I. Sh. Mogilevskii, Estimates of solutions of a general initial-boundary value problem for linearized nonstationary Navier–Stokes system in the half-space, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 147–173

И.Ш.Могилевский

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

§ I. Введение

Настоящая работа посвящена оценкам в полупространстве $R_\infty = \{x,t : x\in R^3,\ x_3>0,\ t>0\}$ соболевских норм вектора $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и функции p, удовлетворяющих в R_∞ линейной однородной системе уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \bar{u} = 0, \tag{I.I}$$

начальному

$$\bar{u}\big|_{t=0} = 0 \tag{I.2}$$

и краевым условиям

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)(\bar{u},p)\Big|_{x_3=0} = \bar{\Phi}. \tag{I.3}$$

Здесь B – матричный дифференциальный оператор, т.е. матрица 3×4, элементами которой являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$

$$B = \{b_{ij}\} \qquad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)(\bar{u},p) = \left\{\sum_{j=1}^{3} b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_j + b_{i4}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)p\right\}, \quad i=1,2,3.$$

Систему (I.I) можно записать в матричной форме. Матрица системы (I.I)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left\{l_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right\} \qquad i,j=1,2,3,4$$

имеет вид

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}-\Delta, & 0, & 0, & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0, & \frac{\partial}{\partial t}-\Delta, & 0, & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0, & 0, & \frac{\partial}{\partial t}-\Delta, & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \frac{\partial}{\partial x_3}, & 0 \end{pmatrix}$$

или при $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\mathcal{L}(i\xi,s)=\begin{pmatrix} s+\xi^2, & 0, & 0, & i\xi_1 \\ 0, & s+\xi^2, & 0, & i\xi_2 \\ 0, & 0, & s+\xi^2, & i\xi_3 \\ i\xi_1, & i\xi_2, & i\xi_3, & 0 \end{pmatrix}$$

По аналогии с определением параболичности в [I] положим $s_1=s_2=s_3=0,\ s_4=-1,\ t_1=t_2=t_3=2,\ t_4=1$. Тогда каждый элемент матрицы $\mathcal{L}(i\xi,s)$ есть однородный полином степени s_k+t_j в следующем смысле: $\ell_{kj}(\lambda i\xi,\lambda^2 s)=\lambda^{s_k+t_j}(i\xi,s)\ell_{kj}(i\xi,s)$. Потребуем, чтобы существовали такие целые числа $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, что $b_{kj}(\lambda i\xi,\lambda^2 s)=\lambda^{\sigma_k+t_j}b_{kj}(i\xi,s)$. (Мы здесь считаем оператор B совпадающим со своей главной частью).

В работе получены точные по дифференциальному порядку оценки решения в пространствах Соболева, при некоторых условиях, налагаемых на оператор B. Ранее такие оценки были получены для первой ([2,3]) и второй ([4]) краевых задач, являющихся частными случаями задачи (I.I),(I.2),(I.3).

Задача с общими краевыми условиями первого порядка ($\sigma_i=-1$, $b_{i4}=0$, $i=1,2,3$) исследована в [5]. Там получены оценки L_p – норм слабого решения.

В заключение работы сформулирована теорема об оценке решения общей неоднородной краевой задачи в цилиндрической области $Q_T=\Omega\times(0,T)$. Доказательству этой теоремы предполагается посвятить отдельную статью.

Оценки решения задачи (I.I),(I.2),(I.3) получаются с помощью теоремы о мультипликаторах Фурье. В терминах преобразования Фурье формулируются и основные условия, налагаемые на оператор B. Эти условия являются аналогом условия дополнительности для параболических систем ([I]).

§ 2. Некоторые определения и вспомогательные факты

Норма в $L_q(R_\infty)$ определяется формулой
$$\|\bar u\|_{q,R_\infty}=\Big(\int\limits_{R_\infty}|\bar u(x,t)|^q\,dx\,dt\Big)^{1/q}.$$

Пространства Соболева $L_q^{(\varkappa,\nu)}$ подробно изучены в [7]. Здесь $\varkappa=(\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3)$, $\varkappa_i>0$, $\nu>0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Обобщенная функция f принадлежит пространству $L_q^{(\varkappa,\nu)}(R_\infty)$ если она является функцией, суммируемой по R_∞ в степени q вместе с ее лиувиллевскими обобщенными производными

$D^{\varkappa_i}_{x_i} f$, $i=1,2,3$, $D^{\nu}_t f$. Норма в $L^{(\varkappa,\nu)}_q(R_\infty)$ определяется равенством

$$\|f\|^{(\varkappa,\nu)}_{q,R_\infty} = \|f\|_{q,R_\infty} + \sum_{i=1}^{3} \|D^{\varkappa_i}_{x_i} f\|_{q,R_\infty} + \|D^{\nu}_t f\|_{q,R_\infty}.$$

При целых $\varkappa_i$, ν $L^{(\varkappa,\nu)}_q(R_\infty)$ совпадает с пространством Соболева $W^{\varkappa,\nu}_q(R_\infty)$. При нецелых $\varkappa_k$, ν производная $D^{\varkappa_k}_{x_k} f$ понимается как прообраз Фурье функции $(i\xi_k)^{\varkappa_k}\tilde{f}$.

$D^{\varkappa_k}_{x_k} f = F^{-1}[(i\xi_k)^{\varkappa_k} F f]$, где $\tilde{f} = Ff$ – преобразование Фурье функции f .

Для пространств $L^{(\tau)}_q$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ имеет место обычная система теорем вложения и продолжения.

ТЕОРЕМА 2.I ([7]). Оператор дифференцирования $D^{\bar{l}}$ ($\bar{l}$ – вектор с нецелыми, вообще говоря, компонентами) непрерывно переводит пространство $L^{(\tau)}_q(R^n)$ в пространство $L^{(\rho)}_q(R^n)$, где $\rho_i = \tau_i(1-\sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{\tau_j}) \geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2.2 ([7]). Имеет место непрерывное вложение

$$L^{(\tau)}_q(R^n) \longrightarrow B^{(\rho)}_q(R^m),\ \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n),\ \rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m),\ 1\leqslant m<n,$$

$$\rho_i = \varkappa\tau_i,\ (i=1,\ldots,m),\ \varkappa = 1-\frac{1}{q}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{\tau_j} > 0,$$

$B^{(\rho)}_q(R^m)$ – пространство Бесова ([6]).

Мы будем использовать теоремы о мультипликаторах Фурье в пространствах L_q , доказанные в [8] и [9] .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что $\Phi(\xi)\in \mathcal{M}^q_q$, если для $\forall\, v(x)\in C^\infty_0$ $\|F^{-1}\Phi(\xi)Fv\|_q \leqslant c\|v\|_q$ $(1\leqslant q<\infty)$. В этом случае функция $\Phi(\xi)$ называется мультипликатором Фурье класса (q,q)

$$\mathcal{M}^q_q(\Phi) = \sup_{v\in C^\infty_0} \frac{\|F^{-1}\Phi F v\|_q}{\|v\|_q}.$$

Имеет место теорема, обобщающая результаты Михлина-Марцинкевича ([8]).

Теорема 2.3. Пусть функция $\Phi(\xi)$ и ее производные $\frac{\partial^m \Phi}{\partial\xi_{k_1}\ldots\partial\xi_{k_m}}$ ($m\geqslant 1$; $k_1,\ldots,k_m$ – различны) непрерывны при $\xi_1\times\xi_2\times\ldots\times\xi_n\neq 0$ и удовлетворяют соотношениям

$$\left|\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_m}\frac{\partial^m\Phi}{\partial\xi_{k_1}\cdots\partial\xi_{k_m}}\right| \leqslant M.$$

Тогда Φ является мультипликатором класса (q,q) и $\mathcal{M}^q_q(\Phi)\leqslant cM$.

ТЕОРЕМА 2.4 ([9]). Пусть функции $H(x)$, $\varphi(x)$ заданы в пространстве R^n_+ $(x_n\geqslant 0)$, F' – преобразование Фурье по переменным $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Пусть, далее $H(\xi',t)\in\mathcal{M}^q_q$ (t – параметр) и $\varphi(x)\in L_q(R^n_+)$. Тогда, если $\mathcal{M}^q_q(H(\cdot,t))\leqslant\frac{c}{t}$ и

$$\mathcal{H}\varphi=\int_0^\infty F'^{-1}[H(\xi',t+\tau)(F'\varphi)(\xi',\tau)]\,d\tau \quad , \text{ то } \quad \|\mathcal{H}\varphi\|_{q,R_+^3}\leqslant c\|\varphi\|_{q,R_+^3}.$$

Мы будем также систематически пользоваться следующим элементарным неравенством

$$x^n e^{-xt}\leqslant \frac{c}{t^n}, \quad x,t>0. \tag{2.I}$$

Здесь и далее константы в неравенствах мы будем обозначать одной и той же буквой c .

§ 3. Оценка решения задачи (I.I),(I.2),(I.3)

Решение задачи (I.I),(I.2),(I.3) будем искать в классе функций $\vec{u}\in L_q^{(2\ell,\ell)}(R_\infty)$, $q>1$, ℓ – натуральное, $\nabla p\in L_q^{(2\ell-2,\ell-1)}(R_\infty)$. Производные, входящие в оператор B, понимаются в обычном смысле, поэтому $\sigma_i+3\leqslant 2\ell$, $i=1,2,3$.

Элементы матрицы B имеют вид

$$b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=P_{ij}^{2+\sigma_i}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right), \text{ при } j\leqslant 3 \text{ , и}$$

$$b_{i4}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=P_{i4}^{1+\sigma_i}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

где P_{ij}^n – полином степени n от 4-х переменных, однородный в указанном в § I смысле.

$$P_{kj}^n(i\xi,s)=\sum_{|\alpha|+2\beta=n}a_{\alpha\beta}^{kj}\cdot(i\xi)^\alpha\cdot s^\beta,$$

где $(i\xi)^\alpha=(i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}(i\xi_3)^{\alpha_3}$, α – мультииндекс.

Продолжим функции $\vec{u}, p$ нулем при $t<0$ и сделаем преобразование Фурье всех рассматриваемых функций по x_1, x_2 и Лапласа по t

$$Fu\equiv\tilde{u}(\xi_1,\xi_2,x_3,s)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{R^2}dx_1dx_2\int_0^\infty u(x,t)e^{-ix'\xi'-st}dt \tag{3.I}$$

$$x'=(x_1,x_2),\quad x'\cdot\xi'=x_1\xi_1+x_2\xi_2.$$

Для преобразованных функций задача (I.I),(I.2),(I.3) примет вид

$$\mathcal{L}\left(i\xi',\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial t}\right)(\tilde{\vec{u}},\tilde{p})=$$

$$=\begin{pmatrix} r^2-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & 0, & 0, & i\xi_1\\ 0, & r^2-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & 0, & i\xi_2\\ 0, & 0, & r^2-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ i\xi_1, & i\xi_2, & \frac{\partial}{\partial x_3}, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \tilde{u}_3\\ \tilde{p}\end{pmatrix}=0, \tag{3.2}$$

$$B\left(i\xi', \frac{\partial}{\partial x_3}, s\right)(\bar{\bar{u}},\tilde{p})\Big|_{x_3=0} = \bar{\bar{\Phi}}(\xi', s). \qquad (3.3)$$

Здесь $\tau=\sqrt{s+\xi'^2}$, $-\frac{\pi}{2}<\arg\tau\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Всякий вектор, удовлетворяющий уравнению (3.2) и стремящийся к 0 при $x_3\to+\infty$, можно представить в виде $(\bar{\bar{u}},\tilde{p})=\mathcal{M}\bar{c}$, где $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$ – вектор-константа, определяемый граничными условиями, а

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} i\xi_1 e^{-|\xi'|x_3}, & \tau e^{-\tau x_3}, & 0 \\ i\xi_2 e^{-|\xi'|x_3}, & 0, & \tau e^{-\tau x_3} \\ -|\xi'|e^{-|\xi'|x_3}, & i\xi_1 e^{-\tau x_3}, & i\xi_2 e^{-\tau x_3} \\ -s e^{-|\xi'|x_3}, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Такое представление вектора $(\bar{\bar{u}},\tilde{p})$ получено в [4]. Из (3.3) $B\mathcal{M}\bar{c}\big|_{x_3=0}=\bar{\bar{\Phi}}$. Обозначим $K=B\mathcal{M}\big|_{x_3=0}$. Тогда $\bar{c}=K^{-1}\bar{\bar{\Phi}}$ и

$$(\bar{\bar{u}},\tilde{p})=\mathcal{M}K^{-1}\bar{\bar{\Phi}}\equiv R\bar{\bar{\Phi}}. \qquad (3.4)$$

Выясним теперь при каких условиях на оператор B формула (3.4) имеет смысл и получаемое по этой формуле решение допускает оценку через данные задачи.

Пусть $\mathcal{D}=\det K$. Покажем прежде всего, что $\mathcal{D}=(\tau-|\xi'|)\mathcal{D}_1$ независимо от B. Здесь $\mathcal{D}_1(\xi', s)$ – однородная функция степени $\gamma+\sigma$, где $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$.

Условимся о следующих обозначениях. Если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots\cdots a_{kn} \end{pmatrix}$$

матрица, то i-ю строку будем обозначать A_i, а j-ый столбец – A^j. Если a, b – вектора с n компонентами, то $a\cdot b$ – скалярное произведение этих векторов. $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}\big|_{x_3=0}$, $B\left(i\xi', \frac{\partial}{\partial x_3}, s\right)\equiv B\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ – для сокращения записи будем указывать только второй аргумент.

$$K=B\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\mathcal{M}\Big|_{x_3=0}=\begin{pmatrix} B_1(-|\xi'|)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ B_2(-|\xi'|)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ B_3(-|\xi'|)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{D}=\begin{vmatrix} [B_1(-|\xi'|)-B_1(-\tau)]\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ [B_2(-|\xi'|)-B_2(-\tau)]\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|)-B_3(-\tau)]\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_1(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix} \qquad (3.5)$$

Очевидно, что первый определитель в (3.5) делится на $\tau-|\xi'|$, а второй равен $|B(-\tau)\mathcal{M}_0|\equiv \det(B(-\tau)\mathcal{M}_0)$. Вычислим этот последний определитель, используя формулу Бине-Коши.

Введем еще обозначения. Пусть имеется матрица A размерности $m\times n$. Будем обозначать через $A^{(k)}$ матрицу, получающуюся из A вычеркиванием k-ого столбца, а через $A_{(k)}$ - вычеркиванием k-ой строки. $A_i^{(k)}$ и $A_{(k)}^j$ - i-ая строка и j-ый столбец матрицы A соответственно, из которых вычеркнут k-ый элемент. Теперь мы можем записать

$$|B(-\tau)\mathcal{M}_0|=\sum_{j=1}^{4}|B^{(j)}(-\tau)\mathcal{M}_{0(j)}|;$$

$$|\mathcal{M}_{0(1)}|=i\xi_1 s\tau; \qquad |\mathcal{M}_{0(2)}|=-i\xi_2 s\tau;$$

$$|\mathcal{M}_{0(3)}|=-s\tau^2; \qquad |\mathcal{M}_{0(4)}|=\tau|\xi'|(|\xi'|-\tau).$$

Учитывая, что $s=(\tau-|\xi'|)(\tau+|\xi'|)$, получаем, что $|B(-\tau)\mathcal{M}_0|$ делится на $\tau-|\xi'|$ и, следовательно,

$$\mathfrak{D}=(\tau-|\xi'|)\mathfrak{D}_1. \qquad (3.6)$$

То, что степень однородности $\mathfrak{D}_1$ равна $8+6$, устанавливается простым подсчетом.

Приступим теперь к выяснению структуры элементов матрицы $R=\mathcal{M}K^{-1}$. Для этого вычислим сначала матрицу K^{-1}. Через K^{ij} будем обозначать алгебраическое дополнение элемента K_{ji} матрицы K.

$$K^{-1}=\frac{1}{\mathfrak{D}}\begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{pmatrix}$$

$$K^{1i}=|B_{(i)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}| \qquad i=1,2,3$$

$$K^{21}=-\begin{vmatrix} B_2(-|\xi'|)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ B_3(-|\xi'|)\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot\mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} [B_2(-|\xi'|)-B_2(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|)-B_3(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix} - |B_{(1)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(2)}| =$$

$$= -\begin{vmatrix} [B_2(-|\xi'|)-B_2(-\tau)]\mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|)-B_3(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{24}(-\tau)s, & B_2(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \\ b_{34}(-\tau)s, & B_3(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} B_2^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^1, & B_2^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^3 \\ B_3^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^1, & B_3^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^3 \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{vmatrix} B_2^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^1, & B_2^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^3 \\ B_3^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^1, & B_3^{(4)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_{0(4)}^3 \end{vmatrix}$$

есть алгебраическое дополнение f^{21} элемента f_{12} матрицы $F = B^{(4)}(-\tau)\mathcal{M}_{0(4)}$. Тогда $K^{21} = f^{21} + g_{21}$, где

$$g_{21} = -\begin{vmatrix} [B_2(-|\xi'|)-B_2(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, & B_2(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|)-B_3(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, & B_3(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix} + s\begin{vmatrix} b_{24}(-\tau), & B_2(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \\ b_{34}(-\tau), & B_3(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix}$$

Аналогично получим

$$K^{2i} = f^{2i} + g_{2i}, \quad K^{3i} = f^{3i} + g_{3i}, \quad i = 1,2,3 \tag{3.7}$$

$$g_{2i} = (-1)^i \{ |[B_{(i)}(-|\xi'|)-B_{(i)}(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, \ B_{(i)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3]| - \\ - s|B_{(i)}^4(-\tau), B_{(i)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^3| \}, \tag{3.8}$$

$$g_{3i} = (-1)^{1+i} \{ |[B_{(i)}(-|\xi'|)-B_{(i)}(-\tau)]\cdot \mathcal{M}_0^1, \ B_{(i)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^2| - \\ - s|B_{(i)}^4(-\tau), B_{(i)}(-\tau)\cdot \mathcal{M}_0^2| \}. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $K^{1i} = f^{1i}$.

Пусть $\hat{A}$ есть матрица, ассоциированная с матрицей A , т.е. $\hat{A} = \det A \cdot A^{-1}$. Тогда $\hat{K} = \hat{F} + G$, где

$$G = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ g_{21}, & g_{22}, & g_{23} \\ g_{31}, & g_{32}, & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Из (3.8) и (3.9) заключаем, что все элементы матрицы G делятся на $\tau - |\xi'|$.

$$\hat{F} = \widehat{B^{(4)}(-\tau)\mathcal{M}_{0(4)}} = \widehat{\mathcal{M}_{0(4)}}\,\widehat{B^{(4)}(-\tau)}$$

$$\widehat{\mathcal{M}_{0(4)}}=\begin{pmatrix} -i\xi_1\tau, & -i\xi_2\tau, & \tau^2 \\ \xi_2^2-\tau|\xi'|, & -\xi_1\xi_2, & -i\xi_1\tau \\ -\xi_1\xi_2, & \xi_1^2-\tau|\xi'|, & -i\xi_2\tau \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$K^{-1}=\frac{\hat{K}}{\mathfrak{D}}=\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\widehat{\mathcal{M}_{0(4)}}\,\widehat{B^{(4)}(-\tau)}+G\right]. \tag{3.11}$$

Рассмотрим матрицу $\mathcal{M}_{(4)}$. Ее можно представить в виде

$$\mathcal{M}_{(4)}=(\mathcal{M}^1_{(4)},0,0)\left[e^{-|\xi'|x_3}-e^{-\tau x_3}\right]+\mathcal{M}_{0(4)}e^{-\tau x_3}.$$

Отсюда, используя (3.10) и (3.11), получим

$$R_{(4)}=\mathcal{M}_{(4)}K^{-1}=\frac{1}{\mathfrak{D}}\{(\mathcal{M}^1_{(4)},0,0)[e^{-|\xi'|x_3}-e^{-\tau x_3}]+$$

$$+\mathcal{M}_{0(4)}e^{-\tau x_3}\}\{\widehat{\mathcal{M}_{0(4)}}\,\widehat{B^{(4)}(-\tau)}+G\}=$$

$$=\frac{1}{\mathfrak{D}}\left\{\tau\begin{pmatrix} \xi_1^2, & \xi_1\xi_2, & i\xi_1\tau \\ \xi_1\xi_2, & \xi_2^2, & i\xi_2\tau \\ i\xi_1|\xi'|, & i\xi_2|\xi'|, & -\tau|\xi'| \end{pmatrix}\widehat{B^{(4)}(-\tau)}\left[e^{-|\xi'|x_3}-e^{-\tau x_3}\right]+\right.$$

$$\left.+\tau|\xi'|(|\xi'|-\tau)\widehat{B^{(4)}(-\tau)}\cdot e^{-\tau x_3}+\mathcal{M}_{0(4)}G\cdot e^{-\tau x_3}\right\}.$$

Отсюда получаем

$$R_{ij}=\frac{\tau P_{ij}}{\mathfrak{D}_1}\cdot\frac{e^{-|\xi'|x_3}-e^{-\tau x_3}}{|\xi'|-\tau}+\frac{Q_{ij}}{\mathfrak{D}_1}e^{-\tau x_3},\quad 1\leq i,j\leq 3, \tag{3.12}$$

где $P_{ij}=-H_i\cdot N^j,\quad Q_{ij}=-\tau|\xi'|n_{ij}+\mathcal{M}_{0i}\cdot\frac{G^j}{\tau-|\xi'|}$,

$$H=\begin{pmatrix} \xi_1^2, & \xi_1\xi_2, & i\xi_1\tau \\ \xi_1\xi_2, & \xi_2^2, & i\xi_2\tau \\ i\xi_1|\xi'|, & i\xi_2|\xi'|, & -\tau|\xi'| \end{pmatrix},\quad N=\{n_{ij}\}_{i,j=1}^3, \tag{3.13}$$

$$n_{1i}=|B^2_{(i)},B^3_{(i)}|\cdot(-1)^{1+i},\quad n_{2i}=(-1)^i|B^1_{(i)},B^3_{(i)}|,$$
$$n_{3i}=(-1)^{1+i}|B^1_{(i)},B^2_{(i)}|, \tag{3.14}$$

$$R_{4i}=-\frac{3K^{4i}}{\mathfrak{D}}e^{-|\xi'|x_3}=-\frac{(\tau+|\xi'|)|B_{(i)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(i)}|}{\mathfrak{D}_1}e^{-|\xi'|x_3}, \tag{3.15}$$

$$i=1,2,3.$$

Сформулируем теперь те условия, которым должен удовлетворять определитель $\mathfrak{D}$ для того, чтобы мы могли получить оценку решения задачи. Именно, потребуем, чтобы корень $\tau=|\xi'|$ функции $\mathfrak{D}$ имел единичную кратность. Выразим это условие через элементы матрицы B.

Указанное условие можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}\Big|_{s=0} \neq 0. \qquad (3.16)$$

Воспользуемся формулой (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}P_1(i\xi',\tau,s)\Big|_{s=0} + \frac{d}{ds}P_2(i\xi',\tau,s)\Big|_{s=0}, \qquad (3.17)$$

где $\frac{d}{ds}$ означает полную производную по s,

$$P_1(i\xi',\tau,s) = \begin{vmatrix} [B_1(i\xi',-|\xi'|,s)-B_1(i\xi',-\tau,s)]\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_1(i\xi',-\tau,s)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_1(i\xi',-\tau,s)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ [B_2(i\xi',-|\xi'|,s)-B_2(i\xi',-\tau,s)]\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_2(i\xi',-\tau,s)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_2(i\xi',-\tau,s)\cdot\mathcal{M}_0^3 \\ [B_3(i\xi',-|\xi'|,s)-B_3(i\xi',-\tau,s)]\cdot\mathcal{M}_0^1, & B_3(i\xi',-\tau,s)\cdot\mathcal{M}_0^2, & B_3(i\xi',-\tau,s)\cdot\mathcal{M}_0^3 \end{vmatrix},$$

$$P_2(i\xi',\tau,s) = |B(i\xi',-\tau,s)\mathcal{M}_0|.$$

Пусть для краткости $P_1(i\xi',\tau,s) = |\mathcal{P}_1|$, где $\mathcal{P}_1$ - соответствующая матрица.

$$\frac{d}{ds}P_1(i\xi',\tau,s)\Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha_3}P_1(i\xi',|\xi'|,0) + \frac{1}{2|\xi'|}\frac{\partial}{\partial\tau}P_1(i\xi',\tau,0)\Big|_{\tau=|\xi'|}, \qquad (3.18)$$

где $\frac{\partial}{\partial\alpha_i}$ означает дифференцирование по i-ому аргументу.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}P_1(i\xi',|\xi'|,0) = \left|\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\mathcal{P}_1^1(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^2(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^3(i\xi',|\xi'|,0)\right| +$$

$$+\left|\mathcal{P}_1^1(i\xi',|\xi'|,0), \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\mathcal{P}_1^2(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^3(i\xi',|\xi'|,0)\right| +$$

$$+\left|\mathcal{P}_1^1(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^2(i\xi',|\xi'|,0), \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\mathcal{P}_1^3(i\xi',|\xi'|,0)\right|.$$

Так как $\mathcal{P}_1^1(i\xi',|\xi'|,0)=0$ и $\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\mathcal{P}_1^1(i\xi',|\xi'|,0)=0$, то

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}P_1(i\xi',|\xi'|,0)=0. \qquad (3.19)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}P_1(i\xi',\tau,0)\Big|_{\tau=|\xi'|} = \left|\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_1^1(i\xi',\tau,0)\Big|_{\tau=|\xi'|}, \mathcal{P}_1^2(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^3(i\xi',|\xi'|,0)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B(i\xi',-|\xi'|,0)\mathcal{M}_0^1\Big|_{\tau=|\xi'|}, \mathcal{P}_1^2(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^3(i\xi',|\xi'|,0)\right| +$$

$$+\left|[B(i\xi',-|\xi'|,0)-B(i\xi',-\tau,0)]\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{M}_0^1\Big|_{\tau=|\xi'|}, \mathcal{P}_1^2(i\xi',|\xi'|,0), \mathcal{P}_1^3(i\xi',|\xi'|,0)\right| =$$

$$=\left|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B(i\xi',-|\xi'|,0)\mathcal{M}_0^1\Big|_{\tau=|\xi'|}, B(i\xi',-|\xi'|,0)\mathcal{M}_0^2\Big|_{\tau=|\xi'|}, B(i\xi',-|\xi'|,0)\mathcal{M}_0^3\Big|_{\tau=|\xi'|}\right|.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{M}_0\Big|_{s=0}=\begin{pmatrix} i\xi_1 & |\xi'| & 0 \\ i\xi_2 & 0 & |\xi'| \\ -|\xi'| & i\xi_1 & i\xi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}P_1(i\xi',\tau,0)\Big|_{\tau=|\xi'|}=i\xi_1|\xi'|^2\Big[\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^1(-|\xi'|),B^1(-|\xi'|),B^2(-|\xi'|)\Big|-$$
$$-|B^2(-|\xi'|),\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^3(-|\xi'|),B^3(-|\xi'|)|\Big]+i\xi_2|\xi'|^2\Big[|B^1(-|\xi'|),\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^3(-|\xi'|),B^3(-|\xi'|)|-$$
$$-|B^1(-|\xi'|),\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^2(-|\xi'|),B^2(-|\xi'|)|\Big]+\xi_1\xi_2|\xi'|\Big[\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^2(-|\xi'|),B^2(-|\xi'|),B^3(-|\xi'|)\Big|-$$
$$-\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^1(-|\xi'|),B^1(-|\xi'|),B^3(-|\xi'|)\Big|\Big]+\xi_1^2|\xi'|\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^1(-|\xi'|),B^2(-|\xi'|),B^3(-|\xi'|)\Big|+$$
$$+\xi_2^2|\xi'|\Big|B^1(-|\xi'|),\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^2(-|\xi'|),B^3(-|\xi'|)\Big|-|\xi'|^3\Big|B^1(-|\xi'|),B^2(-|\xi'|),\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^3(-|\xi'|)\Big|. \tag{3.20}$$

В записи вновь оставлен только второй аргумент.

Для вычисления $\frac{d}{ds}P_2(i\xi',\tau,s)\Big|_{s=0}$ воспользуемся выкладками, сделанными при выводе (3.6).

$$\frac{d}{ds}P_2(i\xi',\tau,s)\Big|_{s=0}=\sum_{j=1}^{4}\Big[\frac{d}{ds}|B^{(j)}(-\tau)||\mathcal{M}_{0(j)}|+|B^{(j)}(-\tau)|\cdot\frac{d}{ds}|\mathcal{M}_{0(j)}|\Big]_{s=0},$$

$$|\mathcal{M}_{0(j)}|_{s=0}=0,\quad j=1,2,3,4$$

$$\frac{d}{ds}|\mathcal{M}_{0(1)}|_{s=0}=i\xi_1|\xi'|;\qquad \frac{d}{ds}|\mathcal{M}_{0(2)}|_{s=0}=i\xi_2|\xi'|;$$

$$\frac{d}{ds}|\mathcal{M}_{0(3)}|_{s=0}=-|\xi'|^2;\qquad \frac{d}{ds}|\mathcal{M}_{0(4)}|_{s=0}=-\frac{|\xi'|}{2}.$$

Отсюда и из (3.17)-(3.20) получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{D}\Big|_{s=0}=i\xi_1|\xi'|\Big[\frac{1}{2}\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^1,B^1,B^2\Big|-\frac{1}{2}\Big|B^2,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^3,B^3\Big|+|B^{(1)}|\Big]_{s=0}+$$
$$+i\xi_2|\xi'|\Big[\frac{1}{2}\Big|B^1,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^3,B^3\Big|-\frac{1}{2}\Big|B^1,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^2,B^2\Big|-|B^{(2)}|\Big]_{s=0}+$$
$$+\frac{\xi_1\xi_2}{2}\Big[\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^2,B^2,B^3\Big|-\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^1,B^1,B^3\Big|\Big]_{s=0}+\frac{\xi_1^2}{2}\Big|\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^1,B^2,B^3\Big|_{s=0}+$$
$$+\frac{\xi_2^2}{2}\Big|B^1,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^2,B^3\Big|_{s=0}-|\xi'|^2\Big[\frac{1}{2}\Big|B^1,B^2,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}B^3\Big|+|B^{(3)}|\Big]_{s=0}-\frac{1}{2}|\xi'||B^{(4)}| \tag{3.21}$$

Это и есть искомое выражение для левой части (3.16).

Пусть $P^n(x_1,\dots,x_m)$ – полином степени n. Обозначим через $d(x_i,P^n)$ целое число, равное максимальной степени, с которой x_i входит в P^n.

Из (3.6) и (3.16) следует, что $\mathfrak{D}_1|_{s=0}\neq 0$. Тогда мы можем записать, что

$$\mathfrak{D}_1(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau)=\mathfrak{D}_2(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau)\cdot\mathfrak{D}_3(\xi_1,\xi_2,|\xi'|), \tag{3.22}$$

где $\mathfrak{D}_i$ однородные функции своих аргументов степени $m_i'\cdot m_2'+ +m_3'=8+\sigma$, $m_2'\geqslant 1$, $m_3'\geqslant 0$. При этом $d(\tau,\mathfrak{D}_2)=m_2\leqslant m_2'$

Сформулируем еще два требования на функцию $\mathfrak{D}$. Требуется, чтобы:

а) все корни s_i $(i=1,\dots,m_2)$ функции $\mathfrak{D}_2(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau)$ удовлетворяли неравенству $\operatorname{Re} s_i\leqslant-\delta|\xi'|^2$, $\delta>0$;

в) $\mathfrak{D}_3(\xi_1,\xi_2,|\xi'|)=0\Longleftrightarrow|\xi'|=0$ (при $m_3>0$).

Докажем теперь несколько лемм, которые понадобятся нам при оценке решения. Пусть $P^n(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau)$ и $P^m(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau)$ – однородные полиномы степеней n и m соответственно; $n,m\geqslant 1$. Пусть, далее, P^n удовлетворяет условиям а) и в), $P^n|_{s=0}\neq 0$.

ЛЕММА 3.1. Если $m=n+1$ и $d(\tau,P^m)\leqslant d(\tau,P^n)$, то

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\leqslant\frac{c}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s>0$ P^n не имеет корней по s. Поэтому по теореме 2.3 нам достаточно показать, что в этой полуплоскости выполняются неравенства:

$$\left|\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{t}\qquad i=1,2 \tag{3.23}$$

$$\left|\xi_1\xi_2\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{t} \tag{3.24}$$

$$\left|s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{t} \tag{3.25}$$

$$\left|\xi_i s\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{t}\qquad i=1,2 \tag{3.26}$$

$$\left|\xi_1\xi_2 s\frac{\partial^3}{\partial\xi_1\partial\xi_2\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{t}. \tag{3.27}$$

Мы докажем неравенства (3.23) и (3.25). Остальные доказываются аналогично.

$$\left|\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\right)\right|=\left|\xi_i\,\frac{\frac{\partial}{\partial\xi_i}P^m\cdot P^n-P^m\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_i}P^n}{(P^n)^2}\,e^{-|\xi'|t}-\right.$$

$$-\frac{P^m}{P^n}\frac{\xi_i^2}{|\xi'|}te^{-|\xi'|t}\Big| < \Big|\xi_i\frac{\frac{\partial}{\partial\xi_i}P^m\cdot P^n - P^m\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_i}P^n}{(P^n)^2|\xi'|}\Big||\xi'|e^{-|\xi'|t} +$$

$$+\Big|\frac{P^m}{P^n|\xi'|}\Big|\cdot\Big||\xi'|^2te^{-|\xi'|t}\Big|.$$

Используя неравенство (2.I), получаем

$$\Big|\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\Big)\Big| \leqslant \Big\{\Big|\xi_i\frac{\frac{\partial}{\partial\xi_i}P^mP^n - P^m\frac{\partial}{\partial\xi_i}P^n}{(P^n)^2|\xi'|}\Big| + \Big|\frac{P^m}{P^n|\xi'|}\Big|\Big\}\frac{c}{t}. \tag{3.28}$$

Из условия леммы

$$m - d(\tau, P^m) \geqslant n + 1 - d(\tau, P^n). \tag{3.29}$$

Поэтому кратность корня $|\xi'|=0$ функции P^m не меньше кратности того же корня функции $P^n\cdot|\xi'|$. Следовательно

$$\Big|\frac{P^m}{P^n|\xi'|}\Big| \leqslant c. \tag{3.30}$$

Пусть для определенности $i=1$.

$$\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}P^m = \xi_1\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi_2^{\alpha_2}\Big[\alpha_1\xi_1^{\alpha_1-1}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4} + \xi_1^{\alpha_1}\cdot\alpha_3|\xi'|^{\alpha_3-1}\cdot\frac{\xi_1}{|\xi'|}\tau^{\alpha_4} +$$

$$+\alpha_4\xi_1^{\alpha_1}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4-1}\cdot\frac{\xi_1}{\tau}\Big] = \sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi_2^{\alpha_2}\Big[\alpha_1\xi_1^{\alpha_1}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4} +$$

$$+\alpha_3\xi_1^{\alpha_1+1}|\xi'|^{\alpha_3-2}\tau^{\alpha_4} + \alpha_4\xi_1^{\alpha_1+2}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4-2}\Big],$$

a_α – коэффициенты полинома P^n; $P^n = \sum_{|\alpha|=n}a_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4}$.

Используя условия леммы и (3.29), получаем отсюда, что

$$\Big|\frac{\xi_i}{|\xi'|}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big(\frac{P^m}{P^n}\Big)\Big| \leqslant c. \tag{3.31}$$

Из (3.28),(3.30) и (3.31) следует (3.23).

$$\Big|s\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{P^m}{P^n}e^{-|\xi'|t}\Big)\Big| = \Big|s\frac{\frac{\partial}{\partial s}P^m\cdot P^n - P^m\frac{\partial}{\partial s}P^n}{(P^n)^2}e^{-|\xi'|t}\Big| =$$

$$= \Big|\frac{s}{|\xi'|}\frac{\frac{\partial}{\partial s}P^m\cdot P^n - P^m\cdot\frac{\partial}{\partial s}P^n}{(P^n)^2}\Big|\Big||\xi'|e^{-|\xi'|t}\Big| \leqslant \Big|\frac{s}{|\xi'|}\frac{\frac{\partial}{\partial s}P^m\cdot P^n - P^m\cdot\frac{\partial}{\partial s}P^n}{(P^n)^2}\Big|\cdot\frac{c}{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}P^m = \sum_{|\alpha|=m}\alpha_4a_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4-1}\frac{\partial\tau}{\partial s} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=m}\alpha_4a_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}|\xi'|^{\alpha_3}\tau^{\alpha_4-2}.$$

Отсюда, из (3.29) и из условий леммы имеем

$$\left|\frac{s}{|\xi'|}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\right|\leqslant c,$$

что и доказывает (3.25). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Если $m=n+1$ и $d(\tau,P^m)<d(\tau,P^n)+1$, то

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-\tau t}\right)\leqslant\frac{c}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как и в лемме 3.1, нам достаточно показать, что при $\operatorname{Re}s>0$

$$\left|\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-\tau t}\right)\right|<\frac{c}{t},\quad i=1,2 \tag{3.32}$$

и

$$\left|s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-\tau t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{t}. \tag{3.33}$$

Пусть для определенности $i=1$.

$$\left|\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-\tau t}\right)\right|=\left|\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)e^{-\tau t}-\xi_1^2\frac{P^m}{P^n\cdot\tau}te^{-\tau t}\right|<$$

$$\leqslant\left|\frac{\xi_1}{\operatorname{Re}\tau}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\right|\left|\operatorname{Re}\tau\cdot e^{-\tau t}\right|+\left|\frac{\xi_1^2}{\tau(\operatorname{Re}\tau)^2}\frac{P^m}{P^n}\right|\cdot\left|(\operatorname{Re}\tau)^2te^{-\tau t}\right|<$$

$$\leqslant\left\{\left|\frac{\xi_1}{\operatorname{Re}\tau}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\right|+\left|\frac{\xi_1^2}{\tau(\operatorname{Re}\tau)^2}\frac{P^m}{P^n}\right|\right\}\cdot\frac{c}{t}. \tag{3.34}$$

Из условия леммы

$$m-d(\tau,P^m)\geqslant n-d(\tau,P^n). \tag{3.35}$$

Поэтому кратность корня $|\xi'|=0$ функции P^m не меньше кратности того же корня функции P^n. Отсюда получаем

$$\left|\frac{\xi_1}{\operatorname{Re}\tau}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\right|\leqslant c,\qquad\left|\frac{\xi_1^2}{\tau(\operatorname{Re}\tau)^2}\frac{P^m}{P^n}\right|\leqslant c.$$

Это и (3.34) дает (3.32).

$$\left|s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}e^{-\tau t}\right)\right|\leqslant\left|s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)e^{-\tau t}\right|+\left|\frac{st}{2\tau}\frac{P^m}{P^n}e^{-\tau t}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{s}{\operatorname{Re}\tau}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\right|\cdot\left|\operatorname{Re}\tau\cdot e^{-\tau t}\right|+\left|\frac{s}{2\tau(\operatorname{Re}\tau)^2}\frac{P^m}{P^n}\right|\cdot\left|(\operatorname{Re}\tau)^2te^{-\tau t}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \left| \frac{s}{\operatorname{Re}\tau} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\right) \right| + \left| \frac{s}{2\tau(\operatorname{Re}\tau)^2} \frac{P^m}{P^n} \right| \right\} \cdot \frac{c}{t}.$$

Из условий леммы и (3.35) получаем (3.33). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Если $m=n+2$ и $d(\tau,P^m)\leqslant d(\tau,P^n)+1$, то

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\leqslant \frac{c}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в леммах 3.I и 3.2, мы покажем, что при $\operatorname{Re} s>0$

$$\left|\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\right| \leqslant \frac{c}{t} \tag{3.36}$$

и

$$\left|s \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\right| \leqslant \frac{c}{t}. \tag{3.37}$$

Докажем сначала (3.36).

$$\left|\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\right| = \left|\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{P^m}{P^n}\right) \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau} - \right.$$

$$- \xi_i \frac{P^m}{P^n} \frac{\tau\xi_i t e^{-|\xi'|t} - \xi_i|\xi_i'|t e^{-\tau t}}{\tau|\xi'|(|\xi'|-\tau)} - \frac{\xi_i^2(\tau-|\xi'|)}{\tau|\xi'|} \frac{P^m}{P^n} \times$$

$$\left. \times \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{(|\xi'|-\tau)^2}\right| \leqslant \left|\frac{\xi_i}{|\xi'|\tau} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{P^m}{P^n}\right| \cdot \left| |\xi'|\tau \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right| +$$

$$+ \left|\frac{P^m}{P^n|\xi'|\tau}\right| \cdot \left|\xi_i \frac{\tau t e^{-|\xi'|t} - |\xi'|t e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right| + \left|\frac{P^m}{P^n|\xi'|\tau}\right| \times$$

$$\times \left|\xi_i^2 \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|. \tag{3.38}$$

При $\operatorname{Re} s>0$ $\operatorname{Re}\tau>|\xi'|$. Тогда

$$\left| |\xi'|\tau \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right| = |\xi'| \left| (\tau-|\xi'|) \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau} + |\xi'| \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi'|e^{-|\xi'|t} + |\xi'|e^{-\operatorname{Re}\tau t} + |\xi'|^2\left|\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right| \leqslant \frac{c}{t} + |\xi'|e^{-|\xi'|t} +$$

$$+ |\xi'|^2\left|\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right| < \frac{2c}{t} + |\xi'|^2\left|\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|,$$

$$\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}=\frac{e^{-|\xi'|t}}{|\xi'|-\tau}\left(1-e^{-(\tau-|\xi'|)t}\right)=$$

$$=e^{-|\xi'|t}\int_0^t e^{-(\tau-|\xi'|)\sigma}\,d\sigma. \tag{3.39}$$

Так как $\operatorname{Re}\tau>|\xi'|$, то в последнем интеграле модуль подинтегральной функции не превосходит 1, поэтому

$$|\xi'|^2\left|\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|\leqslant e^{-|\xi'|t}\cdot t|\xi'|^2\leqslant\frac{c}{t}.$$

Отсюда и из (3.39) получаем, что

$$\left||\xi'|\,\tau\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|<\frac{c}{t}. \tag{3.40}$$

Аналогично получим

$$\left|\xi_i^2\,\frac{\tau t e^{-|\xi'|t}-|\xi'|te^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|=\left|\xi_i^2 t\,\frac{(\tau-|\xi'|)e^{-|\xi'|t}+|\xi'|(e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t})}{|\xi'|-\tau}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left||\xi'|^2te^{-|\xi'|t}\right|+|\xi'|^3t\left|\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi'|^2te^{-|\xi'|t}+|\xi'|^3t^2e^{-|\xi'|t}\leqslant\frac{c}{t}, \tag{3.41}$$

$$\left|\xi_i^2\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|\leqslant|\xi'|^2te^{-|\xi'|t}\leqslant\frac{c}{t}. \tag{3.42}$$

Из условий леммы следует, что

$$\left|\frac{\xi_i}{|\xi'|\tau}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{P^m}{P^n}\right|\leqslant c \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{P^m}{|\xi'|\tau P^n}\right|\leqslant c.$$

Отсюда и из (3.38)-(3.42) следует (3.36).

Перейдем теперь к доказательству (3.37).

$$\left|s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\right|=\left|s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right.+$$

$$+\left.s\frac{P^m}{P^n}\,\frac{te^{-\tau t}}{2\tau(|\xi'|-\tau)}+s\frac{P^m}{P^n}\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{2\tau(|\xi'|-\tau)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{s}{|\xi'|\tau}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P^m}{P^n}\right)\right|\cdot\left||\xi'|\tau\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|+\left|\frac{\tau+|\xi'|}{2\tau(\operatorname{Re}\tau)^2}\,\frac{P^m}{P^n}\right|\times$$

$$\times\left|(\operatorname{Re}\tau)^2+e^{-\tau t}\right|+\left|\frac{\tau+|\xi'|}{2\tau^2|\xi'|}\ \frac{P^m}{P^n}\right|\cdot\left||\xi'|\tau\ \frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right|.$$

Из условий леммы, (2.I) и (3.40) получаем (3.37). Лемма доказана.

Выразим теперь решение задачи (I.I),(I.2),(I.3) через краевые условия и получим оценку этого решения. Пусть $\tilde{v}_{ij}=R_{ij}\tilde{\Phi}_j$, $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3$. Тогда из (3.4)

$$\tilde{u}_i=\sum_{j=1}^{3}\tilde{v}_{ij}\ ;\qquad \tilde{p}=\sum_{j=1}^{3}\tilde{v}_{4j}\,. \tag{3.43}$$

Обозначим через Ψ_j продолжение функции Φ_j в R_∞ по x_3. По теореме продолжения из [7]

$$\Psi_j\in L_q^{(2\ell-2-\sigma_j,\ \ell-1-\frac{\sigma_j}{2})}(R_\infty)\qquad,\ \text{если только}$$

$$\Phi_j\in L_q^{(2\ell-2-\sigma_j-\frac{1}{q},\ \ell-1-\frac{\sigma_j}{2}-\frac{1}{2q})}(R^3_+),\ \ R^3_+=\{x,t:\ x\in R^2,\ t>0\}.$$

Запишем теперь v_{ij} следующим образом

$$v_{ij}(x,t)=F^{-1}(\tilde{v}_{ij}(\xi',x_3,s))=$$

$$=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial y_3}F^{-1}[R_{ij}(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau,x_3+y_3)\tilde{\Psi}_j(\xi',y_3,s)]dy_3=$$

$$=-\int_0^\infty F^{-1}[R_{ij}(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau,x_3+y_3)\frac{\partial}{\partial y_3}\tilde{\Psi}_j(\xi',y_3,s)]dy_3-$$

$$-\int_0^\infty F^{-1}[\frac{\partial}{\partial y_3}R_{ij}(\xi_1,\xi_2,|\xi'|,\tau,x_3+y_3)\cdot\tilde{\Psi}(\xi',y_3,s)]dy_3. \tag{3.44}$$

Мы будем пользоваться следующими фактами, вытекающими из определения дробной производной через преобразование Фурье-Лапласа:

$$\|F^{-1}(\tau^m\tilde{f})\|_{q,R_\infty}\leqslant c\langle\langle f\rangle\rangle^{(m,\frac{m}{2})}_{q,R_\infty}\leqslant c\left\{\|F^{-1}(\tau^m\tilde{f})\|_{q,R_\infty}+\left\|\frac{\partial^m}{\partial x_3^m}f\right\|_{q,R_\infty}\right\}, \tag{3.45}$$

$$\|F^{-1}(|\xi'|\tilde{f})\|_{q,R_\infty}\leqslant c\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}f\right\|_{q,R_\infty}. \tag{3.46}$$

Здесь $\langle\langle f\rangle\rangle^{(m,\frac{m}{2})}_{q,R_\infty}$ – главная часть нормы $\|f\|^{(m,\frac{m}{2})}_{q,R_\infty}$.

Элементы четвертого столбца граничного оператора B представим в виде

$$b_{i4}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=b'_{i4}D_t^{\mu_i}+b''_{i4}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad i=1,2,3, \tag{3.47}$$

где b'_{i4} – коэффициент при старшей чистой производной по t.
$b'_{i4}=0$ при σ_i четном. При σ_i нечетном $\mu_i=\frac{\sigma_i+1}{2}$.
Если оператор b''_{i4} отличен от нулевого, то каждое его слагаемое обязательно содержит производные по пространственным переменным x. В соответствии с этим граничные условия Φ_i будем брать из класса

$$\Phi_i\in L_q^{(2\ell-2-\sigma_i-1/q,\,\ell-1-\sigma_i/2-1/2q)}(\Sigma_\infty)\quad,\text{ если } b'_{i4}=0 \text{ и}$$

$$\sum_{|\nu|+2\mu=2\ell-3-\sigma_i} D_x^\nu D_t^\mu\Phi_i\in L_q^{(1-\frac{1}{q},0)}(\Sigma_\infty)\quad,\text{ если } b'_{i4}\neq 0.$$

$$\Sigma_\infty=R^2\times(0,\infty)\quad (x'\in R^2,\ t\in(0,\infty)).$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3.I. Если $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям (3.I6), а), в) и

$$\begin{aligned}
&d(\tau,P_{ij})\leqslant m_i-3-\sigma_j,\quad d(\tau,|B_{(j)}\mathcal{M}_0^{(1)}|)\leqslant m_2-2-\sigma_j,\\
&d(\tau,Q_{ij})\leqslant m_i-2-\sigma_j\quad \text{при } b'_{j4}=0,\\
&d(\tau,Q_{ij})\leqslant m_2-3-\sigma_j\quad \text{при } b'_{j4}=0,\\
&i,j=1,2,3,
\end{aligned}\tag{3.48}$$

то для решения задачи (I.I),(I.2),(I.3) справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{3}\langle\langle u_i\rangle\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell,\ell)}+\langle\langle\nabla p\rangle\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell-2,\ell-1)}\leqslant c\sum_{i=1}^{3}\mathcal{J}^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_i),\tag{3.49}$$

где

$$\mathcal{J}^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_i)=\langle\langle\Phi_i\rangle\rangle_{q,\Sigma_\infty}^{(2\ell-2-\sigma_i-\frac{1}{q},\,\ell-1-\frac{\sigma_i}{2}-\frac{1}{2q})}\qquad \text{при } b'_{i4}=0$$

и

$$\mathcal{J}^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_i)=\langle\langle\sum_{|\nu|+2\mu=2\ell-3-\sigma_i}D_{x'}^\nu D_t^\mu\Phi_i\rangle\rangle_{q,\Sigma_\infty}^{(1-\frac{1}{q},0)}\qquad \text{при } b'_{i4}\neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим сначала компоненты вектора скорости u_i $(i=1,2,3)$. Из (3.45) следует, что нам достаточно оценить

$$\left\|F^{-1}(\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij})\right\|_{q,R_\infty}+\left\|\frac{\partial^{2\ell}}{\partial x_3^{2\ell}}v_{ij}\right\|_{q,R_\infty}.$$

Из (3.I2) и (3.44)

$$F^{-1}(\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij})=-\int_0^\infty F^{-1}\Big\{\Big[\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\mathfrak{D}_1}\ \frac{e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}-e^{-\tau(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+$$

$$+\frac{\tau^{2\ell}Q_{ij}}{\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\Big]\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big\}dy_3+$$

$$+\int_0^\infty F^{-1}\Big\{\Big[\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\mathfrak{D}_1}\;\frac{|\xi'|e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}-\tau e^{-\tau(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+$$

$$+\frac{\tau^{2\ell+1}Q_{ij}}{\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\Big]\widetilde{\Psi}_j\Big\}dy_3. \tag{3.50}$$

Первый интеграл из (3.50) запишем в виде

$$-\int_0^\infty F^{-1}\Big\{\Big[\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}\cdot\frac{e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}-e^{-\tau(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+$$
$$+\frac{\tau^{2\ell}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}\cdot e^{-\tau(x_3+y_3)}\Big]\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big\}dy_3. \tag{3.51}$$

При $b'_{j1}=0$ второй интеграл из (3.50) представим в виде

$$\int_0^\infty F^{-1}\Big\{\Big[\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}+\frac{|\xi'|\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}\;\frac{e^{-\tau(x_3+y_3)}-e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+$$
$$+\frac{\tau^{2\ell+1}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\Big]\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\widetilde{\Psi}_j\Big\}dy_3. \tag{3.52}$$

При $b'_{j1}\neq 0$ этот интеграл запишем по-другому

$$\int_0^\infty F^{-1}\Big\{\Big[\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{|\xi'|\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}+\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}\;\frac{e^{-\tau(x_3+y_3)}-e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+$$
$$+\frac{\tau^{2\ell+1}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}|\xi'|\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\Big]|\xi'|\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\widetilde{\Psi}_j\Big\}dy_3. \tag{3.53}$$

Используя лемму 3.2 и условия теоремы, получим

$$\mathcal{M}_q^q\Big(\frac{\tau^{2\ell}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau t}\Big)<\frac{c}{t}, \tag{3.54}$$

$$\mathcal{M}_q^q\Big(\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau t}\Big)\leqslant\frac{c}{t}, \tag{3.55}$$

$$\mathcal{M}_q^q\Big(\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{|\xi'|\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau t}\Big)\leqslant\frac{c}{t}, \tag{3.56}$$

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{\tau^{2\ell+1}Q_{ij}}{|\xi'|\,\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}e^{-\tau t}\right)\leqslant\frac{c}{t}\qquad\text{при}\quad b'_{j4}\neq 0. \tag{3.57}$$

Из леммы 3.3 получим

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\leqslant\frac{c}{t}, \tag{3.58}$$

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{|\xi'|\tau^{2\ell+1}P_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathfrak{D}_1}\,\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\leqslant\frac{c}{t}. \tag{3.59}$$

Учитывая, что функция Ψ_j – продолжение функции Φ_j, получим из (3.50)-(3.59) в силу теоремы 2.4

$$\|F^{-1}[\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij}]\|_{q,R_\infty}\leqslant c\left\{\|F^{-1}[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\frac{\partial\tilde{\Psi}_j}{\partial x_3}]\|_{q,R_\infty}+\right.$$
$$\left.+\|F^{-1}[\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\tilde{\Psi}_j]\|_{q,R_\infty}\right\}\qquad\text{при}\quad b'_{j4}=0\qquad\text{и}$$

$$\|F^{-1}[\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij}]\|_{q,R_\infty}\leqslant c\left\{\|F^{-1}[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\frac{\partial\tilde{\Psi}_j}{\partial x_3}]\|_{q,R_\infty}+\right.$$
$$\left.+\|F^{-1}[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}|\xi'|\tilde{\Psi}_j]\|_{q,R_\infty}\right\}\qquad\text{при}\quad b'_{j4}\neq 0.$$

Отсюда в силу (3.45),(3.46) и теоремы 2.2 имеем

$$\|F^{-1}[\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij}]\|_{q,R_\infty}\leqslant \mathcal{J}^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_j). \tag{3.60}$$

Из (3.12) и (3.44)

$$\frac{\partial^{2\ell}}{\partial x_3^{2\ell}}v_{ij}=-\int_0^\infty F^{-1}\left\{\left[\frac{\tau P_{ij}}{\mathfrak{D}_1}\,\frac{|\xi'|^{2\ell}e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}-\tau^{2\ell}e^{-\tau(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\tau^{2\ell}Q_{ij}e^{-\tau(x_3+y_3)}}{\mathfrak{D}_1}\right]\frac{\partial\tilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\right\}dy_3+$$
$$+\int_0^\infty F^{-1}\left\{\left[\frac{\tau P_{ij}}{\mathfrak{D}_1}\,\frac{|\xi'|^{2\ell+1}e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}-\tau^{2\ell+1}e^{-\tau(x_3+y_3)}}{|\xi'|-\tau}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\tau^{2\ell+1}Q_{ij}}{\mathfrak{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\right]\tilde{\Psi}_j\right\}dy_3. \tag{3.61}$$

Заметим, что

$$\frac{|\xi'|^n e^{-|\xi'|t}-\tau^n e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}=\frac{|\xi'|^n(e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t})}{|\xi'|-\tau}+\frac{|\xi'|^n-\tau^n}{|\xi'|-\tau}e^{-\tau t}=$$
$$=|\xi'|^n\frac{e^{-|\xi'|t}-e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}+\sum_{k=0}^{n-1}|\xi'|^k\tau^{n-1-k}e^{-\tau t}$$

Применяя теперь леммы 3.2 и 3.3, получим

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{\tau P_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}\,\frac{|\xi'|^{2\ell}e^{-|\xi'|t}-\tau^{2\ell}e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\leqslant\frac{c}{t}, \tag{3.62}$$

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{\tau P_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}|\xi'|\mathcal{D}_1}\,\frac{|\xi'|^{2\ell+1}e^{-|\xi'|t}-\tau^{2\ell+1}e^{-\tau t}}{|\xi'|-\tau}\right)\leqslant\frac{c}{t}. \tag{3.63}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные сделанным при выводе (3.60), получим

$$\left\|\frac{\partial^{2\ell}}{\partial x_3^{2\ell}}v_{ij}\right\|_{q,R_\infty}\leqslant c\,J^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_j). \tag{3.64}$$

(3.60) и (3.64) дают оценку компонент скорости u_i

$$\langle\langle\bar{u}\rangle\rangle^{(2\ell,\ell)}_{q,R_\infty}=\sum_{i=1}^{3}\langle\langle u_i\rangle\rangle^{(2\ell,\ell)}_{q,R_\infty}\leqslant c\sum_{i=1}^{3}J^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_i). \tag{3.65}$$

Обратимся теперь к оценке градиента давления ∇p. Нам достаточно оценить

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial x_k}F^{-1}\left[\tau^{2\ell-2}\tilde{v}_{4j}\right]\right\|_{q,R_\infty}+\left\|\frac{\partial^{2\ell-2}}{\partial x_3^{2\ell-2}}\frac{\partial}{\partial x_k}v_{4j}\right\|_{q,R_\infty}\right\}\quad\text{при } k=1,2,3.$$

Пусть сначала $k\neq 3$. Из (3.44) и (3.15)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}F^{-1}[\tau^{2\ell-2}\tilde{v}_{4j}]=$$

$$=\int_0^\infty F^{-1}\left[\frac{\tau^{2\ell-2}(\tau+|\xi'|)\,i\xi_k\,|B_{(j)}\mathcal{M}_0^{(1)}|}{\mathcal{D}_1}e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}\frac{\partial}{\partial y_3}\tilde{\Psi}_j\right]dy_3-$$

$$-\int_0^\infty F^{-1}\left[\frac{\tau^{2\ell-2}(\tau+|\xi'|)\,i\xi_k|\xi'|\,|B_{(j)}\mathcal{M}_0^{(1)}|}{\mathcal{D}_1}e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}\tilde{\Psi}_j\right]dy_3. \tag{3.66}$$

При $k=3$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_3}F^{-1}\left[\tau^{2\ell-2}\tilde{v}_{4j}\right]=$$

$$=-\int_0^\infty F^{-1}\left[\frac{\tau^{2\ell-2}(\tau+|\xi'|)|\xi'|\,|B_{(j)}\mathcal{M}_0^{(1)}|}{\mathcal{D}_1}e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}\frac{\partial}{\partial y_3}\tilde{\Psi}_j\right]dy_3+$$

$$+\int_0^\infty F^{-1}\left[\frac{\tau^{2\ell-2}(\tau+|\xi'|)|\xi'|^2\,|B_{(j)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}|}{\mathcal{D}_1}e^{-|\xi'|(x_3+y_3)}\tilde{\Psi}_j\right]dy_3. \tag{3.67}$$

Применяя лемму 3.I, получим

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{\tau^{2\ell-2}(\tau+|\xi'|)\xi_k\,|B_{(j)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}|}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-|\xi'|t}\right)\leqslant\frac{c}{t}, \tag{3.68}$$

$$\mathcal{M}_q^q\left(\frac{\tau^{2\ell-2}(\tau+|\xi'|)|\xi'|\xi_k\,|B_{(j)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}|}{\tau^{2\ell-2-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-|\xi'|t}\right)\leqslant\frac{c}{t}. \tag{3.69}$$

В силу теоремы 2.4 из (3.66)-(3.69) следует, что

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_k}F^{-1}[\tau^{2\ell-2}\tilde{v}_{4j}]\Big\|_{q,R_\infty}\leqslant c\Big\{\Big\|F^{-1}\Big[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\frac{\partial}{\partial x_3}\tilde{\Psi}_j\Big]\Big\|_{q,R_\infty}+$$

$$+\|F^{-1}[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}|\xi'|\tilde{\Psi}_j]\|_{q,R_\infty}\Big\}. \tag{3.70}$$

Совершенно аналогично получим, что

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial^{2\ell-2}}{\partial x_3^{2\ell-2}}v_{4j}\Big\|_{q,R_\infty}\leqslant c\Big\{\Big\|F^{-1}\Big[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\frac{\partial}{\partial x_3}\tilde{\Psi}_j\Big]\Big\|_{q,R_\infty}+$$

$$+\|F^{-1}[\tau^{2\ell-3-\sigma_j}|\xi'|\tilde{\Psi}_j]\|_{q,R_\infty}. \tag{3.71}$$

Используя (3.45) и (3.46), получим из (3.70) и (3.71)

$$\sum_{i=1}^{3}\Big\langle\!\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_i}p\Big\rangle\!\Big\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell-2,\ell-1)}\leqslant c\sum_{i=1}^{3}J^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_i).$$

Отсюда и из (3.65) следует (3.49). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I. Условие теоремы о том, что при $b'_{j4}\neq 0$ $d(\tau,Q_{ij})\leqslant m_2-3-\sigma_j$ использовалось только при оценке $\bar{u}$. Если же это условие не выполняется, но выполнены остальные условия теоремы 3.I, то можно получить точную по дифференциальному порядку оценку решения, несколько усилив требования на граничные условия. Именно, если

$$\Phi_j\in L_q^{(2\ell-2-\sigma_j-\frac{1}{q},\,\ell-1-\frac{\sigma_j}{2}-\frac{1}{2q})}(\Sigma_\infty), \text{ то}$$

$$\langle\!\langle\bar{u}\rangle\!\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell,\ell)}+\langle\!\langle\nabla p\rangle\!\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell-2,\ell-1)}\leqslant c\sum_{i=1}^{3}\langle\!\langle\Phi_i\rangle\!\rangle_{q,\Sigma_\infty}^{(2\ell-2-\sigma_i-\frac{1}{q},\,\ell-1-\frac{\sigma_i}{2}-\frac{1}{2q})}. \tag{3.72}$$

Эта оценка следует из доказательства теоремы, так как при $\Phi_j\in L_q^{(2\ell-2-\sigma_j-\frac{1}{q},\,\ell-1-\frac{\sigma_j}{2}-\frac{1}{2q})}(\Sigma_\infty)$ отпадает необходимость в оценке (3.57) и, следовательно, в последнем из условий (3.48).

Проверка условий (3.48) требует довольно громоздких вычислений. Можно указать более сильное достаточное условие, проверка которого значительно проще. Именно, потребуем, чтобы τ входило в $\mathfrak{D}$ со старшей степенью, т.е. $d(\tau,\mathfrak{D}_1)=8+\sigma$. Тогда $m_2=8+\sigma$, $m_3=0$. Из (3.8),(3.9),(3.13),(3.14) и (3.15) следует, что в этом случае условие (3.48) выполняется. Обращаясь к (3.5), замечаем, что в $\mathfrak{D}$ старшую степень по τ имеет слагаемое $-\tau^{2}s\,|B^4(-|\xi'|),B^1(-\tau),B^2(-\tau)|$. Тогда ясно, что $d(\tau,\mathfrak{D})=9+\sigma$ в том и только в том случае, когда $d(\tau,|B^4(-|\xi'|),B^1(-\tau),B^2(-\tau)|)=5+\sigma$.

Теперь мы можем сформулировать

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Если $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям (3.I6), а), в) и $d(\tau, |B^4(-|\xi'|), B^1(-\tau), B^2(-\tau)|) = 5+\sigma$, то имеет место оценка (3.49).

В том случае, когда условия (3.48) не выполняются, можно, наложив дополнительные ограничения на краевые условия, получить оценку решения задачи (I.I),(I.2),(I.3).

Пусть

$$d(\tau, P_{ij}) = m_2 - 3 - \sigma_j + q_{ij},$$
$$d(\tau, |B_{(j)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}|) = m_2 - 2 - \sigma_j + r_j,$$
$$d(\tau, Q_{ij}) = m_2 - 2 - \sigma_j + s_{ij} \quad \text{при } b'_{j4} = 0 \quad \text{и}$$
$$d(\tau, Q_{ij}) = m_2 - 3 - \sigma_j + s_{ij} \quad \text{при } b'_{j4} \neq 0,$$

где q_{ij}, r_j, s_{ij} – целые числа, $i,j = 1,2,3$. Пусть, далее, $\varkappa_j = \max\limits_i (q_{ij}, r_j, s_{ij}) > 0$. Очевидно, что $\varkappa_j \leqslant 8+\sigma-m_2$. Если $\varkappa_j \geqslant 1$, то положим

$$\lambda_j = \begin{cases} \varkappa_j, & \text{если } \sigma_j + \varkappa_j \text{ – нечетно} \\ \varkappa_j + 1, & \text{если } \sigma_j + \varkappa_j \text{ – четно}, \end{cases}$$

$h_j = \frac{1}{2}(2\ell - 3 - \sigma_j + \lambda_j)$. Очевидно, что h_j – целое число.

ТЕОРЕМА 3.2. Если $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям (3.I6), а), в) и выполняются следующие соотношения: $2\mu_j \leqslant \lambda_j \leqslant 2(\mu_j+1)$

$$\frac{\partial^{h_j-k}}{\partial t^{h_j-k}} \Phi_j = \sum_{|\alpha^k| = \lambda_j - 2k} \frac{\partial^{|\alpha_k|}}{\partial x'_{\alpha_k}} \varphi_{j\alpha^k}(x',t), \tag{3.73}$$

где $k = 0,1,\ldots,\mu_j$; $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k)$ – мультииндекс, то имеет место оценка

$$\langle\langle \bar{u} \rangle\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell,\ell)} + \langle\langle \nabla p \rangle\rangle_{q,R_\infty}^{(2\ell-2,\ell-1)} \leqslant \tag{3.74}$$
$$\leqslant c\Big\{\sum_{i=1}^{3} \mathcal{J}^{\ell}_{\Sigma_\infty}(\Phi_i) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{\mu_i}\sum_{|\alpha^k| = \lambda_i - 2k} \mathcal{J}^{1}_{\Sigma_\infty}(\varphi_{i\alpha^k})\Big\},$$

где $\mathcal{J}^1_{\Sigma_\infty}(\varphi_{i\alpha^k}) = \langle\langle \varphi_{i\alpha^k} \rangle\rangle_{q,\Sigma_\infty}^{(1-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2q})}$ при $b'_{i4} = 0$ и $\mathcal{J}^1_{\Sigma_\infty}(\varphi_{i\alpha^k}) = \langle\langle \varphi_{i\alpha^k} \rangle\rangle_{q,\Sigma_\infty}^{(1-\frac{1}{q},0)}$ при $b'_{i4} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся доказательством теоремы 3.I. Рассмотрим второе слагаемое в первом интеграле в (3.50)

$$-\int_0^\infty F^{-1}\Big[\frac{\tau^{2\ell} Q_{ij}}{\mathfrak{D}_1} e^{-\tau(x_3+y_3)} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big] dy_3 =$$

$$=-\int_0^\infty F^{-1}\Big[\frac{\tau^{2\ell}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big]dy_3=$$

$$=-\int_0^\infty F^{-1}\Big[\frac{\tau^{2\ell-\lambda_j}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}\tau^{2h_j}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big]dy_3=$$

$$=-\sum_{k=0}^{h_j}C^k_{h_j}\int_0^\infty F^{-1}\Big[\frac{\tau^{2\ell-\lambda_j}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}|\xi'|^{2k}s^{h_j-k}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big]dy_3=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\mu_j}C^k_{h_j}\int_0^\infty F^{-1}\Big[\frac{\tau^{2\ell-\lambda_j}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}|\xi'|^{2k}\sum_{|\alpha^k|=\lambda_j-2k}(i\xi')^{\alpha^k}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_{j\alpha^k}}{\partial y_3}\Big]dy_3-$$

$$-\sum_{k=\mu_j+1}^{h_j}C^k_{h_j}\int_0^\infty F^{-1}\Big[\frac{\tau^{2\ell-\lambda_j}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-\tau(x_3+y_3)}|\xi'|^{2k}s^{h_j-k}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial y_3}\Big]dy_3. \qquad (3.75)$$

Здесь $\Psi_{j\alpha^k}$ – продолжение $\varphi_{j\alpha^k}$ в R_∞, $C^k_{h_j}$ – биномиальные коэффициенты.

Из леммы 3.2 и условий теоремы получим

$$\mathcal{M}^q_q\Big(\frac{\tau^{2\ell-\lambda_j}|\xi'|^{\lambda_j}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\mathcal{D}_1}e^{-\tau t}\Big)\leqslant\frac{c}{t} \quad \text{и}$$

$$\mathcal{M}^q_q\Big(\frac{\tau^{2\ell-\lambda_j}|\xi'|^{2k}(i\xi')^{\alpha^k}Q_{ij}}{\tau^{2\ell-3-\sigma_j}\cdot\mathcal{D}_1}e^{-\tau t}\Big)\leqslant\frac{c}{t}.$$

Аналогично рассматриваются остальные слагаемые (3.50). Следуя доказательству теоремы 3.I, получаем в силу теоремы 2.4

$$\|F^{-1}[\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij}]\|_{q,R_\infty}\leqslant c\Big\{\sum_{k=0}^{\mu_j}\sum_{|\alpha^k|=\lambda_j-2k}\Big(\|F^{-1}[\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{\Psi}_{j\alpha^k}]\|_{q,R_\infty}+$$

$$+\|F^{-1}[|\xi'|\widetilde{\Psi}_{j\alpha^k}]\|_{q,R_\infty}\Big)+\sum_{k=\mu_j+1}^{h_j}\Big(\|F^{-1}[|\xi'|^{2k-\lambda_j}s^{h_j-k}\frac{\partial\widetilde{\Psi}_j}{\partial x_3}]\|_{q,R_\infty}+$$

$$+\|F^{-1}[|\xi'|^{2k-\lambda_j+1}s^{h_j-k}\widetilde{\Psi}_j]\|_{q,R_\infty}\Big)\Big\}.$$

Отсюда следует, что

$$\|F^{-1}[\tau^{2\ell}\tilde{v}_{ij}]\|_{q,R_\infty}\leqslant c\Big\{\mathcal{J}^\ell_{\Sigma_\infty}(\Phi_j)+\sum_{k=0}^{\mu_j}\sum_{|\alpha^k|=\lambda_j-2k}\mathcal{J}^1_{\Sigma_\infty}(\varphi_{j\alpha^k})\Big\}.$$

Поступая аналогичным образом с (3.6I) и (3.76), получаем оценку (3.74). Теорема доказана.

Из теорем 3.I и 3.2 следуют оценки решений первой и второй краевых задач в полупространстве, ранее полученные другим способом в [2] и [4] .

В первой краевой задаче

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad (3.76)$$

$$\mathfrak{D}=\tau|\xi'|(|\xi'|-\tau); \quad \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-2; \quad m_2=1;$$

$$|B_{(3)}\mathcal{M}_0^{(1)}|=\tau^2; \quad d(\tau, |B_{(3)}\mathcal{M}_0^{(1)}|)=2>m_2-2-\sigma_3=1.$$

Следовательно, условия (3.48) не выполняются. Легко видеть, что условия (3.16), а) и в) выполнены.

В [2] установлена

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть в задаче (I.I),(I.2),(I.3) с B , определяемым формулой (3.76)

$$\frac{\partial\Phi_3(x',t)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\varphi_j(x',t)}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$\langle\langle \bar{u}\rangle\rangle_{q,R_\infty}^{(2,1)}+\|\nabla p\|_{q,R_\infty}\leqslant c\left\{\sum_{i=1}^{3}\|\Phi_i\|_{q,\Sigma_\infty}^{(2-\frac{1}{q},1-\frac{1}{2q})}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\|\varphi_i\|_{q,\Sigma_\infty}^{(1-\frac{1}{q},\frac{1}{2}-\frac{1}{2q})}\right\}. \tag{3.77}$$

Легко видеть, что при условиях теоремы 3.3 выполняются условия теоремы 3.2 с $\lambda_3=\varkappa_3=1$ и из (3.74) следует (3.77).

В [4] рассмотрена вторая краевая задача. Задано следующее краевое условие

$$-\delta_{i3}p+\frac{\partial u_i}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\Big|_{x_3=0}=\Phi_i, \quad i=1,2,3.$$

Это значит, что

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_3} & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

$$\mathfrak{D}=(\tau-|\xi'|)\tau^2(\tau^3+\tau^2|\xi'|+3\tau|\xi'|^2-|\xi'|^3),$$

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-1, \quad \sigma=-3.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условиям (3.16), а) и в).

$$|B^4, B^1(-\tau), B^2(-\tau)|=-\tau^2 \Rightarrow d(\tau, |B^4, B^1(-\tau), B^2(-\tau)|)=2=5+\sigma.$$

Это равенство показывает, что выполнено условие следствия 3.I, и, следовательно, имеет место установленная в [4] оценка

$$\langle\langle \bar{u}\rangle\rangle_{q,R_\infty}^{(2,1)}+\|\nabla p\|_{q,R_\infty}\leqslant c\sum_{i=1}^{3}\mathcal{J}_{\Sigma_\infty}^{1}(\Phi_i),$$

где

$$\mathcal{J}^1_{\Sigma_\infty}(\Phi_i)=\langle\langle \Phi_i\rangle\rangle^{(1-\frac{1}{q},\frac{1}{2}-\frac{1}{2q})}_{q,\Sigma_\infty},\quad i=1,2,$$

$$\mathcal{J}^1_{\Sigma_\infty}(\Phi_3)=\langle\langle \Phi_3\rangle\rangle^{(1-\frac{1}{q},0)}_{q,\Sigma_\infty},\qquad \text{так как } b'_{31}=-1.$$

Рассмотрим третью краевую задачу, которая характеризуется следующими краевыми условиями

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\Big|_{x_3=0}=\Phi_i,\ i=1,2;\quad u_3\big|_{x_3=0}=\Phi_3.$$

Здесь

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{3.79}$$

$$\mathfrak{D}=(\tau-|\xi'|)|\xi'|\tau^2(\tau+|\xi'|);\quad m_2=3,\ \sigma_1=\sigma_2=-1,\ \sigma_3=-2;$$

$$|B_{(3)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}|=\tau^2(\tau^2+|\xi'|^2)\Longrightarrow d(\tau,|B_{(3)}(-\tau)\mathcal{M}_0^{(1)}|)=4>$$

$>m_2-2-\sigma_3=3$. Следовательно, условие (3.48) не выполняется.. Условиям (3.16), а) и в) $\mathfrak{D}$ удовлетворяет. Положим поэтому, как и в первой краевой задаче, $\lambda_3=\varkappa_3=1$, т.е. $\frac{\partial\Phi_3(x',t)}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{2}\frac{\partial\varphi_j(x',t)}{\partial x_j}$. Тогда по теореме 3.2 получим оценку решения третьей краевой задачи, предполагая, что $\varphi_j|_{t=0}=0$ $(j=1,2)$

$$\langle\langle\bar u\rangle\rangle^{(2,1)}_{q,R_\infty}+\|\nabla p\|_{q,R_\infty}\leqslant c\Big\{\sum_{i=1}^{2}\langle\langle\Phi_i\rangle\rangle^{(1-\frac{1}{q},\frac{1}{2}-\frac{1}{2q})}_{q,\Sigma_\infty}+$$
$$+\langle\langle\Phi_3\rangle\rangle^{(2-\frac{1}{q},1-\frac{1}{2q})}_{q,\Sigma_\infty}+\sum_{i=1}^{2}\|\varphi_i\|^{(1-\frac{1}{q},\frac{1}{2}-\frac{1}{2q})}_{q,\Sigma_\infty}.$$

Сформулируем теперь теорему об оценке решения неоднородной краевой задачи в области $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset R^3$.

$$\frac{\partial\bar u}{\partial t}-\Delta\bar u+\nabla p=\bar f,\quad \operatorname{div}\bar u=\rho,$$
$$\bar u|_{t=0}=\bar u_0,\quad B(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})(\bar u,p)\Big|_{S_T}=\bar\Phi. \tag{3.80}$$

Здесь $S=\partial\Omega$, $S_T=S\times(0,T)$. Потребуем, чтобы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\operatorname{div}\bar d+\varphi, \tag{3.81}$$

где $\bar d\in W^{2\ell-2,\ell-1}_{q,Q_T}$, $\varphi\in W^{2\ell-2,\ell-1}_{q,Q_T}$ и $\operatorname{supp}\varphi\subset K_\lambda\times(0,T)$, $K_\lambda=\{x\in R^3: |x|<\lambda\}$, $\ell\geqslant 1$ – натуральное, и

$$D_t^\mu\bar u|_{t=0}=0,\quad \mu=1,2,\dots,\ell-1. \tag{3.82}$$

Элементы b_{ij} оператора B запишем в виде

$$b_{ij}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})=\sum_{|\alpha|+2\beta=\sigma_i+2} b_{ij\alpha\beta}(x,t)D_x^\alpha D_t^\beta,$$

$$b_{i4}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})=b'_{i4}(x,t)D_t^{\mu_i}+b''_{i4}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}),$$

b'_{i4} – коэффициент при чистой старшей производной по t .

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $S\in C^{2l+\theta}$, $0<\theta<1$, оператор B удовлетворяет следующим условиям: в каждой точке (x_0,t_0) боковой поверхности $S_T=S\times(0,T)$ $(x_0\in S, t_0\in(0,T))$ оператор с постоянными коэффициентами $B(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t})$, записанный в местной системе координат $\{y(x_0)\}$, удовлетворяет условиям (3.16), а), в), (3.48); коэффициенты $b_{ij\alpha\beta}(x,t)$ имеют ограниченные производные вида $D_x^\nu D_t^\mu b_{ij\alpha\beta}(x,t)$, где $|\nu|+2\mu=2l-2-\sigma_i$. Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

1) $\sum_{i=1}^{3}|b'_{i4}(x,t)|>0$, 2) $\bar u\cdot\bar n|_{S_T}=0$, $\bar n$ – вектор внешней нормали к S . Тогда для всякого решения задачи (3.80), удовлетворяющего условиям (3.81) и (3.82), при достаточно малых T имеет место оценка

$$\langle\langle\bar u\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2l,l)}+\langle\langle\nabla p\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2l-2,l-1)}\leqslant c\{\langle\langle\bar f\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2l-2,l-1)}+$$

$$+\langle\langle\nabla\rho\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2l-2,l-1)}+\langle\langle\bar u_0\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(2l-\frac{2}{q})}+\langle\langle\bar d\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2l-2,l-1)}+$$

$$+\langle\langle\varphi\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2l-2,l-1)}+\sum_{i=1}^{3}[\mathcal{J}_{S_T}^{l}(\Phi_i)+\|\Phi_i\|_{q,S_T}]\}.$$

Автор выражает благодарность В.А.Солонникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. С о л о н н и к о в В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1965, т.83, 1-163.

2. С о л о н н и к о в В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1964, т.70, 213-317.

3. С о л о н н и к о в В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса. Зап.научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.38, 153-231.

4. С о л о н н и к о в В.А. Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса. Зап.научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.59, 178-254.

5. F a b e s E.B., L e w i s J.E., R i v i e r e N.M. Boundary Value Problems for the Navier-Stokes Equations. American Journal of Mathematics, 1977, vol.99, N 3, 626-668.

6. Б е с о в О.В., И л ь и н В.П., Н и к о л ь с к и й С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975, 478 с.

7. Л и з о р к и н П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1969,т.105,89-167.

8. Л и з о р к и н П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^{(r)}(R^n)$. Матем.сборник, 1963, т.60, № 3, 325-353.

9. В о л е в и ч Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. Матем.сборник, 1965, т.68, № 3, 373-416.