

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Журавлев, Горизонтально-выпуклые полиамонды и их производящие функции,  
*Матем. просв.*, 2013, выпуск 17, 107–129

<https://www.mathnet.ru/mp273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

19 мая 2025 г., 11:59:24



# Горизонтально-выпуклые полиамонды и их производящие функции

В. М. Журавлев

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В литературе по комбинаторной геометрии хорошо известны фигуры, составленные из одинаковых квадратов — полимино, из одинаковых правильных треугольников — полиамонды и из одинаковых правильных шестиугольников — полигексы (см., например, [1]). Фигуры должны быть связными и каждый правильный многоугольник с длиной стороны 1 должен иметь общую сторону с каким-нибудь другим правильным многоугольником с длиной стороны 1. Более того, в упомянутой книге С. Голломб отмечает, что поставленная на любую клетку полимино ладья может за конечное число ходов перейти на любую другую клетку того же полимино. Таким образом, для определения полимино обычной геометрической связности составленной фигуры недостаточно. Термин «ход ладьи» не является общепринятым для случая фигур, составленных из правильных треугольников и шестиугольников. Чтобы выйти из этой ситуации, мы можем каждой такой фигуре сопоставить граф. Каждому правильно-многоугольнику с длиной стороны 1 будет соответствовать вершина графа. Если два таких многоугольника имеют общую сторону, то соединим соответствующие им вершины ребром. Теперь требование связности составленной фигуры мы можем заменить требованием связности соответствующего этой фигуре графа.

Обычно эти фигуры рассматривают на соответствующих решётках: квадратной, треугольной и шестиугольной. Поэтому такие фигуры часто называют решётчатыми монстрами<sup>1)</sup>. Различные типы решётчатых монстров можно получить, если рассматривать различные группы движений плоскости. *Трансляционный* тип полимино (полиамондов, полигексов) получается, если мы считаем одинаковыми фигуры, совпадающие при параллельном переносе. Например, на рис. 1 показаны все трансляционные 1-амонды и 3-амонды. *Вращательный (ротационный)* тип возникает, если считать одинаковыми любые два монстра, эквивалентные относительно

<sup>1)</sup> Англ. "lattice animals".

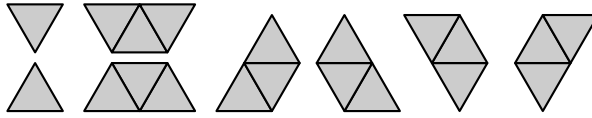


Рис. 1.

группы собственных движений плоскости — поворотов и параллельных переносов. *Изометрический* тип возникает, если считать одинаковыми (эквивалентными) любые два конгруэнтных монстра.

Трансляционное полимино называют *выпуклым по рядам* (соответственно *выпуклым по столбцам*), если пересечение любой горизонтальной (вертикальной) прямой с полимино, либо пусто, либо состоит только из одного отрезка. Иногда такие полимино называют горизонтально-выпуклыми (вертикально-выпуклыми) или «штабельными» полимино. *Выпуклыми* называют полимино, которые одновременно являются выпуклыми по рядам и выпуклыми по столбцам. Отметим, что выпуклое полимино не обязано быть выпуклой геометрической фигурой.

Пусть  $s_n$  обозначает количество различных выпуклых по рядам  $n$ -мино (полимино состоящих из  $n$  единичных квадратов). Нетрудно вычислить начальные члены этой последовательности  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 6$ ,  $s_4 = 19$ ,  $s_5 = 61$ . Известно, что эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению третьего порядка

$$s_n = 5s_{n-1} - 7s_{n-2} + 4s_{n-3}, \quad \text{для } n \geq 5.$$

Производящей функцией для последовательности будет рациональная функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1-5x+7x^2-4x^3}.$$

Эти результаты были получены Д. Кларнером в [8] с помощью комбинаторной интерпретации интеграла Фредгольма. Там же в [8] ему удалось вычислить производящую функцию для количества выпуклых по рядам полигексов

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1-6x+10x^2-7x^3+x^4}.$$

Как следствие, последовательность для количества выпуклых по рядам полигексов будет удовлетворять рекуррентному соотношению четвертого порядка

$$f_n = 6f_{n-1} - 10f_{n-2} + 7f_{n-3} - f_{n-4}, \quad \text{для } n \geq 5.$$

Начальные члены этой последовательности таковы:  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 3$ ,  $f_3 = 11$ ,  $f_4 = 42$ .

По каким-то причинам в упоминавшейся работе [8] Д. Кларнер не нашёл производящую функцию для полиамондов, хотя и получил оценку снизу для их количества.

Кроме производящих функций, соответствующих площади полимино, также рассматриваются другие виды производящих функций, в частности, производящие функции, соответствующие периметру полимино, или производящие функции нескольких переменных. Так М. Деле [5] нашёл рациональную производящую функцию двух переменных для количества выпуклых по рядам  $n$ -мино с  $m$  столбцами и алгебраическую производящую функцию для количества выпуклых по рядам полимино с периметром  $2n + 2$ .

Для количества выпуклых  $n$ -мино получены асимптотические оценки см. [4, 9] (начальные члены последовательности для их количества таковы: 1, 2, 6, 19, 59, ...). В то же время М. Деле и Ж. Вьенно [6] нашли точную формулу для количества выпуклых полимино  $p_{2n}$  с периметром  $2n$ :

$$p_{2n+8} = (2n + 11) \cdot 4^n - 4(2n + 1) \binom{2n}{n}.$$

Асимптотические оценки для общего количества полигексов и полиамондов получены в работе [10].

По аналогии мы можем определить горизонтально-выпуклые полиамонды (полигексы). Поскольку для треугольной и шестиугольной решётки у нас имеется три основных направления 0 (горизонтальное),  $\pi/3$  и  $2\pi/3$ , то для определения выпуклых полиамондов (полигексов) мы должны потребовать выполнения выпуклости по всем трём основным направлениям. В то же время, мы можем рассматривать полиамонды (полигексы) выпуклые по двум направлениям.

Публикации, связанные с изучением полиамондов, встречаются гораздо реже, чем публикации связанные с полимино. Мы хотим сократить этот разрыв, и поэтому в этой статье мы будем рассматривать горизонтально-выпуклые полиамонды. Мы не будем затрагивать проблем, связанных с выпуклыми полиамондами, поскольку это тема для отдельного исследования.

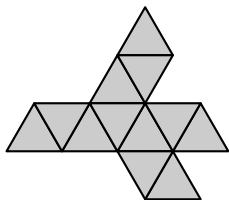
Что касается горизонтально-выпуклых полиамондов, то нам удалось вычислить несколько рациональных производящих функций для их количества, при этом мы использовали комбинаторные методы, описанные в [2]. В результате оказалось, что последовательность для количества горизонтально-выпуклых полиамондов удовлетворяет рекуррентному соотношению седьмого порядка. Кроме того, под впечатлением работы [7], мы нашли другое доказательство рекуррентного соотношения, использующее

элементарные выкладки. Это доказательство доступно для понимания подготовленным учащимся старших классов.

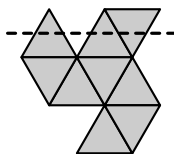
## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Во множестве трансляционных полиамондов мы рассмотрим подмножество горизонтально-выпуклых полиамондов. В дальнейшем мы будем опускать упоминание трансляционного типа и говорить просто «полиамонды».

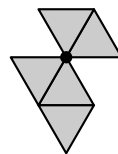
Горизонтально-выпуклыми мы называем такие полиамонды, что любая горизонтальная прямая либо не пересекает полиамонд, либо пересекает его по отрезку или точке. На рис. 2а) приведён пример горизонтально-выпуклого полиамонда, заметим, что этот полиамонд не является выпуклым по направлениям  $\pi/3$  и  $2\pi/3$ . На рис. 2б) приведён пример полиамонда **не** являющегося горизонтально-выпуклым, поскольку существует горизонтальная прямая, которая пересекает его по двум отрезкам. На рис. 2с) приведён пример связной фигуры, которая не является полиамондом.



а) горизонтально-выпуклый полиамонд



б) не горизонтально-выпуклый полиамонд



с) связная фигура, не являющаяся полиамондом

Рис. 2.

Мы отмечали, что имеется только два 1-амонда (рис. 1), они являются горизонтально-выпуклыми. Единичный правильный треугольник, расположенный остриём вверх, мы будем обозначать через  $\Delta$ , а единичный правильный треугольник, расположенный остриём вниз, мы будем обозначать через  $\nabla$ . Понятно, что любой полиамонд состоит из единичных треугольников  $\nabla$  и  $\Delta$ .

Определим множества горизонтально-выпуклых полиамондов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $D^*$  в зависимости от формы их верхней строки (рис. 3):

а) если верхняя строка полиамонда состоит только из одного треугольника  $\Delta$ , то отнесём его к множеству  $A$  (в частности к  $A$  относится треугольник  $\Delta$ );

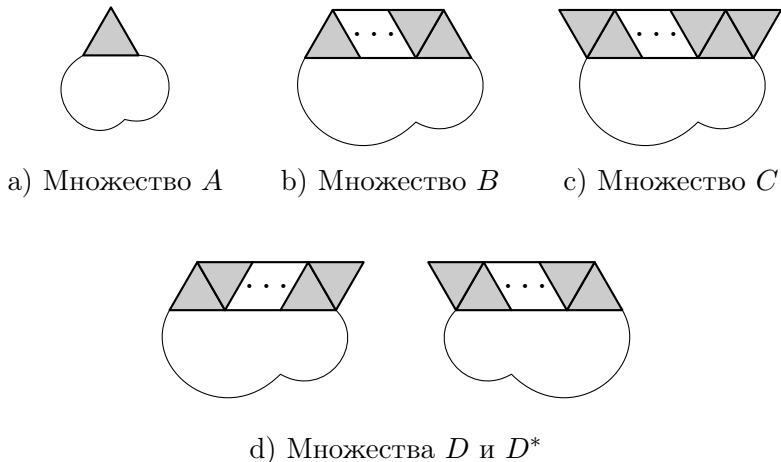


Рис. 3.

b) если верхняя строка полиамонда является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой длиннее верхнего, то отнесём его к множеству  $B$ ;

c) если верхняя строка является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой короче верхнего, то отнесём его к множеству  $C$ ; для удобства дальнейших вычислений треугольник  $\nabla$  также отнесём к множеству  $C$ ;

d) если верхняя строка полиамонда является параллелограммом с крайним правым треугольником  $\nabla$  либо треугольником  $\Delta$ , то отнесём его к множеству  $D$  либо к множеству  $D^*$  соответственно.

К множеству  $H$  отнесём полиамонды, у которых в верхней строке находится не менее двух треугольников, т. е. множество  $H$  является объединением множеств  $B, C, D$  и  $D^*$ .

Множество  $G$  будет состоять из всех горизонтально-выпуклых полиамондов, т. е. множество  $G$  является объединением множеств  $A$  и  $H$ .

Через  $A_n, B_n, C_n, D_n, D_n^*, H_n, G_n$  обозначим подмножества множеств  $A, B, C, D, D^*, H, G$ , в которых полиамонды состоят из  $n$  правильных треугольников с длиной стороны 1 ( $n$ -амондов). Количество элементов в соответствующих подмножествах обозначим через  $a_n, b_n, c_n, d_n, d_n^*, h_n, g_n$ .

Исходя из соображений симметрии, мы можем заключить, что полиамондов в множестве  $D_n$  ровно столько же, сколько полиамондов в множестве  $D_n^*$ . Следовательно, для любого  $n$  выполнено  $d_n = d_n^*$ .

Тогда из наших определений следует что

$$h_n = b_n + c_n + d_n + d_n^* = b_n + c_n + 2d_n, \tag{2.1}$$

$$g_n = a_n + b_n + c_n + d_n + d_n^* = a_n + h_n. \quad (2.2)$$

В дальнейшем мы хотим использовать и изучить детализацию полиамондов по количеству составляющих их треугольников  $\Delta$  и  $\nabla$ . Более того, для нас будет важно, сколько треугольников вида  $\nabla$  расположено в самой верхней строке полиамонда. Исходя из этих соображений, обозначим через  $a(p, q, m)$ ,  $b(p, q, m)$ ,  $c(p, q, m)$ ,  $d(p, q, m)$ ,  $d^*(p, q, m)$ ,  $h(p, q, m)$  и  $g(p, q, m)$  количество полиамондов принадлежащих подмножествам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $D^*$ ,  $H$ ,  $G$  соответственно, которые состоят из  $p$  треугольников  $\nabla$ ,  $q$  треугольников  $\Delta$  и верхняя строка которых содержит  $m$  треугольников  $\nabla$ .

Поскольку у полиамондов из множества  $A$  верхняя строка состоит только из одного треугольника  $\Delta$ , то  $a(p, q, m) = 0$  при  $m \geq 1$ .

Применяя соображения симметрии, получаем  $d(p, q, m) = d^*(p, q, m)$ .

Мы можем записать равенства аналогичные полученным ранее

$$h(p, q, m) = b(p, q, m) + c(p, q, m) + 2d(p, q, m), \quad (2.3)$$

$$g(p, q, m) = a(p, q, m) + h(p, q, m). \quad (2.4)$$

Мы сделали хорошую подготовительную работу. И все же, прежде чем переходить к производящим функциям, мы хотим предложить вывод рекуррентного соотношения, использующий элементарные выкладки.

### 3. РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Структура предлагаемого доказательства представляет собой ряд лемм. Каждая лемма связывает рекуррентным соотношением последовательности количества полиамондов в определённых подмножествах. Фактически каждая лемма устанавливает взаимно однозначное соответствие между несколькими подмножествами полиамондов. В итоге мы получаем систему рекуррентных соотношений между последовательностями. Вывод итогового соотношения представляет собой техническое упражнение над полученными промежуточными соотношениями.

**ТЕОРЕМА 1.** *Для  $n \geq 8$  выполняется рекуррентная формула:*

$$g_n = 3g_{n-1} - 4g_{n-2} + g_{n-4} + g_{n-5} + 3g_{n-6} - g_{n-7}. \quad (3.1)$$

Прежде чем приступать к доказательству теоремы 1 сформулируем и докажем небольшие леммы.

**ЛЕММА 1.** *Для  $n \geq 2$  выполняется соотношение*

$$c_n = g_{n-1}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если мы добавим треугольник  $\nabla$  слева в верхнюю строку горизонтально-выпуклого  $(n - 1)$ -амонда из множества  $D_{n-1}$ , то

получим горизонтально-выпуклый  $n$ -амонд из  $C_n$ . Эта процедура обратима, и из каждого горизонтально-выпуклого  $n$ -амонда из  $C_n$ , удаляя левый треугольник из верхней строки, мы получим горизонтально-выпуклый  $(n - 1)$ -амонд из множества  $D_{n-1}$  (рис. 4).

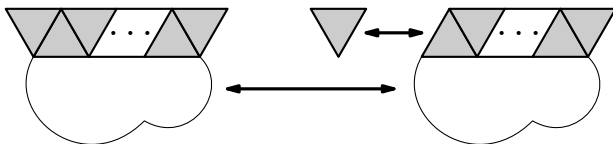


Рис. 4.

Мы получаем взаимно однозначное соответствие между такими множествами. Следовательно, для любого  $n \geq 2$  выполнено  $c_n = g_{n-1}$ .  $\square$

ЛЕММА 2. Для  $n \geq 2$  выполняется соотношение

$$d_n = a_{n-1} + b_{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полиамонд из множества  $D_n$ . Если этот полиамонд имеет не менее четырёх треугольников в верхней строке, то мы можем удалить самый правый треугольник  $\nabla$  из верхней строки и получить полиамонд из множества  $B_{n-1}$ . Если этот полиамонд имеет в точности два треугольника в верхней строке, то, так же удаляя самый правый треугольник  $\nabla$  из верхней строки, мы получим полиамонд из множества  $A_{n-1}$ . Очевидно, что этот процесс обратим (рис. 5).

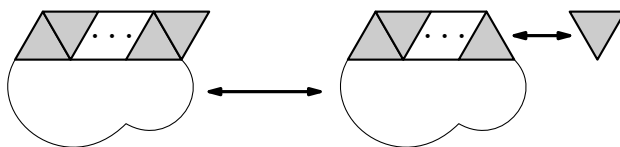


Рис. 5.

Значит для любого  $n \geq 2$  мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством  $D_n$  и объединением непересекающихся множеств  $A_{n-1}$  и  $B_{n-1}$ . Следовательно,  $d_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ .  $\square$

Для получения дополнительных соотношений введём ещё несколько подмножеств горизонтально-выпуклых полиамондов.

В множестве  $A$  определим подмножества горизонтально-выпуклых полиамондов  $I, J, E$  и  $E^*$  в зависимости от формы их второй сверху строки (рис. 6):



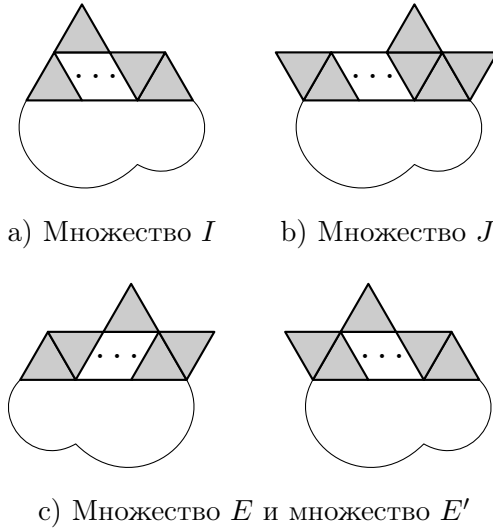


Рис. 6.

а) если вторая сверху строка полиамонда является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой длиннее верхнего, то отнесём его к множеству  $I$ ;

б) если вторая сверху строка полиамонда является равнобедренной трапецией, нижнее основание которой короче верхнего, то отнесём его к множеству  $J$ ;

с) если вторая сверху строка полиамонда является параллелограммом, крайний правый треугольник которого направлен остриём вниз или направлен остриём вверх, то отнесём его к множеству  $E$  или множеству  $E^*$  соответственно.

Через  $I_n$ ,  $J_n$ ,  $E_n$  и  $E_n^*$  обозначим множество горизонтально-выпуклых полиамондов из  $I$ ,  $J$ ,  $E$  и  $E^*$  соответственно, которые состоят из  $n$  треугольников, а количество элементов в этих множествах  $i_n$ ,  $j_n$ ,  $e_n$ ,  $e_n^*$  соответственно.

Соображения симметрии дают равенство  $e_n = e_n^*$ .

Понятно, что множество  $A$  является объединением непересекающихся подмножеств  $I$ ,  $J$ ,  $E$  и  $E^*$ . Следовательно, для  $n \geq 2$

$$a_n = i_n + j_n + e_n + e_n^* = i_n + j_n + 2e_n.$$

ЛЕММА 3. Для  $n \geq 2$  выполняются соотношения

- 1)  $j_n = c_{n-1} + e_{n-1}$ ,
- 2)  $e_n = d_{n-1} + i_{n-1}$ .

Доказательство. 1) Рассмотрим  $n$ -амонд из множества  $J$ . Если в таком  $n$ -амонде треугольник из верхней строки расположен в точности над самым правым треугольником второй строки, то, удалив треугольник из верхней строки, мы получим  $(n - 1)$ -амонд из  $C$  (рис. 7). Количество таких полиамондов будет  $c_{n-1}$ . Если же в таком  $n$ -амонде треугольник из верхней строки расположен не над самым правым треугольником второй строки, то удалим самый правый треугольник из второй строки и получим  $(n - 1)$ -амонд из  $E^*$ . Количество таких полиамондов будет  $e_{n-1}$ .

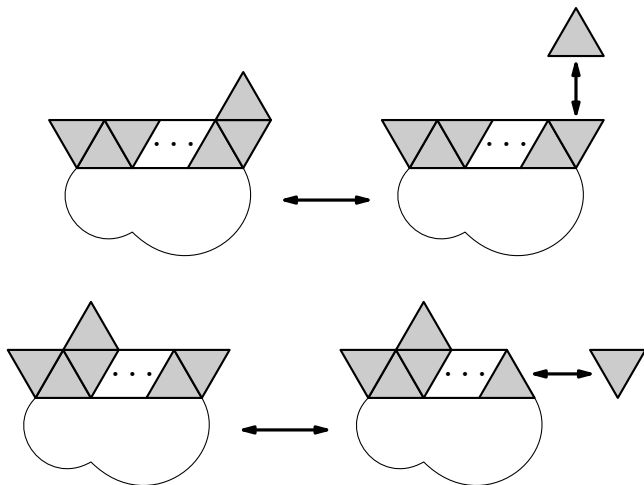


Рис. 7.

Эти операции обратимы, значит для любого  $n \geq 2$  мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством  $J_n$  и объединением непересекающихся множеств  $C_{n-1}$  и  $E_{n-1}^*$ . Следовательно,  $j_n = c_{n-1} + e_{n-1}$ .

2) Будем рассуждать аналогично. Рассмотрим  $n$ -амонд из множества  $E$ . Если в таком  $n$ -амонде треугольник из верхней строки расположен в точности над самым правым треугольником второй строки, то, удалив этот треугольник из верхней строки, мы получим  $(n - 1)$ -амонд из  $D_{n-1}$ . Количество таких полиамондов будет  $d_{n-1}$ . Если же в таком  $n$ -амонде треугольник из верхней строки расположен не над самым правым треугольником второй строки, то удалим самый правый треугольник из второй строки и получим  $(n - 1)$ -амонд из  $I$ . Количество таких полиамондов будет  $i_{n-1}$ . Эти операции обратимы, значит для любого  $n \geq 2$  мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством  $E_n$  и объединением непересекающихся множеств  $D_{n-1}$  и  $I_{n-1}$ . Следовательно,  $e_n = d_{n-1} + i_{n-1}$ .  $\square$

Наконец нам понадобится ещё три подмножества горизонтально-выпуклых полиамондов.

К множеству  $P$ , отнесём полиамонды из множества  $B$ , у которых крайний правый треугольник  $\Delta$  верхней строки расположен над самым левым треугольником  $\nabla$  второй строки (самый левый треугольник  $\nabla$  может быть вторым слева треугольником), см. рис. 8.

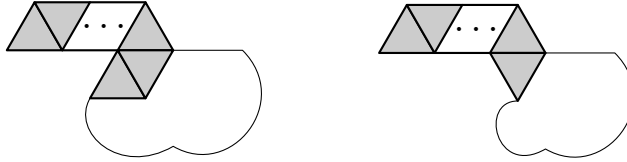


Рис. 8. Полиамонды из множества  $P$

К множеству  $Q$ , отнесём те полиамонды из  $I$ , у которых треугольник из верхней строки не расположен над вторым справа треугольником второй строки (рис. 9).

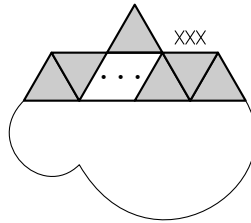


Рис. 9. Множество  $Q$

К множеству  $R$ , отнесём те полиамонды из  $Q$ , у которых крайний правый треугольник  $\Delta$  второй сверху строки расположен над самым левым треугольником  $\nabla$  третьей сверху строки (самый левый треугольник  $\nabla$  может быть вторым слева треугольником) (рис. 10). Таким образом, полиамонды из множества  $R$  состоят из не менее чем трёх строк.

На рисунках 9 и 10 знаком «xxx» обозначена позиция, запрещённая для расположения треугольника  $\Delta$ .

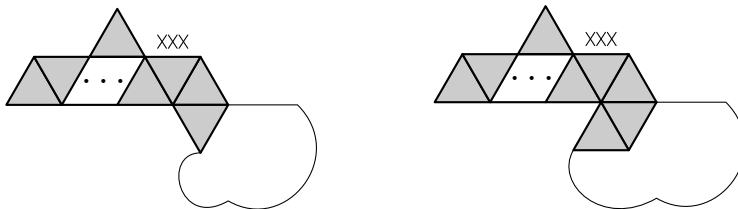


Рис. 10. Множество  $R$

Через  $P_n, Q_n, R_n$  обозначим множества горизонтально-выпуклых полиамондов типов  $P, Q, R$  соответственно, которые состоят из  $n$  треугольников, а через  $p_n, q_n, r_n$  количество элементов в этих множествах.

ЛЕММА 4. Для  $n \geq 2$  выполняется соотношение

$$b_n = d_{n-1} + p_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество  $B_n \setminus P_n$  состоит из горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов, у которых самый правый треугольник  $\Delta$  из верхней строки не расположен над самым левым треугольником  $\nabla$  второй строки (самый левый треугольник  $\nabla$  может оказаться вторым слева после  $\Delta$ ). Это означает, что у верхней и второй сверху строки общими являются не менее двух сторон треугольников. Если мы удалим самый правый треугольник из верхней строки, то мы получим  $(n - 1)$ -амонд из  $D$  (рис. 11).

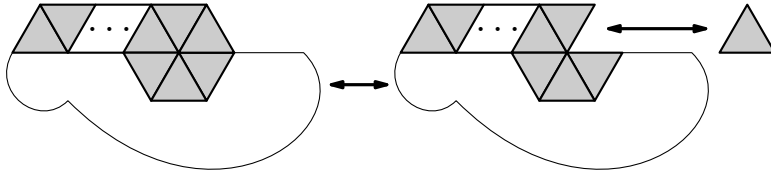


Рис. 11.

Понятно, что эту операцию можно обратить, поскольку к каждому  $(n - 1)$ -амонду из  $D$  мы можем добавить справа треугольник в верхнюю строку. Значит, количество горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов в множестве  $B_n \setminus P_n$  такое же, как и в множестве  $D_{n-1}$ . Следовательно,  $b_n - p_n = d_{n-1}$ . Осталось перенести слагаемые в нужные части равенства.  $\square$

ЛЕММА 5. Для  $n \geq 2$  выполняется соотношение

$$i_n = b_{n-1} + q_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество  $I_n \setminus Q_n$  состоит из горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов, у которых треугольник  $\Delta$  из верхней строки расположен в точности над вторым справа треугольником второй строки. Если мы удалим треугольник из верхней строки, то получим  $(n - 1)$ -амонд из  $B$ . Понятно, что эту операцию можно обратить, поскольку к каждому  $(n - 1)$ -амонду из  $B$  мы можем добавить треугольник в точности над вторым справа треугольником верхней строки (рис. 12).

Значит, количество горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов в множестве  $I_n \setminus Q_n$  такое же, как и в множестве  $B_{n-1}$ . Следовательно,  $i_n - q_n = b_{n-1}$ . Осталось перенести слагаемые в нужные части равенства.  $\square$

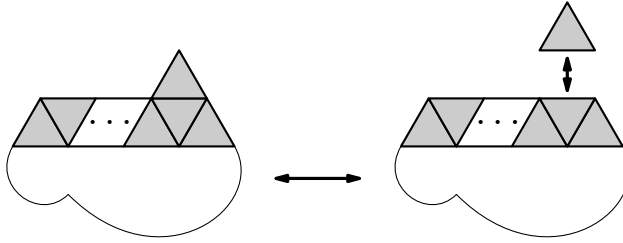


Рис. 12.

ЛЕММА 6. Для  $n \geq 3$  выполняется соотношение

$$q_n = r_n + i_{n-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество  $Q_n \setminus R_n$  состоит из горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов, у которых треугольник из верхней строки не расположен над вторым справа треугольником второй строки, а самый правый треугольник второй строки не расположен над самым левым треугольником  $\nabla$  третьей строки (самый левый треугольник  $\nabla$  может оказаться вторым слева после  $\Delta$ ). Это означает, что у второй и третьей сверху строки общими являются не менее двух сторон треугольников. Если мы удалим два крайних справа треугольника из второй сверху строки, то мы получим  $(n - 2)$ -амонд из  $I$  (рис. 13).

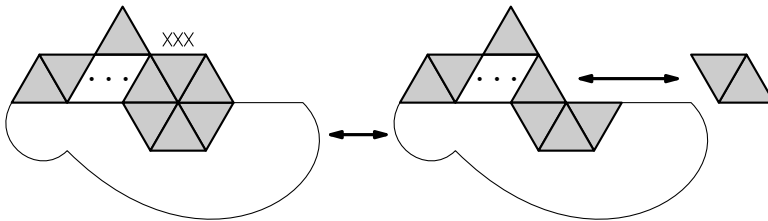


Рис. 13.

Понятно, что эту операцию можно обратить, поскольку к каждому  $(n - 2)$ -амонду из  $I$  мы можем добавить справа два треугольника во вторую сверху строчку. Значит, количество горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов в множестве  $Q_n \setminus R_n$  такое же, как и в множестве  $I_{n-2}$ . Следовательно,  $q_n - r_n = i_{n-2}$ . Осталось перенести слагаемые в нужные части равенства.  $\square$

ЛЕММА 7. Для  $n \geq 4$  выполняется соотношение

$$r_n = r_{n-2} + p_{n-3}.$$

Доказательство. Рассмотрим  $n$ -амонд из  $R$ . Если в таком  $n$ -амонде треугольник из верхней строки расположен в точности над вторым слева треугольником второй строки, то, удалив этот треугольник и два самых левых треугольника из второй сверху строки, мы получим  $(n - 3)$ -амонд из  $P$ . Следовательно, число таких  $n$ -амондов будет  $p_{n-3}$ . Если же в таком  $n$ -амонде треугольник из верхней строки расположен не над вторым слева треугольником второй строки, то, удалив два самых левых треугольника из второй сверху строки, мы получим  $(n - 2)$ -амонд из  $R$  (рис. 14). Число таких  $n$ -амондов будет  $r_{n-2}$ .

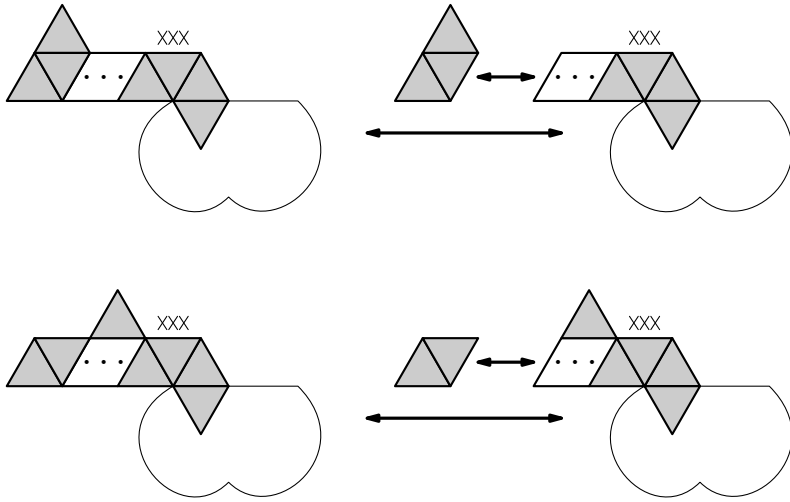


Рис. 14.

Эти операции обратимы. Следовательно,  $r_n = r_{n-2} + p_{n-3}$ . □

ЛЕММА 8. Для  $n \geq 4$  выполняется соотношение

$$p_n = p_{n-2} + h_{n-3}.$$

Доказательство. Рассмотрим  $n$ -амонд из  $P$ . Если в таком  $n$ -амонде верхняя строка состоит из 5 и более треугольников, то, удалив слева два треугольника из верхней строки, мы получим  $(n - 2)$ -амонд из  $P$  (рис. 15). Если в таком  $n$ -амонде верхняя строка состоит ровно из 3 треугольников, то, удалив всю эту строку из трёх треугольников, мы получим  $(n - 3)$ -амонд из  $H$ .

Заметим, что все  $n$ -амонды из  $P$  можно получить такими обратными операциями. Следовательно,  $p_n = p_{n-2} + h_{n-3}$ . □

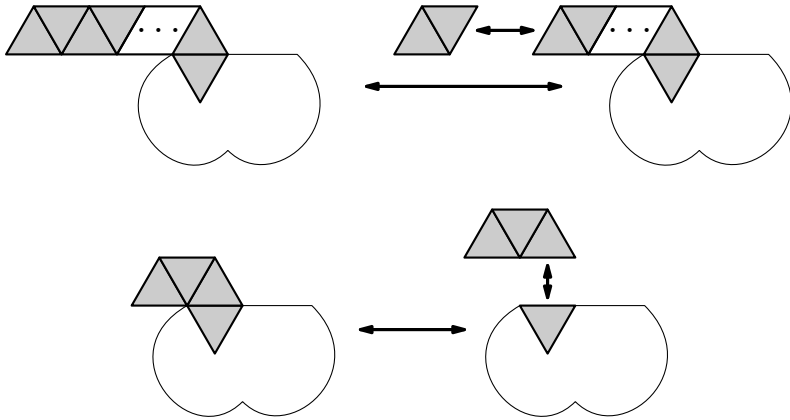


Рис. 15.

Сведём полученные рекуррентные соотношения вместе:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_n = a_n + h_n, \\ h_n = b_n + c_n + 2d_n, \\ c_n = d_{n-1}, \\ d_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \\ a_n = i_n + j_n + 2e_n, \\ j_n = c_{n-1} + e_{n-1}, \\ e_n = d_{n-1} + i_{n-1}, \\ b_n = d_{n-1} + p_n, \\ i_n = b_{n-1} + q_n, \\ q_n = r_n + i_{n-2}, \\ r_n = r_{n-2} + p_{n-3}, \\ p_n = p_{n-2} + h_{n-3}. \end{array} \right.$$

Этих соотношений нам хватит, чтобы доказать теорему 1.

Дальнейшие выкладки будут иметь чисто технический характер с использованием отдельных рекуррентных соотношений системы для получения других рекуррентных соотношений. Чтобы не утомлять читателя, мы просто предложим ему в качестве упражнения промежуточные результаты.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите соотношения:

- а)  $g_{n-1} = d_n + 2d_{n-1} + d_{n-2}$ , для  $n \geq 3$ ;
- б)  $g_n - g_{n-1} = 2d_n + d_{n-1} - d_{n-2} - 2d_{n-3} + b_n + b_{n-2} + r_n + r_{n-1}$ , для  $n \geq 4$ ;

с)  $g_n - g_{n-1} + 2g_{n-2} = 2d_n + 3d_{n-1} + 3d_{n-2} + b_n + b_{n-2} + r_n + r_{n-1}$ , для  $n \geq 4$ ;

д)  $g_n - 2g_{n-1} + 3g_{n-2} - 2g_{n-3} = 2d_n + 2d_{n-1} - d_{n-2} - 2d_{n-3} - d_{n-4} + p_n - p_{n-1} + p_{n-2}$ , для  $n \geq 5$ ;

е)  $g_n - 2g_{n-1} + 3g_{n-2} - g_{n-3} = 2d_n + 2d_{n-1} + p_n - p_{n-1} + p_{n-2}$ , для  $n \geq 5$ ;

ф)  $p_n - p_{n-2} - p_{n-3} = 2(d_{n-3} + d_{n-4})$ , для  $n \geq 5$ ;

г)  $g_n - 2g_{n-1} + 2g_{n-2} - g_{n-4} - 2g_{n-5} + g_{n-6} = 2d_n + 2d_{n-1} - 2d_{n-2} - 2d_{n-3} - 2d_{n-4} + 2d_{n-6}$ , для  $n \geq 7$ ;

h)  $g_n - 2g_{n-1} + 2g_{n-2} - g_{n-4} - 4g_{n-5} + g_{n-6} = 2(d_n + d_{n-1}) - 2(d_{n-2} + d_{n-3}) - 4(d_{n-4} + d_{n-5})$ , для  $n \geq 7$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Продемонстрируем технические выкладки для получения итогового соотношения.

Используя результат упражнения 1h) для  $n \geq 8$  имеем

$$\begin{aligned} g_{n-1} - 2g_{n-2} + 2g_{n-3} - g_{n-5} - 4g_{n-6} + g_{n-7} &= \\ &= 2(d_{n-1} + d_{n-2}) - 2(d_{n-3} + d_{n-4}) - 4(d_{n-5} + d_{n-6}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_n - 2g_{n-1} + 2g_{n-2} - g_{n-4} - 4g_{n-5} + g_{n-6} + \\ + (g_{n-1} - 2g_{n-2} + 2g_{n-3} - g_{n-5} - 4g_{n-6} + g_{n-7}) &= \\ = 2(d_n + d_{n-1}) - 2(d_{n-2} + d_{n-3}) - 4(d_{n-4} + d_{n-5}) + \\ + 2(d_{n-1} + d_{n-2}) - 2(d_{n-3} + d_{n-4}) - 4(d_{n-5} + d_{n-6}) &= \\ = 2(d_n + 2d_{n-1} + d_{n-2}) - 2(d_{n-2} + 2d_{n-3} + d_{n-4}) - 4(d_{n-4} + 2d_{n-5} + d_{n-6}) &= \\ = 2g_{n-1} - 2g_{n-3} - 4g_{n-5}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_n - 2g_{n-1} + 2g_{n-2} - g_{n-4} - 4g_{n-5} + g_{n-6} + \\ + g_{n-1} - 2g_{n-2} + 2g_{n-3} - g_{n-5} - 4g_{n-6} + g_{n-7} &= \\ = 2g_{n-1} - 2g_{n-3} - 4g_{n-5}. \end{aligned}$$

Перенесём все слагаемые кроме первого в правую часть равенства и приведём подобные члены. В итоге получаем требуемое соотношение

$$g_n = 3g_{n-1} - 4g_{n-2} + g_{n-4} + g_{n-5} + 3g_{n-6} - g_{n-7}.$$

Теорема 1 доказана. □

Приведём таблицу начальных значений последовательностей.



$n$	$a$	$b$	$c$	$d$	$i$	$j$	$e$	$p$	$q$	$r$	$h$	$g$
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2
2	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	3
3	2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	4	6
4	5	2	1	3	1	2	1	1	0	0	9	14
5	12	5	3	7	2	2	4	2	0	0	22	34
6	31	12	7	17	6	7	9	5	1	0	53	84
7	77	28	17	43	15	16	23	11	3	1	131	208
8	192	70	43	105	36	40	58	27	8	2	323	515
9	474	169	105	262	91	101	141	64	21	6	798	1272

Табл. 1.

#### 4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Все ряды в этой статье мы рассматриваем как формальные степенные ряды, не вдаваясь в вопросы сходимости. Операции сложения, умножения, дифференцирования рядов мы рассматриваем как соответствующие операции над формальными степенными рядами.

Одной из наших целей будет нахождение производящей функции для горизонтально-выпуклых полиамондов

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n.$$

Попутно мы найдём производящую функцию двух переменных

$$\tilde{G}(u, v) = \sum_{p, q} g_{p, q} u^p v^q,$$

где  $g_{p, q}$  обозначает количество горизонтально-выпуклых полиамондов, состоящих из  $p$  треугольников вида  $\nabla$  и  $q$  треугольников вида  $\Delta$ .

Заметим, что  $G(x) = \tilde{G}(x, x)$ .

Для нахождения указанных функций рассмотрим производящие функции трёх переменных

$$G(u, v, y) = \sum_{p, q, m} g(p, q, m) u^p v^q y^m, \quad A(u, v, y) = \sum_{p, q, m} a(p, q, m) u^p v^q y^m,$$

$$B(u, v, y) = \sum_{p, q, m} b(p, q, m) u^p v^q y^m, \quad C(u, v, y) = \sum_{p, q, m} c(p, q, m) u^p v^q y^m,$$

$$D(u, v, y) = \sum_{p, q, m} d(p, q, m) u^p v^q y^m, \quad H(u, v, y) = \sum_{p, q, m} h(p, q, m) u^p v^q y^m.$$

Из наших построений видно, что  $\tilde{G}(u, v) = G(u, v, 1)$ , поэтому для наших целей не обязательно находить функцию  $G(u, v, y)$ , а достаточно найти  $G(u, v, 1)$ .

Из (2.3) и (2.4) следует

$$\begin{aligned} H(u, v, y) &= B(u, v, y) + C(u, v, y) + 2D(u, v, y), \\ G(u, v, y) &= A(u, v, y) + H(u, v, y). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Мы отмечали что  $a(p, q, m) = 0$ , если  $m = 1$ . Поэтому функция  $A(u, v, y)$  фактически является функцией двух переменных и не зависит от  $y$ , в частности  $A(u, v, y) = A(u, v, 1)$ .

Пусть  $\chi(u, v) = \left. \frac{\partial}{\partial y} H(u, v, y) \right|_{y=1}$  обозначает функцию двух переменных, полученную при подстановке  $y = 1$  в продифференцированный по переменной  $y$  формальный ряд  $H(u, v, y)$ .

Проведём небольшое техническое вычисление, которое мы впоследствии используем.

При почленном дифференцировании формального ряда получим для всех целых  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial y} (y^k H(u, v, y)) \right|_{y=1} &= \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{p,q,m} h(p, q, m) u^p v^q y^{m+k} \right) \right|_{y=1} = \\ &= \sum_{p,q,m} (m+k) h(p, q, m) u^p v^q = \sum_{p,q} \left( \sum_m (m+k) h(p, q, m) \right) u^p v^q. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя свойство дифференцирования произведения функций, получим

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} (y^k H(u, v, y)) \right|_{y=1} = kH(u, v, 1) + \chi(u, v).$$

Следовательно, для всех целых  $k \geq 0$

$$kH(u, v, 1) + \chi(u, v) = \sum_{p,q} \left( \sum_m (m+k) h(p, q, m) \right) u^p v^q. \tag{4.2}$$

В частности, при  $k = 0$

$$\chi(u, v) = \sum_{p,q} \left( \sum_m m h(p, q, m) \right) u^p v^q. \tag{4.3}$$

Давайте получим рекуррентные соотношения на коэффициенты  $a(p, q, m)$ ,  $b(p, q, m)$ ,  $c(p, q, m)$ ,  $d(p, q, m)$  и затем составим соотношения для производящих функций.

Посмотрим, как получаются полиамонды из  $A$ . Возьмём треугольник  $\Delta$  и начнём прикладывать его сверху к некоторому полиамонду (назовём его исходным) так, чтобы получился новый полиамонд. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный полиамонд был из  $A$ . Если исходный полиамонд из  $H$  и в его верхней строке содержится  $m$  треугольников  $\nabla$ , то такую операцию можно проделать  $m$  способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все полиамонды подмножества  $A$  кроме собственно треугольника  $\Delta$ . Следовательно, для всех  $p, q$  выполняются соотношения

$$a(p, q + 1, 0) = \sum_m mh(p, q, m).$$

Для треугольника  $\Delta$  мы имеем  $a(0, 1, 0) = 1$ .

Из этих соотношений следует соотношение для производящих функций

$$A(u, v, y) = v + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} H(u, v, y) \Big|_{y=1} = v(1 + \chi(u, v)). \quad (4.4)$$

Действительно, вспоминая (4.3), получаем

$$\begin{aligned} v(1 + \chi(u, v)) &= v + \sum_{p,q} \left( \sum_m mh(p, q, m) \right) u^p v^{q+1} = \\ &= v + \sum_{p,q} a(p, q + 1, 0) u^p v^{q+1} = A(u, v, y). \end{aligned}$$

Посмотрим, как получаются полиамонды из множества  $B$ . Возьмём полиамонд из  $B$ , состоящий только из одной строки и составленный из  $k$  треугольников  $\nabla$ , и  $k + 1$  треугольников  $\Delta$ , и начнём прикладывать его сверху к некоторому (исходному) полиамонду так, чтобы получился новый полиамонд. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходным полиамондом был полиамонд из  $A$ . Если исходный полиамонд был из  $H$  и в его верхнем слое содержится  $m$  треугольников  $\nabla$ , то такую операцию можно проделать  $m + k$  способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все полиамонды из множества  $B$  кроме тех, которые состоят из одной строки. Следовательно, для всех  $p, q$  выполняются соотношения

$$b(p + k, q + k + 1, k) = \sum_m (m + k)h(p, q, m).$$

Для полиамондов из множества  $B$ , состоящих только из одной строки, получаем

$$b(k, k + 1, k) = 1.$$

Используя (4.2), выведем соотношение для производящих функций

$$\begin{aligned}
 B(u, v, y) &= \sum_{p, q, m} b(p, q, m) u^p v^1 y^m = \\
 &= \sum_k b(k, k+1, k) u^k v^{k+1} y^k + \sum_{p, q, k} b(p+k, q+k+1, k) u^{p+k} v^{q+k+1} y^k = \\
 &= \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k + \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k \left[ \sum_{p, q} \left( \sum_m (m+k) h(p, q, m) \right) u^p v^q \right] = \\
 &= \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k + \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k (kH(u, v, 1) + \chi(u, v)).
 \end{aligned}$$

Итак

$$B(u, v, y) = \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k + \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k (kH(u, v, 1) + \chi(u, v)). \quad (4.5)$$

Прделав аналогичные рассуждения для полиамондов из множеств  $C$  и  $D$ , мы получим ещё два соотношения для производящих функций

$$C(u, v, y) = uy + \sum_{k \geq 2} u^k v^{k-1} y^k + \sum_{k \geq 2} u^k v^{k-1} y^k ((k-2)H(u, v, 1) + \chi(u, v)), \quad (4.6)$$

$$D(u, v, y) = \sum_{k \geq 1} u^k v^k y^k + \sum_{k \geq 1} u^k v^k y^k ((k-1)H(u, v, 1) + \chi(u, v)). \quad (4.7)$$

Складывая равенства (4.5), (4.6) с удвоенным равенством (4.7) и, учитывая (4.1), получим уравнение на функцию  $H(u, v, y)$

$$\begin{aligned}
 H(u, v, y) &= \left( \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k + uy + \sum_{k \geq 2} u^k v^{k-1} y^k + 2 \sum_{k \geq 1} u^k v^k y^k \right) + \\
 &+ \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k (kH(u, v, 1) + \chi(u, v)) + \\
 &+ \sum_{k \geq 2} u^k v^{k-1} y^k ((k-2)H(u, v, 1) + \chi(u, v)) + \\
 &+ 2 \sum_{k \geq 1} u^k v^k y^k ((k-1)H(u, v, 1) + \chi(u, v)).
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Чтобы не утруждать читателя подробным выписыванием дальнейших громоздких преобразований, мы просто сообщим, какие шаги необходимо прделать, чтобы получить явный вид функции.

Часть громоздких выражений, поддаётся упрощениям.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, докажите, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} u^k v^{k+1} y^k + uy + \sum_{k \geq 2} u^k v^{k-1} y^k + 2 \sum_{k \geq 1} u^k v^k y^k = \\ = \frac{uv^2 y}{1 - uv y} + \frac{u^2 v y 2}{1 - uv y} + 2 \frac{uv y}{1 - uv y} = \frac{uv y (v + 2 + uy)}{1 - uv y}. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Используя интегрирование и дифференцирование формальных рядов, докажите, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} k u^k v^{k+1} y^k + uy + \sum_{k \geq 2} (k-2) u^k v^{k-1} y^k + 2 \sum_{k \geq 1} (k-1) u^k v^k y^k = \\ = \frac{uv^2 y (1 + uy)^2}{(1 - uv y)^2}. \end{aligned}$$

В итоге мы упростим (4.8) до следующего вида

$$H(u, v, y) = uy + \left( \frac{uv y (v + 2 + uy)}{1 - uv y} \right) (1 + \chi(u, v)) + H(u, v, 1) \frac{uv^2 y (1 + uy)^2}{(1 - uv y)^2}. \quad (4.9)$$

Из уравнения (4.9) легко получить систему уравнений относительно  $H(u, v, 1)$  и  $\chi(u, v)$ . Первое уравнение системы мы получим, если в (4.9) сделаем подстановку  $y = 1$ . Второе уравнение системы получается, если (4.9) продифференцировать по  $y$  и затем сделать подстановку  $y = 1$ . Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} H(u, v, 1) &= u + \left( \frac{uv(v + 2 + u)}{1 - uv} \right) (1 + \chi(u, v)) + H(u, v, 1) \frac{uv^2(1 + u)^2}{(1 - uv)^2}, \\ \chi(u, v) &= u + (1 + \chi(u, v)) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{uv(v + 2 + u)}{1 - uv} \right) \Big|_{y=1} + \\ &\quad + H(u, v, 1) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{uv^2(1 + u)^2}{(1 - uv)^2} \right) \Big|_{y=1}. \end{aligned} \right.$$

Решив систему, найдём  $H(u, v, 1)$  и  $\chi(u, v)$ . Затем находим  $A(u, v, y) = v(1 + \chi(u, v))$  и  $G(u, v, 1) = A(u, v, 1) + H(u, v, 1)$ .

Не будем утруждать читателя выписыванием всех функций двух переменных, для примера приведём две из них. Для простоты записи определим два многочлена от двух переменных

$$\begin{aligned} r(u, v) &= 1 - 6uv - 2u^2v - 2uv^2 + 8u^2v^2 + 4u^3v^2 + 4u^2v^3 - 5u^3v^3 - \\ &\quad - 6u^4v^3 - 6u^3v^4 - u^5v^3 - u^3v^5 - 5u^4v^4 + u^5v^5, \\ t(u, v) &= u + v + 3uv - 2u^2v - 2uv^2 - u^3v - uv^3 - 7u^2v^2 - u^3v^2 - u^2v^3 + \\ &\quad + u^4v^2 + u^2v^4 + 5u^3v^3 + 4u^4v^3 + 4u^3v^4 + 3u^4v^4. \end{aligned}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.** *Производящими функциями двух переменных для множеств  $H$  и  $G$  горизонтально-выпуклых полиамондов будут функции*

$$H(u, v, 1) = \frac{u(v+1)^2(1-uv)^2(1-uv-u^2v)}{r(u, v)},$$

$$\tilde{G}(u, v) = \sum_{p, q} g_{p, q} u^p v^q = G(u, v, 1) = \frac{(1-uv)t(u, v)}{r(u, v)}.$$

Отметим, что рациональная функция  $\tilde{G}(u, v)$  является симметрической функцией относительно переменных  $u, v$ .

Сделав подстановку  $u = v = x$ , мы найдём производящие функции от одной переменной:

$$H(x, x, 1) = \frac{x(x+1)(1-x)^2(1-x^2-x^3)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7},$$

$$A(x, x, 1) = \frac{x(1-x)(1-x)^2(1-x^2-x^3)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7},$$

$$B(x, x, 1) = \frac{x^3(1-2x^2+2x^5)}{(1+x)(1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7)},$$

$$C(x, x, 1) = \frac{x(1-2x-2x^2+3x^3+x^4-3x^6-x^7)}{(1+x)(1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7)},$$

$$D(x, x, 1) = \frac{x^2(1-x-2x^2+2x^3+x^4+x^5-x^6)}{(1+x)(1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7)}.$$

и, конечно, получим следствие теоремы 2.

**СЛЕДСТВИЕ.** *Производящей функцией для количества горизонтально-выпуклых полиамондов будет рациональная функция*

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n = \tilde{G}(x, x) = G(x, x, 1) = \frac{x(1-x)(2-x-4x^2+2x^4+3x^5)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) получаем

$$(1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7) \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n = x(1-x)(2-x-4x^2+2x^4+3x^5).$$

Поскольку правая часть последнего равенства является многочленом, то и левая часть равенства должна быть многочленом. Следовательно, последовательность  $g_n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению, совпадающему с соотношением (3.1) из Теоремы 1

$$g_n = 3g_{n-1} - 4g_{n-2} + g_{n-4} + g_{n-5} + 3g_{n-6} - g_{n-7}.$$

Для последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями, можно составить характеристическое уравнение (см., например, А. И. Маркушевич [3]). Для последовательности  $g_n$  характеристическое уравнение будет следующим

$$x^7 - 3x^6 + 4x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет действительные корни, наибольший из них

$$x_{\max} \approx 2.463536.$$

Поскольку  $x_{\max}$  не является корнем числителя производящей функции, то имеем асимптотическую оценку  $2.4635^n \leq g_n \leq 2.4636^n$ . Что, естественно, лучше нижней оценки  $2.13^n \leq g_n$ , полученной Д. Кларнером в [8].

Остается отметить, что последовательности  $a_n, h_n$  удовлетворяют рекуррентному соотношению седьмого порядка, аналогичному соотношению (3.1). В то же время, как видно из производящих функций, последовательности  $b_n, c_n, d_n$  будут удовлетворять рекуррентному соотношению восьмого порядка.

Чтобы найти производящую функцию двух переменных для количества горизонтально-выпуклых  $n$ -амондов с  $m$  строками, как это сделал М. Деле [5] для полимино, нам следовало бы рассмотреть производящие функции от четырёх переменных. Повторив наши рассуждения, мы получили бы соотношение, аналогичное соотношению (4.9), но от четырёх переменных. Разрешив полученное соотношение, мы получим искомую рациональную функцию.

Для технических операций умножения многочленов и нахождения корней автором использовался портал <http://www.sagenb.org/>.

Автор благодарит К. А. Ванькова и П. И. Самовола за внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Голломб С. В. *Полимино*. М.: Мир. 1975.
- [2] Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика*. М.: Наука. 1990.
- [3] Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности*. 3-е изд. М.: Наука, 1983. (серия «Популярные лекции по математике»).
- [4] Bender E. *Convex  $n$ -ominoes* // *Discrete Math.* Vol. 8. 1974. P. 219–226.
- [5] Delest M. P. *Generating Functions for Column-Convex Polyominoes* // *Journal of Combinatorial Theory. Series A.* Vol. 48. 1988. P. 12–31.

- [6] Delest M. P., Viennot G. *Algebraic languages and polyominoes enumeration* // Theoret. Comput. Sci. Vol. 34. 1984. P. 169–206. [Русский перевод: М.-П. Делест, Ж. Вьенно. *Алгебраические языки и перечисление полимино* // Киб. сборник. Нов. сер. Вып. 26. М.: Мир. 1989. С. 113–156.]
- [7] Hickerson D. *Counting Horizontally Convex Polyominoes* // Journal of Integer sequences. Vol. 2. 1999. Article 99.1.8.
- [8] Klarner D. A. *Cell growth problems* // Canad. J. Math. Vol. 19. 1967. P. 851–863.
- [9] Klarner D., Rivest R. *Asymptotic bounds for the number of convex  $n$ -ominoes* // Discrete Math. Vol. 8 1974. P. 31–40.
- [10] Lunnon W. F. *Counting hexagonal and triangular polynominoes* // Graph Theory and Computing (R. Read, ed.). New York: Academic Press. 1972. P. 87–100.