}}{2\xi}, \quad t_2 = t_2(\xi) = \frac{1-\sqrt{1-4\xi}}{2\xi}, \quad t_3 = t_3(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}},$$
$$t_4 = t_4(\xi) = \frac{1+\sqrt{1-4\xi}}{2\xi}, \quad t_5 = t_5(\xi) = \frac{1+\sqrt{1+4\xi}}{2\xi}.$$

Доказательство. В доказательстве, без потери общности, будем полагать $t \geqslant 0$. Функция $\omega_2(\xi,t)$ задаётся интегралом (8) по области $D_2(\xi,t)$, которая является пересечением отрезков

$$\frac{-1-\xi t^2}{t} \leqslant p_1 \leqslant \frac{1-\xi t^2}{t}, \tag{13}$$
$$-1 \leqslant p_1 \leqslant 1. \tag{14}$$

Сравнивая границы отрезков (13) и (14), получаем, что

- при $t \in (0,t_2)\cup(t_4,+\infty)$ левая граница (14) больше чем левая граница (13);

- при $t \in (0, t_1)$ правая граница (14) меньше чем правая граница (13);
- при $t \in [t_5, +\infty)$ множество $D_2(\xi, t)$ пусто.

Собирая вместе эти три случая, получаем

$$D_2(\xi,t) = \begin{cases} [-1,1], & |t| \leqslant t_1, \\ \left[-1, \frac{1-\xi t^2}{t}\right], & t_1 < |t| \leqslant t_2, \\ \left[\frac{-1-\xi t^2}{t}, \frac{1-\xi t^2}{t}\right], & t_2 < |t| \leqslant t_4, \\ \left[-1, \frac{1-\xi t^2}{t}\right], & t_4 < |t| \leqslant t_5, \\ \varnothing, & |t| > t_5. \end{cases} \tag{15}$$

Вычислим интеграл (8), воспользовавшись равенством $\int |x|\,dx = \frac{1}{2}x|x|$.

а) При $t \in [0, t_1]$

$$\omega_2(\xi,t) = \frac{1}{2}\left((2\xi t+1)|2\xi t+1| - (2\xi t-1)|2\xi t-1|\right) = 1 + 4\xi^2 t^2.$$

б) При $t \in (t_1, t_2]$

$$\omega_2(\xi,t) = \frac{1}{2}\left(\left(\xi t + \frac{1}{t}\right)\left|\xi t + \frac{1}{t}\right| - (2\xi t-1)|2\xi t-1|\right) = \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} + \xi(1-2t) + \frac{5}{2}\xi^2 t^2.$$

в) При $t \in (t_2, t_4]$

$$\omega_2(\xi,t) = \frac{1}{2}\left(\left(\xi t + \frac{1}{t}\right)\left|\xi t + \frac{1}{t}\right| - \left(\xi t - \frac{1}{t}\right)\left|\xi t - \frac{1}{t}\right|\right).$$

Если $t \leqslant t_3$, тогда $\omega_2(\xi,t) = \frac{1}{t^2} + \xi^2 t^2$, иначе $\omega_2(\xi,t) = 2\xi$.

г) При $t \in (t_4, t_5]$

$$\omega_2(\xi,t) = \frac{1}{2}\left(\left(\xi t + \frac{1}{t}\right)\left|\xi t + \frac{1}{t}\right| - (2\xi t-1)|2\xi t-1|\right) = \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2} + \xi(1+2t) - \frac{3}{2}\xi^2 t^2.$$

д) При $t \in (t_5, +\infty)$ имеем $\omega_2(\xi,t) = 0$. □

Докажем теорему 4.

Поскольку $t_2 - t_1 = O(\xi)$ и $t_1 < 1 < t_2$, и вариация $\omega_2(\xi,t)$ имеет порядок $O(\xi)$ при $t \in [t_1, t_2]$, имеем

$$\int_0^1 \omega_2(\xi,t)\,dt = 1 + \frac{4}{3}\xi^2 + O(\xi^2) = 1 + O(\xi^2),$$

$$\int_1^{1/\sqrt{\xi}} \omega_2(\xi,t)\,dt = \left(-\frac{1}{t} + \frac{\xi^2}{3}t^3\right)\Big|_1^{1/\sqrt{\xi}} + O(\xi^2) = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{\xi} + O(\xi^2).$$

Поскольку $t_5 - t_4 = O(1)$ и $t_4 < 1/\xi < t_5$, и вариация $\omega_2(\xi,t)$ имеет порядок $O(\xi)$ при $t \in [t_4, t_5]$, получаем

$$\int_{1/\sqrt{\xi}}^{1/\xi} \omega_2(\xi,t)\,dt = 2\xi\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right) + O(\xi) = 2 - 2\sqrt{\xi} + O(\xi),$$

$$\int_{1/\xi}^{+\infty} \omega_2(\xi,t)\,dt = O(\xi).$$

Наконец, имеем

$$\int_0^{+\infty} \omega_2(\xi,t)\,dt = 4 - \frac{8}{3}\sqrt{\xi} + O(\xi).$$

Учитывая $\int_0^{+\infty} \phi_1(t)\,dt = 2$, получаем утверждение теоремы 4.

4. О количестве квадратичных целых

Теорема 7. *Пусть $Q \geqslant 4$ — натуральное число. Пусть $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q)$ есть множество многочленов из $\mathcal{U}(Q)$, не имеющих действительных корней. Тогда*

$$\#\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q) = \frac{8}{3}Q\sqrt{Q} + \left(\frac{1}{3} + \delta - \delta^2\right)\sqrt{Q} + r, \tag{16}$$

где

$$\delta = \left\{2\sqrt{Q}\right\}, \qquad r = \frac{1}{12}(1-2\delta)(\delta-\delta^2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left\{\sqrt{Q} + \frac{1}{2}\right\}.$$

При этом

$$|r| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{72\sqrt{3}} \approx 0{,}25802.$$

Доказательство. Количество квадратичных целочисленных унитарных многочленов высоты не более Q, не имеющих действительных корней, равно числу целых точек в области

$$\#\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q) = \#\left\{(b,c) \in \mathbb{Z}^2 : \frac{b^2}{4} < c \leqslant Q\right\}.$$

Рассматривая целые точки в прямоугольнике $\left\{(b,c) \in \mathbb{R}^2 : |b| \leqslant 2\sqrt{Q},\ 0 < c \leqslant Q\right\}$, несложно заметить, что

$$\#\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q) = Q(2M+1) - 2\sum_{b=1}^{M}\left[\frac{b^2}{4}\right],$$

где $M := \left[2\sqrt{Q}\right]$. Преобразуем сумму

$$S = \sum_{b=1}^{M}\left[\frac{b^2}{4}\right] = \sum_{b=1}^{M}\frac{b^2}{4} - \sum_{b=1}^{M}\left\{\frac{b^2}{4}\right\}.$$

Первую сумму вычисляем, используя формулу $\sum_{k=1}^{M} k^2 = \frac{1}{6}M(M+1)(2M+1)$. Во второй сумме заметим, что

$$\left\{\frac{b^2}{4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & b = 2k-1, \\ 0, & b = 2k. \end{cases}$$

В итоге

$$\sum_{b=1}^{M}\left\{\frac{b^2}{4}\right\} = \frac{1}{4}\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{M+1}{2}} 1 = \frac{1}{4}\left[\frac{M+1}{2}\right].$$

Для суммы S получаем

$$S = \frac{1}{24}M(M+1)(2M+1) - \frac{1}{4}\left[\frac{M+1}{2}\right].$$

Таким образом, искомое число многочленов равно

$$\#\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q) = Q(2M+1) - \frac{1}{12}M(M+1)(2M+1) + \frac{1}{2}\left[\frac{M+1}{2}\right].$$

Учитывая $M = 2\sqrt{Q} - \delta$, упростим данное выражение.

$$\begin{aligned}(2M+1)(12Q - M(M+1)) &= (4\sqrt{Q} - 2\delta + 1)(8Q + 2\sqrt{Q}(2\delta - 1) + \delta - \delta^2) = \\ &= 32Q\sqrt{Q} - 2\sqrt{Q} + (12\sqrt{Q} + 1 - 2\delta)(\delta - \delta^2).\end{aligned}$$

Преобразуем $\left[\frac{M+1}{2}\right]$ с учётом $M=[2\sqrt{Q}]$. Имеем

$$\left[\frac{x}{2}\right]=\left[\frac{[x]+\{x\}}{2}\right]=\left[\left[\frac{[x]}{2}\right]+\left\{\frac{[x]}{2}\right\}+\frac{\{x\}}{2}\right]=\left[\frac{[x]}{2}\right],$$

поскольку $0\leqslant\left\{\frac{[x]}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{2}$ и $0\leqslant\frac{\{x\}}{2}<\frac{1}{2}$. Отсюда

$$\left[\frac{[x]+1}{2}\right]=\left[\frac{[x+1]}{2}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right],$$

и

$$\left[\frac{M+1}{2}\right]=\left[\sqrt{Q}+\frac{1}{2}\right]=\sqrt{Q}+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{Q}+\frac{1}{2}\right\}\right).$$

Формула (16) доказана.

Оценим величину

$$r=\frac{1}{12}(1-2\delta)(\delta-\delta^2)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{Q}+\frac{1}{2}\right\}.$$

Чтобы найти максимум и минимум выражения $(1-2\delta)\delta(1-\delta)$ при $0\leqslant\delta\leqslant 1$, сделаем замену $\delta=(t+1)/2$, где $|t|\leqslant 1$. Получим функцию

$$f(t)=\frac{1}{4}(t^3-t).$$

Имеем

$$\max_{|t|\leqslant 1}f(t)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{6\sqrt{3}},\qquad \min_{|t|\leqslant 1}f(t)=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

При этом

$$-\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{Q}+\frac{1}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{4}.$$

Утверждение доказано. □

Теперь докажем теорему 5. Пусть $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(Q)$ обозначает множество неприводимых многочленов из $\mathcal{U}(Q)$, у которых корни вещественны. Очевидно

$$\Omega_2(Q,\mathbb{R})=2\,\#\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(Q).$$

Поскольку многочлены из $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q)$ неприводимы над $\mathbb{Q}$, верно равенство

$$\#\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(Q)=\#\mathcal{U}(Q)-\#\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(Q)-\#\mathcal{R}(Q).$$

Из следствия 2, теоремы 7 и равенства $\#\mathcal{U}(Q)=(2Q+1)^2$ получаем

$$\#\mathcal{U}_{\mathbb{R}}(Q)=4Q^2-\frac{8}{3}Q\sqrt{Q}-2Q\ln Q+4(1-\gamma)Q-\left(\frac{4}{3}+\delta-\delta^2\right)\sqrt{Q}+O(Q^{1/3}\ln Q),$$

где $\delta=\{2\sqrt{Q}\}$.

Теорема 5 доказана.

5. О комплексных квадратичных целых

В данном разделе мы описываем расположение комплексных целых алгебраических чисел второй степени. Их распределение приобретает дополнительный интерес с учётом того, что в общем случае целые алгебраические числа степени n при стремлении их высот к бесконечности распределяются примерно так же, как алгебраические числа степени $n-1$. При этом комплексных рациональных чисел не существует. Отсюда естественный вопрос: как распределены комплексные целые алгебраические числа второй степени? Из теоремы 7 видно, что их в целом немного.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $p(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ не имеет вещественных корней. Пусть $M(p)$ — мера Малера многочлена p:*

$$M(p) = \max(1, |z_1|) \max(1, |z_2|),$$

где z_1, z_2 — корни многочлена p. Тогда

$$H(p) = M(p) = c.$$

Доказательство. Для многочлена p справедливо условие отрицательности дискриминанта:

$$b^2 - 4c < 0.$$

Отсюда имеем $|b| < 2\sqrt{c}$. При $c \geqslant 5$ очевидно $|b| < c$. Легко проверить, что и для $c = 1, 2, 3, 4$ из неравенства $|b| < 2\sqrt{c}$ следует $|b| \leqslant c$. Таким образом,

$$H(p) = \max(1, |b|, |c|) = c.$$

Поскольку $|z_1| = |z_2|$, для меры Малера имеем

$$M(p) = \max(1, |z_1|^2) = \max(1, c) = c.$$

Заметим, что $c > 0$. В противном случае у многочлена были бы вещественные корни. □

Теорема 8. *Невещественные квадратичные алгебраические целые высоты H суть точки пересечения окружности $|z| = \sqrt{H}$ и прямых $\operatorname{Re} z = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, и имеют вид*

$$\frac{k \pm i\sqrt{4H - k}}{2}, \qquad |k| < 2\sqrt{H}.$$

Доказательство. Любой унитарный квадратичный многочлен с вещественными коэффициентами и комплексными корнями можно записать в виде:

$$x^2 - (2 \operatorname{Re} z)\, x + |z|^2,$$

где z — любой из двух корней многочлена.

По лемме 2 имеем $H = |z|^2$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

6. Заключение

В данной работе мы посчитали асимптотическое количество приводимых унитарных многочленов второй степени с целыми коэффициентами. Пользуясь данной асимптотикой мы вычислили количество целых алгебраических чисел второй степени и уточнили остаточный член в формуле их распределения на вещественной оси. При этом было показано, что дальнейшее его уточнение невозможно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barroero F. Counting algebraic integers of fixed degree and bounded height // Monatshefte für Mathematik. 2014. Vol. 175, No. 1. P 25–41.

2. Brown H., and Mahler K. A generalization of Farey sequences: Some exploration via the computer // J. Number Theory. 1971. Vol. 3, No. 3. P. 364–370.

3. Chandrasekharan K. Arithmetical functions, volume 167 of Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1970.

4. Chela R. Reducible polynomials // J. London Math. Soc. 1963. Vol. 38, No. 1. P. 183–188.

5. Chern S.-J., and Vaaler J. D. The distribution of values of Mahler's measure // J. Reine Angew. Math. 2001. Vol. 540. P. 1–47.

6. Cobeli C., and Zaharescu A. The Haros-Farey sequence at two hundred years // Acta Univ. Apulensis Math. Inform. 2003. Vol. 5. P. 1–38.

7. Davenport H. On a principle of Lipschitz // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 179–183. Davenport H. Corrigendum: "On a principle of Lipschitz" // J. London Math. Soc. 1964. Vol. 39. P. 580.

8. Hardy G. H. On Dirichlet's divisor problem // Proc. London Math. Soc. (2). 1916. Vol. 15. P. 1–25.

9. Huxley M. N. Exponential sums and lattice points. III // Proc. London Math. Soc. (3). 2003. Vol. 87, No. 3. P. 591–609.

10. Koleda D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // arXiv preprint. 2014. arXiv:1405.1627.

11. Koleda D. V. The distribution of algebraic integers of given degree on the real line // arXiv preprint. 2014. arXiv:1407.2861.

12. Montgomery H. L., and Vaughan R. C. Multiplicative number theory. I. Classical theory, volume 97 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

13. Voronoï G. Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1904. Vol. 21. P. 207–267, 459–533.

14. Каляда Д. У. Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені // Доклады НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 3. С. 28–33.

15. Каляда Д. У. Размеркаванне цэлых алгебраічных лікаў дадзенай ступені на рэчаіснай прамой // Доклады НАН Беларуси. 2015. Т. 59, № 1. С. 18–22.

16. Коледа Д. В. Распределение алгебраических чисел второй степени // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 54–63.

17. Коледа Д. В. Об асимптотике распределения алгебраических чисел при возрастании их высот // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 1. С. 191–204.

REFERENCES

1. Barroero, F. (2014). "Counting algebraic integers of fixed degree and bounded height", *Monatshefte für Mathematik*, vol. 175, no. 1, pp. 25–41.
2. Brown, H. & Mahler, K. (1971). "A generalization of Farey sequences: Some exploration via the computer", *J. Number Theory*, vol. 3, no. 3, pp. 364–370.
3. Chandrasekharan, K. (1970). "Arithmetical functions", vol. 167 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
4. Chela, R. (1963). "Reducible polynomials", *J. London Math. Soc.*, vol. 38, no. 1, pp. 183–188.
5. Chern, S.-J. & Vaaler, J. D. (2001). "The distribution of values of Mahler's measure", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 540, pp. 1–47.
6. Cobeli, C. & Zaharescu, A. (2003). "The Haros-Farey sequence at two hundred years", *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, vol. 5, pp. 1–38.
7. Davenport, H. (1951). "On a principle of Lipschitz", *J. London Math. Soc*, vol. 26, pp. 179–183. Davenport, H. (1964). Corrigendum: "On a principle of Lipschitz", *J. London Math. Soc.*, vol. 39, p. 580.
8. Hardy, G. H. (1916). "On Dirichlet's divisor problem", *Proc. London Math. Soc. (2)*, vol. 15, pp. 1–25.
9. Huxley, M. N. (2003). "Exponential sums and lattice points. III", *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 87, no. 3, pp. 591–609.
10. Koleda, D. V. (2014a). "On the density function of the distribution of real algebraic numbers", *arXiv preprint*, arXiv:1405.1627.
11. Koleda, D. V. (2014b). "The distribution of algebraic integers of given degree on the real line", *arXiv preprint*, arXiv:1407.2861.
12. Montgomery, H. L. & Vaughan, R. C. (2007). "Multiplicative number theory. I. Classical theory", vol. 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
13. Voronoï, G. (1904). "Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, vol. 21, pp. 207–267 & 459–533.
14. Kaliada, D. U. (2012). "Distribution of real algebraic numbers of a given degree", *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 56, no. 3, pp. 28–33. (In Belarusian.)
15. Kaliada, D. U. (2015). "Distribution of algebraic integers of a given degree in the real line", *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 59, no. 1, pp. 18–22. (In Belarusian.)
16. Koleda, D. V. (2013). "Distribution of real algebraic numbers of the second degree", *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, no. 3, pp. 54–63. (In Russian.)
17. Koleda, D. V. (2015). "On the asymptotic distribution of algebraic numbers with growing naive height", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1, pp. 191–204. (In Russian.)

Институт математики НАН Беларуси (г. Минск, Беларусь)
Получено 18.12.2015 г.
Принято в печать 11.03.2016 г.