В. М. Буре, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова, Вероятностная модель обслуживания терминалов, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, 2016, выпуск 3, 32–38

DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.303

В. М. Буре, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕРМИНАЛОВ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье предполагается, что недалеко друг от друга расположены терминалы нескольких компаний. Каждая из компаний осуществляет транспортировку и хранение грузов. Если терминал компании переполнен, то она может арендовать часть складских помещений терминала другой компании. Если терминал компании недостаточно загружен, то часть помещений может быть сдана в аренду другой компании. Если имеется спрос на товар, который не может быть удовлетворен из-за его отсутствия на терминале, то компания может закупить товар на другом терминале и перевезти его на свой. Аренда части терминала другой компании и транспортировка грузов с одного терминала на другой приводят к дополнительным расходам. Кроме того, желательно заранее предвидеть необходимость аренды части помещений другой компании, так как организация аренды и транспортировка грузов требуют некоторого времени и дополнительных финансовых ресурсов. Таким образом, следует долгосрочно планировать работу терминала и резервировать финансовые ресурсы в целях обеспечения дополнительных расходов. Поток грузов носит стохастический характер и неполностью известен заранее. В работе рассмотрены две задачи обслуживания терминалов в рамках упрощенной математической модели. Динамика процесса загрузки терминала задается разностным стохастическим уравнением с управлением. Сформулированы вероятностные подходы к задаче управления, целью которого является обеспечение допустимых условий функционирования терминала. Библиогр. 12 назв.

Ключевые слова: терминал, схема Бернулли, свертка распределений.

V. M. Bure, V. V. Karelin, L. N. Polyakova

PROBABILISTIC MODEL OF TERMINAL SERVICES

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab.,
St. Petersburg, 199034, Russian Federation

The article assumes that several companies have transport terminals located in close proximity. Each company provides transportation and storage of goods. If a terminal of one company is crowded, then the company can rent a storage space in the terminal of another company. If a terminal of some company is not loaded, then the part of the premises may be leased to another company. If there is demand for a product that cannot be met in view of its absence from the terminal, the company can purchase goods at the other terminal and transfer them to another your terminal. Rental of the terminal to another company and the transportation of goods from one terminal to another terminal require additional costs. It is desirable to anticipate the need for the rental of the premises of another company, as the organization of rent and

Буре Владимир Мансурович — доктор технических наук, профессор; vlb310154@gmail.com

Карелин Владимир Витальевич — кандидат физико-математических наук, доцент; vlkarelin@mail.ru

Полякова Людмила Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор; lnpol07@mail.ru

Bure Vladimir Mansurovich — doctor of technical sciences, professor; vlb310154@gmail.com

Karelin Vladimir Vitalievich — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; vlkarelin@mail.ru

Polyakova Lyudmila Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor; lnpol07@mail.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 9.38.205.2014).

 DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.303

transportation of goods require some additional time and financial resources. Therefore, it is necessary to make long-term planning of financial resources in order to provide additional costs. Cargo flow is stochastic in nature and is not fully known in advance. The paper discusses two terminals maintenance tasks in the framework of a simplified mathematical model. The dynamics of the boot process of the terminal is determined by the stochastic equation with control. The probabilistic approaches to the problem of optimal control with the purpose to ensure acceptable conditions for the functioning of the terminal are formulated. Refs 12.

Keywords: terminal, the Bernoulli scheme, convolution of distributions.

Введение. В последние годы усилился интерес к трудно формализуемым прикладным задачам теории управления, часто формализация таких задач носит вероятностный характер. Укажем публикации такого направления, появившиеся в последнее время [1–9]. Будем предполагать, что в относительной близости друг к другу расположены однотипные терминалы нескольких компаний. Каждая из компаний осуществляет транспортировку и хранение грузов. Если терминал компании переполнен, то она может арендовать часть складских помещений терминала другой компании для хранения вновь поступивших грузов и, наоборот, если терминал компании недостаточно загружен, то часть складских помещений может быть сдана в аренду другой компании. Кроме того, для обеспечения возникшего спроса компания может закупить некоторый товар у другой компании и переместить его с терминала другой компании на свой терминал. Аренда части терминала другой компании и транспортировка грузов с одного терминала на другой требуют дополнительных расходов, в связи с этим для каждой компании желательно заранее предвидеть необходимость аренды части помещений другой компании или закупки некоторого товара у другой компании и последующей перевозки его на свой терминал. Следовательно, важно долгосрочное планирование работы терминала и резервирование финансовых ресурсов в целях обеспечения дополнительных расходов, при этом поток грузов в целом носит стохастический характер и неполностью известен заранее. Задавая вероятностную модель грузовых потоков, каждая компания может оценивать вероятность возникновения ситуаций, когда нужна аренда или закупка товара на другом терминале. Рассматриваемая задача близка к проблематике управления запасами [10–12], но обладает некоторыми особенностями в части постановки задач, которые были отмечены выше.

Постановка задачи. Рассмотрим две задачи планирования работы терминала в рамках упрощенной математической модели. В первой задаче предполагается, что терминал функционирует только как накопитель грузов, во второй — что кроме входящего потока грузов существует исходящий поток.

Задача 1. Пусть x_t — объем груза на терминале в период времени t (он может означать, например, день, неделю или какой-либо другой промежуток времени). За текущий период времени t на терминал может поступить новый груз, объем которого равен ξ_t. Пусть δ_t — случайная величина, которая принимает два возможных значения: 1 и 0, событие $\{\delta_t = 1\}$ означает, что в период времени t груз на терминал поступил, событие $\{\delta_t = 0\}$ — напротив, что груза не было. Примем, что динамика функционирования терминала в условиях задачи 1 может быть описана разностным уравнением

$$x_{t+1} = x_t + \xi_t \cdot \delta_t, \tag{1}$$

где неотрицательные случайные величины ξ_t и δ_t предполагаются взаимно независимыми и одинаково распределенными. Кроме того, δ_t подчиняются распределению Бернулли

$$P\{\delta_t = 1\} = p, \quad P\{\delta_t = 0\} = q = 1 - p.$$

В рамках рассматриваемого формализма естественным образом возникает следующая задача. В течение некоторого периода времени может происходить переполнение терминала, что повлечет за собой нежелательные дополнительные расходы, связанные с арендой части терминала другой компании и перевозки части грузов на арендованный терминал. Будем предполагать, что задана константа β, содержательный смысл которой заключается в следующем: выполнение неравенства

$$x_t > \beta \tag{2}$$

при каком-либо t означает угрозу переполнения терминала компании. Введем в уравнение (1) управление u_t, смысл которого заключается в том, что некоторое количество груза можно перевезти с данного терминала на арендованный. Представляет интерес задача выбора программного управления на некоторый промежуток времени $[1, n]$, т. е. на некоторое количество периодов времени $t = 1, 2, \ldots, n$. Выбор некоторого программного управления представляет собой директивный план работы терминала на n периодов времени и позволяет оценить ожидаемые затраты, связанные с организацией грузоперевозок. Разумеется, в действительности управление окажется другим и будет основываться на реальной загруженности терминала, но выбранное программное управление дает возможность выявить ожидаемые расходы на организацию дополнительных перевозок грузов между терминалами в целях рационального распределения загрузки складских помещений. С учетом введения программного управления уравнение (1) приобретает такой вид:

$$x_{t+1} = x_t + u_t + \xi_t \cdot \delta_t.$$

Будем предполагать, что задана экзогенная допустимая вероятность γ выполнения неравенства (2), если в какой-то период времени $t+1$ вероятность выполнения его оказывается больше, чем γ, и необходимо перевезти некоторую часть груза на специально арендованный терминал, т. е. при условии

$$P\{x_{t+1} > \beta\} > \gamma$$

в период времени t управление $u_t = -d$, в противном случае при условии

$$P\{x_{t+1} > \beta\} \leqslant \gamma$$

управление $u_t = 0$. Константа $d > 0$ может выбираться исходя из технологических условий функционирования терминала.

Задача 2. Пусть x_t — объем груза на терминале в период времени t (он может означать, например, день, неделю или какой-либо другой промежуток времени). За текущий период времени t на терминал может поступить новый груз, объем которого равен ξ_t; пусть $\delta_t^{(1)}$ — случайная величина, которая принимает два возможных значения: 1 и 0, событие $\{\delta_t^{(1)} = 1\}$ означает, что в период времени t груз на терминал поступил, событие $\{\delta_t^{(1)} = 0\}$ — напротив, что груза не было. Кроме того, за текущий период времени t с терминала может быть вывезен груз, объем которого равен η_t; пусть $\delta_t^{(2)}$ — случайная величина, которая принимает два возможных значения: 1 и 0, событие $\{\delta_t^{(2)} = 1\}$ означает, что в период времени t груз с терминала вывозился, событие $\{\delta_t^{(2)} = 0\}$, — что вывоза груза не было.

Будем предполагать, что динамика функционирования терминала в условиях задачи 2 может быть описана разностным уравнением

$$x_{t+1} = x_t + \xi_t \cdot \delta_t^{(1)} - \eta_t \cdot \delta_t^{(2)}. \tag{3}$$

Здесь неотрицательные случайные величины ξ_t и $\delta_t^{(1)}$ предполагаются взаимно независимыми и одинаково распределенными, при этом ξ_t и $\delta_t^{(1)}$ взаимно независимы между собой, кроме того, $\delta_t^{(1)}$ подчиняются распределению Бернулли

$$P\{\delta_t^{(1)} = 1\} = p_1, \qquad P\{\delta_t^{(1)} = 0\} = q_1 = 1 - p_1;$$

при этом неотрицательные случайные величины η_t и $\delta_t^{(2)}$предполагаются взаимно независимыми между собой и одинаково распределенными, кроме того, $\delta_t^{(2)}$ подчиняются распределению Бернулли

$$P\{\delta_t^{(2)} = 1\} = p_1, \qquad P\{\delta_t^{(2)} = 0\} = q_1 = 1 - p_1;$$

случайные величины ξ_t, η_t, $\delta_t^{(1)}$, $\delta_t^{(2)}$ взаимно независимы между собой. В уравнении (3) в правой части могут появиться отрицательные значения, которые будем интерпретировать следующим образом. Отрицательное значение в правой части означает, что для удовлетворения потребительского спроса компания должна купить такое количество товара на терминале другой компании и поставить его покупателям. В рамках рассматриваемого формализма естественным образом возникает такая задача. В течение некоторого периода времени терминал может либо переполниться, что повлечет за собой нежелательные дополнительные расходы, связанные с арендой части терминала другой компании и перевозкой части грузов на арендованный терминал, либо товара не хватит для удовлетворения спроса покупателей, что, в свою очередь, вызовет необходимость покупки соответствующего товара на терминале другой компании. Будем предполагать, что заданы константы α и β, содержательный смысл которых заключается в следующем: выполнение неравенства (2) при каком-либо t означает угрозу переполнения терминала компании, а неравенства

$$x_t < \alpha \tag{4}$$

говорит об угрозе недостатка товара для удовлетворения спроса покупателей. Введем в уравнение (3) управление u_t. Смысл его заключается в том, что некоторое количество груза можно перевезти с данного терминала на арендованный, либо, наоборот, привезти с терминала другой компании. Представляет интерес задача выбора программного управления на некоторый промежуток времени $[1, n]$, т. е. на некоторое количество периодов времени $t = 1, 2, \ldots, n$. Выбор некоторого программного управления — это директивный план работы терминала на n периодов времени в рамках задачи 2. Разумеется, в действительности управление окажется другим и будет основываться на реальной загруженности терминала, но выбранное программное управление позволяет оценить ожидаемые расходы на организацию дополнительных перевозок грузов между терминалами. С учетом введения программного управления уравнение (3) приобретает такой вид:

$$x_{t+1} = x_t + u_t + \xi_t \cdot \delta_t^{(1)} - \eta_t \cdot \delta_t^{(2)}.$$

Как и в задаче 1, предположим, что задана экзогенная допустимая вероятность γ выполнения неравенства (2) или (4), если в какой-то период времени $t+1$ вероятность выполнения неравенства (2) или (4) оказывается больше, чем γ, и необходимо перевезти некоторую часть груза на специально арендованный терминал или, наоборот, т. е. при условии

$$P\{(x_{t+1} < \alpha) \cup (x_{t+1} > \beta)\} > \gamma$$

в период времени t управление $u_t = -d$ либо $u_t = d$, в противном случае при условии

$$P\{(x_{t+1} < \alpha) \cup (x_{t+1} > \beta)\} \leqslant \gamma$$

управление $u_t = 0$. Константа $d > 0$ может выбираться исходя из технологических условий функционирования терминала.

Основные результаты и их обсуждение. Рассмотрим задачу 1. Величина x_0 — начальный объем грузов на терминале. Из постановки задачи 1 следует, что терминал функционирует в стационарном режиме. Тогда можно считать, что нулевой момент времени соответствует периоду работы терминала, когда в последний раз было произведено управляющее воздействие, которое заключалось в вывозе груза объема d, а x_0 представляет собой оставшееся количество груза на терминале после управляющего воздействия. Задача заключается в программном задании периода следующего управляющего воздействия. Ясно, что ввиду стационарности режима работы в рамках задачи 1 длина до следующего управляющего воздействия будет зависеть только от вероятностных характеристик модели и величины x_0. Справедливо такое утверждение:

Теорема 1. *При выполнении всех условий задачи 1 для* $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ *выполнено*

$$P\{x_{t+1} > \beta\} = \sum_{m=0}^{t} C_m^t p^m q^{t-m}(1 - F_m(\beta - x_0)),$$

где $F(z) = P\{\xi_t \leqslant z\}$ *— функция распределения случайной величины* ξ_t; $F_2 = F * F$, $F_m = F_{m-1} * F$ *—* m*-кратная свертка функции распределения* F.

Доказательство. Заметим, что процесс поступления грузов на терминал подчиняется схеме Бернулли, а также, что при наличии m успехов имеет место поступление грузов в m периодов времени за первые t периодов в новом цикле работы терминала, но тогда накопленный объем грузов на терминале к периоду $t+1$ представляет собой сумму m взаимно независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения F и начального количества x_0. Отсюда следует доказываемое утверждение. Теорема доказана.

В теореме 1 получено удобное выражение для определения вероятности $P\{x_{(t+1)} > \beta\}$. Это позволяет определить период времени $t+1$, для которого впервые с начала цикла выполняется неравенство $P\{x_{(t+1)} > \beta\} > \gamma$ для экзогенной вероятности γ, и тем самым найти программное управление в задаче 1.

Рассмотрим задачу 2. Как и в задаче 1, величина x_0 — начальный объем грузов на терминале. Из постановки задачи 2 следует, что терминал функционирует в стационарном режиме. Тогда можно считать, что нулевой момент времени соответствует периоду работы терминала, когда в последний раз было произведено управляющее воздействие, которое заключалось в вывозе груза объема d, а x_0 представляет собой оставшееся количество груза на терминале после управляющего воздействия. Задача заключается в программном задании периода следующего управляющего воздействия. Ясно, что ввиду стационарности режима работы в рамках задачи 2 длина до следующего управляющего воздействия будет зависеть только от вероятностных характеристик модели и величины x_0. Справедливо такое утверждение:

Теорема 2. *При выполнении всех условий задачи 2 для* $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ *выполнено*

$$P\{(x_{t+1} < \alpha) \cup (x_{t+1} > \beta)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{t} \sum_{i=0}^{t} C_t^k \cdot C_t^l \cdot p_1^k \cdot p_2^l \cdot q_1^{t-k} \cdot q_2^{t-l} [F_k * G_l(\alpha - x_0 - 0) + 1 - F_k * G_l(\beta - x_0)],$$

где $F(z) = P\{\xi_t \leqslant z\}$ *— функция распределения случайной величины* ξ_t; $F_2 = F * F$, $F_k = F_{k-1} * F$ *—* k*-кратная свертка функции распределения* F; $G(z) = P\{-\eta_t \leqslant z\}$ *— функция распределения случайной величины* $-\eta_t$; $G_2 = G * G, G_l = G_{l-1} * G$ *—* l*-кратная свертка функции распределения* G; $F_k * G_l(\alpha - x_0 - 0)$ *— предел слева в точке* $\alpha - x_0$ *для функции* $F_k * G_l$.

Доказательство. Заметим, что

$$x_{t+1} = x_0 + \sum_{k=0}^{t} \delta_k^{(1)} \cdot \xi_k - \sum_{l=0}^{t} \delta_l^{(2)} \eta_l.$$

Здесь имеются две схемы Бернулли и случайные величины взаимно независимы между собой. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1. Теорема 2 доказана. В ней получено удобное выражение для определения вероятности

$$P\{(x_{t+1} < \alpha) \cup (x_{t+1} > \beta)\}.$$

Это позволяет установить период времени $t+1$, для которого впервые с начала цикла выполняется неравенство

$$P\{(x_{t+1} < \alpha) \cup (x_{t+1} > \beta)\} > \gamma$$

для экзогенной вероятности γ, и тем самым найти программное управление в задаче 2.

Заключение. В работе рассмотрена задача планирования работы терминала в рамках упрощенной математической модели. Динамика процесса загрузки терминала задается разностным стохастическим уравнением с управлением. Сформулированы две задачи управления, целью которого является обеспечение допустимых условий функционирования терминала с заданной гарантированной вероятностью.

Литература

1. *Буре В. М., Карелин В. В.* О задаче планирования работы терминала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 2. С. 32–38.

2. *Belzunce F., Martinez-Puertas H., Ruiz Jose M.* Onal location of redundant components for systems with dependent components // European J. of Operational Research. 2013. Vol. 230, issue 3. P. 573–580.

3. *Sobhani A., Wahab M. I. M., Neumann W. P.* Investigating work-related ill health effects in optimizing the performance of manufacturing systems // European J. of Operational Research. 2015. Vol. 241, issue 1. P. 708–718.

4. *Tang W., Zheng J., Zhang J.* Viability decision of linear discrete-time stochastic systems with probability criterion // J. Control Theory Appl. 2009. Vol. 7, N 3. P. 297–300.

5. *Якушев В. П., Карелин В. В., Буре В. М.* Байесовский подход в задаче управления кислотностью среды // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 168–179.

6. *Карелин В. В., Буре В. М.* Оптимальное размещение центра коллективного пользования // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 4. С. 36–43.

7. *Полякова Л. Н., Карелин В. В., Буре В. М., Хитров Г. М.* Точные штрафные функции в задаче управления одной системой массового обслуживания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 1. С. 75–82.

8. *Буре В. М., Карелин В. В., Елфимов А. Н.* Об одной задаче управления детерминированной системой обслуживания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 4. С. 100–112.

9. *Bayram A., Solak S., Johnson M.* Stochastic models for strategic resource allocation in nonprofit foreclosed housing acquisitions // European J. of Operational Research. 2014. Vol. 233, issue 1. P. 246–262.

10. *Rizhikov Y. I.* Queuing theory, and inventory management. Saint Petersburg: Peter, 2001. 384 p.

11. *Taha Hamdy A.* Operations Research: An Introduction. 8th ed. Pearson Prentice Hall: Pearson Education, 2007. 812 p.

12. *Waters D.* Inventory control and management. New York: Wiley, 2003. 408 p.

Для цитирования: Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н. Вероятностная модель обслуживания терминалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 32–38. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.303

References

1. Bure V. M., Karelin V. V. O zadache planirovanija raboty terminala [On the problem of planning the terminal]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2015, issue 2, pp. 32–38. (In Russian)

2. Belzunce F., Martinez-Puertas H., Ruiz Jose M. Onal location of redundant components for systems with dependent components. *European J. of Operational Research*, 2013, vol. 230, issue 3, pp. 573–580.

3. Sobhani A., Wahab M. I. M., Neumann W. P. Investigating work-related ill health effects in optimizing the performance of manufacturing systems. *European J. of Operational Research*, 2015, vol. 241, issue 1, pp. 708–718.

4. Tang W., Zheng J., Zhang J. Viability decision of linear discrete-time stochastic systems with probability criterion. *J. Control Theory Appl.*, 2009, vol. 7, no. 3, pp. 297–300.

5. Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M., Bajesovskij podhod v zadache upravlenija kislotnost'ju sredy [Bayesian approach for control soil acidity]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2013, issue 3, pp. 168–179. (In Russian)

6. Karelin V. V., Bure V. M. Optimal'noe razmeshhenie centra kollektivnogo pol'zovanija [Optimal allocation of a collective use center]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2014, issue 4, pp. 36–43. (In Russian)

7. Polyakova L.N., Karelin V. V., Bure V. M., Chitrow G. M. Tochnye shtrafnye funkcii v zadache upravlenija odnoj sistemoj massovogo obsluzhivanija [Exact penalty function in the problem of a queuing system]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2015, issue 1, pp. 75–82. (In Russian)

8. Bure V. M., Karelin V. V., Elfimov A. N. Ob odnoj zadache upravlenija determinirovannoj sistemoj obsluzhivanija [On a control problem of a deterministic system service]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2015, issue 4, pp. 100–112. (In Russian)

9. Bayram A., Solak S., Johnson M. Stochastic models for strategic resource allocation in nonprofit foreclosed housing acquisitions. *European J. of Operational Research*, 2014, vol. 233, issue 1, pp. 246–262.

10. Rizhikov Y. I. *Queuing theory, and inventory management.* Saint Petersburg, Peter Publ., 2001, 384 p.

11. Taha Hamdy A. *Operations Research: An Introduction.* 8th ed. Pearson Prentice Hall, Pearson Education Press, 2007, 812 p.

12. Waters D. *Inventory control and management.* New York, Wiley Press, 2003, 408 p.

For citation: Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2016, issue 3, pp. 32–38. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2016.303

Статья поступила в редакцию 1 февраля 2016 г.

Статья принята к печати 26 мая 2016 г.