N. N. Andreev, Disposition of Points on a Sphere with Minimum of Energy, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 1997, Volume 219, 27–31

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1997, т. 219, с. 27–31

УДК 517.5

Расположение точек на сфере с минимальной энергией[1]

 Н.Н. Андреев

Поступило в июне 1997 г.

Пусть $S^{d-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$ — единичная сфера в d-мерном евклидовом пространстве; для $x, y \in \mathbb{R}^d$ через xy обозначим скалярное произведение векторов; $|x| = \sqrt{xx}$.

Возьмем N точек $\{x^{(i)}\}_{i=1}^N \subset S^{d-1}$ и введем функционалы

$$W(d, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{1}{|x^{(i)} - x^{(j)}|^{d-2}},$$

$$S(d, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{i,j=1}^{N} |x^{(i)} - x^{(j)}|.$$

Рассмотрим задачу о нахождении величин

$$W(d, N) = \inf_{x^{(1)},\dots,x^{(N)} \in S^{d-1}} W(d, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}),$$

$$S(d, N) = \sup_{x^{(1)},\dots,x^{(N)} \in S^{d-1}} S(d, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}).$$

Задача о нахождении величины $W(d, N)$ является обобщением классической проблемы расположения зарядов на сфере в трехмерном пространстве. Аналогичная задача о нахождении расположения точек с минимальной энергией в дискретных пространствах была поставлена С.В. Яблонским (см. [1]). Именно в экстремальных задачах теории кодирования П. Дельсарт начал использовать свойство положительной определенности специальных многочленов. Случай суммы попарных расстояний $S(d, N)$ был рассмотрен Л.Ф. Тотом в [2, гл. 5]. Решение этих задач известно в следующих случаях, причем экстремальные конструкции одинаковы для обеих задач:

$d = 2$, N любое (считается, что $W(2, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{N} \ln|x^{(i)} - x^{(j)}|$). Экстремальная конструкция — вершины правильного N-угольника;

d произвольное, $N = 2, 3$ тривиально. Экстремальные конструкции — две противоположные точки сферы и вершины правильного треугольника, вписанного в большую окружность сферы, соответственно;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая (проект 96-01-00036С) и программы "Ведущие научные школы" (проект 96-15-96102).

d произвольное, $N = d+1$. Экстремальная конструкция — симплекс, вписанный в сферу (множество из $d+1$ точек, равноудаленных друг от друга). Этот случай, как и предыдущий, несложно доказывается с помощью неравенств о средних гармоническом, геометрическом, арифметическом и квадратичном;

d произвольное, $N = 2d$. Экстремальная конструкция — вершины октаэдра, вписанного в единичную сферу (множество точек $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x_1| + \ldots + |x_d| = 1\}$) (см. [3]);

$d = 3$, $N = 12$. Экстремальная конструкция — правильный икосаэдр, вписанный в сферу (см. [4]);

$d = 8$, $N = 240$. Экстремальная конструкция — минимальные векторы решетки Коркина–Золотарева E_8 [5] (там доказано только для энергии, случай суммы делается аналогично).

Используя методы работ [5, 4], мы доказываем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $d = 24$ и $N = 196\,560$. Тогда экстремальная конструкция задается минимальными векторами решетки Лича и*

$$W(24, 196\,560) = \frac{211\,621\,330\,216\,387\,662\,351\,781}{207\,360\,000\,000\,000},$$

$$S(24, 196\,560) = 420\,042\,343\,593\,600.$$

Для доказательства нам потребуется следующая теорема из [5].

Теорема A. *Пусть $\alpha > 0$, $K > 0$, q — произвольное натуральное число. Тогда для любого $-1 \le t < 1$*

$$y(t) = K(1-t)^{-\alpha} \ge h_{2q}(t),$$

где h_{2q} — алгебраический многочлен степени $2q$, в точках $-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q < 1$ удовлетворяющий условиям

$$h_{2q}(t_i) = y(t_i),\ i = 0, 1, \ldots, q; \quad h'_{2q}(t_i) = y'(t_i),\ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Пусть C_k^p, $k = 0, 1, \ldots$, — многочлены Гегенбауэра (см. [6, с. 483]), определяемые как коэффициенты при z^k в разложении

$$(1 - 2tz + z^2)^{-p} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^p(t) z^k.$$

Нам понадобятся нормированные многочлены Гегенбауэра

$$P_k^d(t) = C_k^{d/2-1}(t) / C_k^{d/2-1}(1), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$P_0^d(t) = 1, \quad P_1^d(t) = t, \quad P_2^d(t) = \frac{dt^2 - 1}{d-1}, \quad P_3^d(t) = \frac{(d+2)t^3 - 3t}{d-1}, \ldots$$

Они обладают свойством положительной определенности [7, с. 318]: для любого конечного множества точек сферы $M \subset S^{d-1}$

$$\sum_{x,y \in M} P_n^d(xy) \ge 0 \quad \forall n \ge 0.$$

Доказательство теоремы. Пусть $d = 24$, $N = 196\,560$.

Описание экстремальной конструкции. Проведем построение решетки Лича Λ, следуя [7]. Рассмотрим двоичный код Голея G_{24}: слова длины 24, получаемые всевозможными сложениями (1+0=1, 0+0=0, 1+1=0) строчек порождающей матрицы

$$\begin{matrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{matrix}$$

Экстремальная конструкция будет включать $2 \cdot 24 \cdot 23 = 1\,104$ точки вида $(\pm 4^2, 0^{22})$ (т.е. две произвольные координаты равны ± 4, а остальные 22 — нули) и знаки расставлены всевозможными способами; $2^7 \cdot 759 = 97\,152$ точки вида $(\pm 2^8, 0^{16})$, где ± 2 стоят на местах, соответствующих 1 в множестве слов G_{24}, содержащих ровно восемь единиц, и имеется четное число минусов (см. [7, с. 169]); $24 \cdot 2^{12} = 98\,304$ точек вида $(\mp 3, \pm 1^{23})$, где верхние знаки берутся в множестве координат, где у некоторого слова из G_{24} стоит 1.

Для вектора $u \in \Lambda$ определим $A_t(u) = |\{v \in \Lambda \mid uv = t\}|$. Тогда [7, с. 438] $\forall u \in \Lambda$

$$A_1(u) = A_{-1}(u) = 1, \quad A_{1/2}(u) = A_{-1/2}(u) = 4600,$$

$$A_{1/4}(u) = A_{-1/4}(u) = 47\,104, \quad A_0(u) = 93\,150$$

и $A_1(u) + A_{-1}(u) + A_0(u) + A_{1/2}(u) + A_{-1/2}(u) + A_{1/4}(u) + A_{-1/4}(u) = 196\,560$.

При рассмотрении величины $W(24, 196\,560)$ эта конструкция дает оценку сверху, а для $S(24, 196\,560)$ — снизу.

Оценка $W(24, 196\,560)$ *снизу.* Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(196\,560)} \in S^{23}$ — произвольный набор точек на сфере. Так как $x^{(i)} \in S^{23}$ $\forall i$, то

$$|x^{(i)} - x^{(j)}| = \sqrt{|x^{(i)} - x^{(j)}|^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-t}\,, \quad t = x^{(i)}x^{(j)}.$$

Тогда

$$W(24, 196\,560, x^{(1)}, \dots, x^{(196\,560)}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{196\,560} \frac{1}{|x^{(i)} - x^{(j)}|^{22}} = \frac{1}{2^{11}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ t = x^{(i)}x^{(j)}}}^{196\,560} \frac{1}{(1-t)^{11}}.$$

Рассмотрим полином $h(t)$ 10-й степени такой, что

$$h(-1) = 2^{-11}, \quad h(0) = 1, \quad h\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \left(1 \mp \frac{1}{2}\right)^{-11}, \quad h\left(\pm\frac{1}{4}\right) = \left(1 \mp \frac{1}{4}\right)^{-11},$$

$$h'(0) = 11, \quad h'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 11\left(1 \mp \frac{1}{2}\right)^{-12}, \quad h'\left(\pm\frac{1}{4}\right) = 11\left(1 \mp \frac{1}{4}\right)^{-12}.$$

Полином $h(t)$ полностью определен этими соотношениями. Разложим его по полиномам Гегенбауэра, соответствующим нашему случаю $d = 24$. Получаем

$$h(t) = c_0 P_0^{24}(t) + c_1 P_1^{24}(t) + \ldots + c_{10} P_{10}^{24}(t),$$

где

$$c_0 = \frac{141\,850\,676\,503\,543\,521\,173}{2\,125\,764\,000\,000\,000\,000},$$

$$c_1 = \frac{118\,358\,403\,833\,271\,613}{129\,746\,337\,890\,625}, \quad c_2 = \frac{70\,388\,221\,470\,893\,010\,336\,353}{12\,045\,996\,000\,000\,000\,000},$$

$$c_3 = \frac{56\,276\,446\,656\,753\,371\,384}{2\,205\,687\,744\,140\,625}, \quad c_4 = \frac{74\,869\,074\,672\,728\,904\,072\,833}{963\,679\,680\,000\,000\,000},$$

$$c_5 = \frac{16\,816\,159\,586\,289\,882\,154}{88\,227\,509\,765\,625}, \quad c_6 = \frac{16\,782\,042\,098\,958\,485\,104\,595\,593}{48\,467\,419\,200\,000\,000\,000},$$

$$c_7 = \frac{493\,454\,295\,343\,731\,057\,332}{931\,290\,380\,859\,375}, \quad c_8 = \frac{77\,675\,128\,939\,804\,503\,459\,989}{135\,517\,455\,000\,000\,000},$$

$$c_9 = \frac{829\,110\,168\,744\,497\,642\,968}{1\,676\,322\,685\,546\,875}, \quad c_{10} = \frac{4\,093\,270\,819\,011\,722\,447\,225\,399}{17\,165\,544\,300\,000\,000\,000}.$$

По теореме А $h(t) \leq (1-t)^{-11}$ при $t \in [-1, 1)$. Потому

$$W(24, 196\,560, x^{(1)}, \ldots, x^{(196\,560)}) \geq 2^{-11} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{196\,560} h(x^{(i)} x^{(j)}) =$$

$$= 2^{-11} \sum_{i,j=1}^{196\,560} h(x^{(i)} x^{(j)}) - 2^{-11} \sum_{i=1}^{196\,560} h(x^{(i)} x^{(i)}).$$

Так как все $c_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, 10$, а полиномы Гегенбауэра положительно определены, то мы можем продолжить неравенство

$$W(24, 196\,560, x^{(1)}, \ldots, x^{(196\,560)}) \geq 2^{-11} c_0 \sum_{i,j=1}^{196\,560} P_0^{24}(x^{(i)} x^{(j)}) - 2^{-11} \sum_{i=1}^{196\,560} h(1).$$

Подставим c_0 и $h(1) = 4\,887\,241\,014\,331\,855\,346\,167/1\,968\,300\,000\,000\,000$. Ввиду произвольности выбора точек $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{196\,560}$ имеем

$$W(24, 196\,560) \geq \frac{211\,621\,330\,216\,387\,662\,351\,781}{207\,360\,000\,000\,000}.$$

Верхняя и нижняя оценки совпадают.

Те же самые выкладки проводятся и для $S(24, 196\,560)$. При этом знак неравенства меняется на обратный, а коэффициенты разложения интерполирующего полинома по полиномам Гегенбауэра оказываются отрицательными. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В.А. Юдину за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев В.К.* Асимптотически устойчивые расположения зарядов в вершинах единичного n-мерного куба // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 23. С. 27–42.
2. *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Kolushov A.V., Yudin V.A.* Extremal dispositions of points on the sphere // Anal. Math. 1997. V. 23, N 1. P. 25–34.
4. *Andreev N.N.* An extremal property of the icosahedron // East J. Approx. 1996. V. 2, N 4. P. 459–462.
5. *Колушов А.В., Юдин В.А.* О конструкции Коркина–Золотарева // Дискрет. математика. 1994. Т. 6, №1. С. 155–157.
6. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
7. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.