

ГОДУНОВСКАЯ СХЕМА И ЗАДАЧА ШАФРАНОВА ДЛЯ МНОГОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2018 г. *А.Г. Аксенов¹, В.Ф. Тишкин², В.М. Четкин^{1,2}*

¹Институт автоматизации проектирования РАН

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

aksenov@icad.org.ru; v.f.tishkin@mail.ru

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 16-11-10339.

Протестирован многотемпературный код для численного решения уравнений многокомпонентной газовой динамики в задачах с высокой плотностью энергии в веществе. Скорости всех компонент с ненулевыми массами предполагаются одинаковыми. Вместе с переносом газа с табличным уравнением состояния код может включать электронную теплопроводность, радиационный перенос, обмен энергиями между компонентами и химические реакции. Газодинамическая часть основана на годуновской схеме и эффективном решении задачи о распаде разрыва с применением приближенного локального уравнения состояния. Целью работы является как проверка кода, так и получение точного решения задачи Шафранова для ударной волны в плазме.

Ключевые слова: многотемпературная плазма, уравнение состояния, годуновская схема.

GODUNOV TYPE METHOD AND THE SHAFRANOV'S TASK FOR MULTI-TEMPERATURE PLASMA

A.G. Aksenov¹, V.F. Tishkin², V.M. Chechetkin^{1,2}

¹Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences

²Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences

New multi-temperature code for the multi-component gas-dynamic was tested. The velocities of all components with nonzero masses are assumed to be identical. Method operates with the table equation of state. Method can include in the consideration the electron heat conduction, the radiation transfer, the exchange the energy between the components, and the chemical reactions. The gas-dynamic part is based on the Godunov approach with the effective approximate Riemann problem solver and the model of the local equation of state. The goal of the investigation is the test of the development of the code and the "exact" solution of the Shafranov task for the shock wave in the hydrogen plasma.

Key words: multi-temperature plasma, equation of state, Godunov type scheme.

1. Введение

В 1957 г. С.К. Годунов [1] предложил метод сквозного счета, пригодный для рассмотрения задач газовой динамики с разрывами и ударными волнами (УВ) без явного выделения разрывов в расчете. Метод счета основан на введении в расчетной области пространственной сетки, в которой определены усредненные по объему независимые физические величины $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на временном шаге $t = t^n$. Уравнения идеальной газовой динамики (без учета вязкости и теплопроводности) записываются в виде законов сохранения для консервативных величин

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0.$$

Дифференциальные уравнения рассматриваются как законы сохранения, поскольку нелинейные уравнения газовой динамики могут приводить к разрывным решениям даже в случае гладких начальных условий. В явной консервативной конечно-разностной схеме

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\Delta t} + \sum_k \frac{\langle \mathbf{F}_{jk} \rangle \Delta \mathbf{s}_{jk}}{\Delta V_j} = 0$$

для произвольных объемов ΔV_j суммирование потоков \mathbf{F}_{jk} производится по всем поверхностям $\Delta \mathbf{s}_{jk}$ вокруг объема ΔV_j . Под $\langle \mathbf{F}_{jk} \rangle$ следует понимать усредненные по времени потоки через границы ячеек, а величины \mathbf{U}_j^n – средние в объеме ΔV_j в момент времени t^n . Предложение Годунова состояло в получении усредненных по времени потоков из решения задачи о распаде разрыва. Задача о распаде разрыва (или задача Римана) – это одномерная задача о нахождении автомодельного решения (зависящего от параметра x/t) из двух постоянных состояний газа слева и справа от координаты $x = 0$. Для устойчивости явной схемы необходимо выполнение условия Куранта – ограниченный временной шаг, при котором надо учитывать область зависимости решения [2]. А порядок аппроксимации схемой дифференциальных уравнений Годунов выбрал первый, т.к. он доказал, что только схемы первого порядка среди всех одношаговых дают монотонные решения – т.е. на каждом шаге переводят монотонное решение в монотонное, не генерируя нефизичных схемных осцилляций [3]. Схема не требовала явного введения схемной вязкости. Распад разрыва рассматривался для идеального газа.

В дальнейшем порядок схемы годуновского типа был расширен за счет реконструкции решения $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ внутри ячеек на основе данных из соседних ячеек \mathbf{U}_j^n (например, [4]). Монотонность обеспечивалась искусственным недопущением локальных минимумов и максимумов при интерполяции, а усредненные по времени потоки (\mathbf{F}_{jk}) определялись из решения задачи Римана для приготовленных усредненных решений из инвариантов Римана слева и справа от границ. Т.е. удалось сочетать в годуновских схемах высокий порядок для небольших возмущений газа и монотонность. В вычислительном эксперименте это означает возможность расчета УВ произвольной интенсивности без выхода за физически допустимые значения сеточных функций, а также малое размазывание контактных разрывов по вычислительной сетке. Расширение на произвольное табличное уравнение состояния $P = P(\rho, \varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ было проведено в [5, 6]. В первом случае рассматривалась линеаризованная задача Римана, во втором построен эффективный приближенный "решатель" задачи Римана, основанный на построении локальной модели уравнения состояния.

Особый интерес в физике представляют задачи для многофазной газодинамической смеси разных веществ α , описываемых набором плотностей $\rho_\alpha(\mathbf{r}, t) \equiv c_\alpha(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t)$ (c_α – концентрации), внутренних энергий $\rho\varepsilon_\alpha(\mathbf{r}, t)$ (ε_α – удельная энергия) и одинаковой скоростью для всех массивных частиц $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Такие задачи возникают в инерциальном термоядерном синтезе [7], в экспериментах лазерной абляции [8, 9], астрофизике сверхновых звезд [10]. Это промежуточный случай между описанием кинетическими уравнениями Больцмана для одночастичных функций распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и классической газовой динамикой для однокомпонентного газа. Основной математической проблемой является газодинамическая часть и построение эффективной разностной схемы годуновского типа, основанной на приближенном "решателе" задачи Римана. Построение эффективных алгоритмов задачи Римана для таких задач продолжается [11]. Разрабатываются также "решатели" для специфических случаев "двучленного" уравнения состояния $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + c_0^2(\rho - \rho_0)$ для смеси газов с разными температурами [12] и для смеси веществ в предположении о локальном уравнении состояния Ми-Грюнайзена с линейной зависимостью давления от внутренней энергии $\Delta P = (\Gamma_0 / V)\Delta\varepsilon$ с одной температурой [13].

Для задач инерциального термоядерного синтеза [7] была разработана локальная модель уравнения состояния многокомпонентной смеси и "реша-

тель" задачи Римана [14-16] по типу локальной модели [6], использовалась конечно-разностная гудуновская схема [4]. Каждый компонент смеси имеет свою плотность и свою удельную внутреннюю энергию. Предлагаемая локальная модель уравнения состояния использует предположение о малости изменения энтропии в соседних расчетных ячейках и заранее вычисляемых изменениях безразмерных коэффициентов для уравнений состояния $\gamma_\alpha \equiv 1 + P_\alpha / (\rho \epsilon_\alpha)$ и удельных внутренних энергий $\gamma_\alpha^e = \epsilon_\alpha / \epsilon$ по приращению давления на скачке. В случае произвольно большого скачка давления обеспечиваются физически разумные результаты. С помощью оригинального метода "Адиабатического распада разрыва" были просчитаны двумерные задачи о волне горения в цилиндрических дейтериевых и дейтерий-трибиевых мишенях с учетом обмена энергиями и даже переноса излучения. Получены параметры плазмы для существования стационарной волны горения, в том числе с неравновесными температурами компонентов (ионов, электронов, излучения). В дальнейшем схема стала применяться для исследования гравитационного коллапса ядер звезд и сверхновых [17]. В астрофизических задачах газовая динамика для вещества рассматривается вместе с переносом нейтрино в прозрачных и непрозрачных областях. Причем особые требования предъявляются к разрешению схемы (степень сжатия и градиенты велики), табличному уравнению состояния, возможности расчетов в 2D и 3D. Предполагалось, что "решатель" задачи Римана оперирует с небольшими скачками давления на неподвижной сетке из-за теплопроводности.

Решение о структуре ударной волны в двухкомпонентной плазме [18] использовалось для теста методики в [19]. Оказалось, что в тестовой задаче скачки величин (температура и плотность протонов) на УВ в соседних ячейках сетки не являются малыми. Корректность гиперболической части системы уравнений с недивергентными членами в многокомпонентной смеси для решений с разрывами была проверена, однако сравнение газодинамического подхода на основе приближенного решения задачи Римана было проведено, как оказалось, с приближенным решением Шафранова [18]. Использование Шафрановым соотношений на разрывах и только обыкновенных дифференциальных уравнений недостаточно для получения решения. В данной работе восполнен пробел в решении задачи Шафранова и получены количественные оценки для точности метода для УВ разной интенсивности.

2. Постановка задачи и метод решения

При решении многомерных задач удобнее использовать неподвижные эйлеровы координаты и вводить концентрации $c_\alpha = \rho_\alpha / \rho$ вещества сорта α .

Система включает уравнения для переноса концентраций компонентов

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{v} = \dot{n}_\alpha,$$

закон сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = 0,$$

уравнения для плотностей энергий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E_\alpha + P_\alpha) \mathbf{v} + \mathbf{v}(c_\alpha \operatorname{grad} P - \operatorname{grad} P_\alpha) = \\ = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T_\alpha) - \rho \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta} (T_\alpha - T_\beta) + \rho Q_\alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены плотности энергий $E_\alpha = \varepsilon_\alpha + c_\alpha \mathbf{v}^2/2$, тензор $\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + P \delta_{ij}$, уравнение состояния $P = \sum_{\alpha} P_\alpha(\rho, \mathbf{c}, \varepsilon_\alpha)$, удельные энергии $\varepsilon_\alpha(\rho, \mathbf{c}, \varepsilon_\alpha)$. Кинетические коэффициенты \dot{n}_α , κ_α , χ_{ij} , Q_α зависят от $\rho, \mathbf{c}, \mathbf{T}$ [20]. Вместо функций распределений разных частиц $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ мы ограничиваем описание газодинамическими величинами: концентрацией компонентов $n_\alpha \equiv \rho_\alpha(\mathbf{r}, t)/m_\alpha$ для $m_\alpha \neq 0$, температурой $T_\alpha(\mathbf{r}, t)$ и считаем, что скорости частиц с ненулевыми массами не различаются $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Такой подход позволяет описывать даже перенос фотонов и быстрых частиц плазмы как в прозрачном, так и непрозрачном случаях с помощью диффузии с ограничением потоков.

В случае однокомпонентного газа (сумма уравнений по α) консервативная запись уравнений газовой динамики означает выполнение законов сохранения при появлении разрывов в решении. В случае многокомпонентного газа в лагранжевых переменных (для простоты напишем для одномерного плоского случая и только для газодинамической части: $(m = \int_{r_0}^r \rho(\xi, t) d\xi, t)$,

$\frac{\partial}{\partial t_E} = \frac{\partial}{\partial t_L} - v \rho \frac{\partial}{\partial m}$, $\frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial m}$) имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial m} = 0,$$

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0,$$

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m}(P_\alpha v) + v \left(c_\alpha \frac{\partial P}{\partial m} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial m} \right) = 0,$$

или уравнение для удельных энергий $(\partial \varepsilon_\alpha / \partial t) + P_\alpha (\partial v / \partial m) = 0$. Концентрации c_α не зависят от времени и, вообще говоря, не нужны, если первоначально разные вещества были распределены по своим ячейкам и нет реакций – гетерогенная смесь остается гетерогенной.

Для расчета используется метод расщепления по физическим процессам и направлениям. Уравнения теплопроводностей решаются с помощью конечно-разностных аппроксимаций центральными разностями, которые сводят систему уравнений в частных производных к системе ОДУ для $\dot{\varepsilon}_{\alpha,i}$, разности связывают между собой соседние ячейки $\varepsilon_{\alpha,i-1}$, $\varepsilon_{\alpha,i}$, $\varepsilon_{\alpha,i+1}$. Поток в уравнении теплопроводности вычисляется с помощью аппроксимации градиента удельной внутренней энергии с помощью центральных разностей. Система ОДУ решается неявным методом Гира [21], а для обращения матрицы вида $I + \Delta t [\partial f(Y) / \partial Y]$ используется метод циклической редукции (матричная прогонка). Для описания кинетики реакций также решается система ОДУ для $\dot{\rho}_\alpha$, $\dot{\varepsilon}_\alpha$ в каждой ячейке сетки методом Гира.

Основная сложность заключается в интегрировании газодинамической части, соответствующая система уравнений является гиперболической. Система уравнений для многокомпонентного газа в предположении гомогенной смеси в эйлеровых координатах строго соответствует дифференциальным уравнениям для этого же газа в лагранжевых координатах. Газодинамические уравнения в эйлеровых координатах также можно получить непосредственно из кинетических уравнений Больцмана для функций распределения $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, предполагая одинаковую скорость и температуру "массивных" частиц (атомы, ионы, нуклоны) и свои температуры для частиц, не переносящих массу (электроны). С математической точки зрения лагранжевы и эйлеровы уравнения для смеси получились разными. В лагранжевых переменных в многокомпонентной однотемпературной гетерогенной смеси мы по-прежнему имеем законы сохранения. В системе для многокомпонентного газа в эйлеровых переменных есть слагаемое $\mathbf{v}(c_\alpha \text{grad } P - \text{grad } P_\alpha)$, отличное от дивергенции потока. Это слагаемое требует специального рассмотрения на разрывах. Такой же недивергентный член присутствует в лагранжевых переменных в уравнении для энергии, когда температуры компонентов могут различаться. Член $\text{grad } P_\alpha$ на разрыве не определен. Необ-

ходимо вводить искусственную вязкость для описания разрывов Рихтмайера-Мортонa. А практический вопрос единственности получаемого численного решения можно проверить с помощью дробления расчетной сетки. В классической задаче об УВ в плазме мы имеем только 3 закона сохранения, а благодаря теплопроводности – кусочно-гладкую температуру, для которой достаточно дифференциального уравнения вместо закона сохранения.

Гидродинамическая часть кода основана на годуновской схеме высокого порядка точности для однотемпературной однокомпонентной газовой динамики [4]. В многомерном случае, как правило, универсальными являются неподвижные эйлеровы координаты и появляются особые требования к пространственному разрешению схемы. Для обобщения подхода [6] необходим эффективный алгоритм решения задачи Римана для уравнения состояния реального газа с разными температурами компонентов.

Используется стандартная процедура для приготовления данных задачи о распаде разрыва [4]. Далее рассматривается локальная модель уравнения состояния, позволяющая упростить решение задачи Римана и получать потоки в любой области течения с разрывами, а также парциальные давления компонент. Следуя [6], строим локальную модель уравнения состояния для многокомпонентного газа, строго справедливую в случае слабых разрывов. Увеличение удельной энтропии $x/t=0$ за УВ – величина третьего порядка малости относительно скачка давления $O([P]^3)$. Пренебрежем изменением энтропии за УВ при вычислении безразмерных коэффициентов

$$\gamma_\alpha \equiv \frac{P_\alpha \tau}{\varepsilon_\alpha} + 1,$$

как функций состояния до волны и полного давления после УВ. Будем использовать локальную модель уравнения состояния для решения задачи о распаде разрыва: слева и справа от $x/t=0$ вначале заданы постоянные значения. При этом слева и справа от контактного разрыва концентрации остаются постоянными, можем забыть о зависимости уравнения состояния от концентраций c_α . Зависимость конечных значений γ_α очень удобна в построении "решателя" задачи Римана [6]. Используя соотношение

$$d\varepsilon_\alpha(s_\alpha, \tau) = T_\alpha ds_\alpha - P_\alpha d\tau$$

и предположение

$$ds_\alpha = 0,$$

можно написать

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dP_\alpha} = \frac{\tau}{\varepsilon_\alpha} + \frac{P_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \frac{d\tau}{dP_\alpha} - \frac{P_\alpha \tau}{\varepsilon_\alpha^2} \frac{d\varepsilon_\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{dP_\alpha} = \frac{\tau}{\varepsilon_\alpha} \left(1 - \frac{\gamma_\alpha}{\Gamma_\alpha}\right) = (\gamma_\alpha - 1) \left(1 - \frac{\gamma_\alpha}{\Gamma_\alpha}\right) \frac{1}{P_\alpha}, \quad (2)$$

т.е. получить явную зависимость приращения γ_α от приращения давления компонента. Приращение парциального давления явно зависит от приращения полного давления

$$dP_\alpha = \frac{C_\alpha^2}{C^2} dP,$$

где квадрат лагранжевой скорости звука компонента $C_\alpha^2 \equiv -dP_\alpha / d\tau = -(\partial P_\alpha / \partial \varepsilon_\alpha) P_\alpha - \partial P_\alpha / \partial \tau$, $P(\varepsilon, \tau) = \sum_\alpha P_\alpha(\varepsilon_\alpha, \tau)$. Удобны в расчетах соотношения для доли удельной энергии компонента

$$d\gamma_\alpha^\varepsilon = \frac{\varepsilon d\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha d\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{(\varepsilon P_\alpha - \varepsilon_\alpha P) dP}{\varepsilon^2 C^2} = \frac{(\varepsilon P_\alpha - \varepsilon_\alpha P) \tau dP}{\Gamma P \varepsilon^2} = \gamma_i^\varepsilon \frac{\gamma_\alpha - \gamma}{\Gamma} \frac{dP}{P}. \quad (3)$$

Используя обозначения

$$\Gamma_\alpha \equiv C_\alpha^2 \tau / P_\alpha, \quad \Gamma \equiv C^2 \tau / P, \quad d\varepsilon_\alpha = -P_\alpha d\tau = -P_\alpha \frac{d\tau}{dP_\alpha} dP_\alpha = \frac{P_\alpha dP_\alpha}{C_\alpha^2} = \frac{P_\alpha dP}{C^2},$$

можно получить приращения безразмерной переменной [2, 19] $\gamma \equiv \frac{\sum_\alpha \gamma_\alpha \varepsilon_\alpha}{\sum_\alpha \varepsilon_\alpha}$:

$$d\gamma = (\gamma - 1) \left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right) \frac{dP}{P}, \quad (4)$$

как и должно быть для однокомпонентного газа [6] или для одной компоненты выше (2). Ключ к пониманию данной работы и главное отличие предлагаемого газодинамического подхода для многокомпонентного многотемпературного газа от работ [4, 6] заключается в формулах (3) и (4) для многокомпонентного газа.

Предположение о пренебрежимо малом изменении энтропии используется для вычисления изменения безразмерных коэффициентов. Далее при расчете других параметров, в частности за УВ, предположение о неизменности энтропии не используется.

Остается показать, как знание изменения коэффициентов (3) и (4) за УВ и волной разрежения по приращению давления сводит задачу Римана к случаю идеального газа. Решение задачи о распаде разрыва состоит из кон-

тактного разрыва, на котором непрерывно давление и нормальная компонента скорости

$$u_{*L}(P_*) - u_{*R}(P_*) = 0,$$

и распространяющихся налево и направо двух типов волн – УВ или волны разрежения, * означает состояние за волной, ударной или разрежения.

Соотношения на разрывах:

$$[\rho_i v_n] = 0, \quad [\rho v_n^2 + P] = 0, \quad [\rho v_n v_t] = 0,$$

$$\left[v_n \left(\frac{\rho(v_n^2 + v_t^2)}{2} + \rho \varepsilon + P \right) \right] = \rho v_n \left[E + \frac{P}{\rho} \right] = 0.$$

Имеется два типа разрывов. Тангенциальный разрыв: $\rho v_n, [P] = 0$, v_t , c_α имеют произвольные скачки. Ударная волна: $\rho v_n, [\tau] \neq 0$, $[c_\alpha], [v_t] = 0$.

Далее $u \equiv v_n$. На УВ

$$\pm W[\tau] + [u] = 0, \quad \pm W[u] - [P] = 0,$$

$$\pm W[E] - [uP] = 0, \quad [c_\alpha] = 0,$$

где введена средняя лагранжева скорость волны

$$W_S = \frac{|P_* - P_S|}{|u_{*S} - u_S|}, \quad (5)$$

знак зависит от направления (\pm для $\begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix}$).

Эффективные ньютоновские итерации для определения P_* на контактном разрыве [4]:

$$u_{*S}^v = u_S \pm \frac{P_*^v - P_S^v}{W_S^v}, \quad P_{*S}^{v+1} = P_{*S}^v - \frac{Z_L Z_R (u_{*R}^v - u_{*L}^v)}{Z_L + Z_R},$$

где $Z_S = |dP_* / du_{*S}|$, $S = L, R$. Для волны разрежения:

$$\frac{dP_*}{du_{*S}} = C(P_*, \rho_*),$$

а для УВ:

$$\frac{dP_*}{du_{*S}} = \frac{W^2}{W - (dW / dP_*)[P]},$$

где (авторы [6] получили, дифференцируя $[P^2]/2=W[\varepsilon]$ и $\varepsilon_* = \varepsilon(P_*, \tau - [P]/W^2)$ по P_*)

$$\frac{dW^2}{dP_*} = \frac{(C^2 - W^2)W^2}{(P_S + P_*)/2 p_\varepsilon - P_\tau}[P].$$

Авторы [4] предложили использовать для определения состояния по заданному давлению P_* после волны разрежения формулы как для УВ для упрощения вычислений. Для вычисления значений внутри волны разрежения в области между $u \pm c_S$, $u \pm c_{S^*}$ можно использовать линейную интерполяцию по автомодельной переменной x/t . Исключается интегрирование в волне разрежения от P_S до P_* . Авторы [6] заметили, что для локальной модели состояния можно упростить вычисления для УВ, используя априорно известное $\gamma_{S^*}(P_*)$ из локального уравнения состояния. Можно выписать явную формулу для W из выражения $W^2[\varepsilon] = [P^2]/2$ и $\varepsilon_{S^*} = \varepsilon(P_*, \tau_S - [P]/W_S^2)$:

$$W^2 = \frac{P_*^2 - P^2}{2} \left/ \left[\frac{P_*}{\gamma_* - 1} \left(\tau - \frac{P_* - P}{W^2} \right) - \varepsilon \right] \right.$$

Для заданного значения P_* определяются γ_{*S} (4), γ_{*S}^ε (3), приближенное значение W_S^2 используется в расчете $\tau_{S^*} = \tau_S - ([P]/W_S^2)$. Далее вычисляем W_S из (5), $u_{S^*} = u_S \pm (P_* - P_S)/W_S$, $\varepsilon_{S^*} = \varepsilon_S - (\tau_{S^*} - \tau_S)(P_* + P_S)/2$, $\rho_{\alpha, S^*} = \rho_{\alpha, S} \tau_{S^*}/\tau_S$, $\varepsilon_{\alpha, S^*} = \gamma_{*S}^\varepsilon \varepsilon_{S^*}$. Имеем ρ_{S^*} , $\varepsilon_{S^*}^\alpha$, знаем нужные производные для

$$Z_S = \frac{W_S}{1 - \frac{(C_*^2 - W_S^2)/2}{C_S^2 + P_{\varepsilon^*}(P_S - P_*)/2}}$$

и $P_{\alpha^*}(\tau_{S^*}, \varepsilon_{S^*})$ из уравнения состояния. Можем делать следующую итерацию для определения давления на контактном разрыве P_* . Приближение позволяет обойтись без расчета интегралов при каждой итерации P_* в волне разрежения и без решения дополнительных нелинейных уравнений с приближенным значением W^2 в расчете τ_{S^*} с априорно известной долей внутренней энергии $\gamma^\varepsilon(P_*)$ (4).

Для неподвижной эйлеровой сетки нужны значения величин $\rho_\alpha, u_\alpha, P_\alpha, \gamma_\alpha^\varepsilon$ на границе интервалов, т.е. в точке $x/t = 0$, и расположение контактной

границы относительно $x/t = 0$ для определения тангенциальной скорости на контактной границе в многомерных задачах.

Предложенная локальная модель уравнения состояния снимает неопределенность в вычислении удельной внутренней энергии и давления компонента смеси после УВ (волны разрежения) по известным значениям $\gamma_\alpha^\varepsilon \equiv \varepsilon_\alpha/\varepsilon$ после волны. При сложении уравнений энергий всех компонентов разностная схема будет консервативной, если нормировать $\sum_\alpha P_{\alpha*} = P_*$. "Адиабатическая модель" уравнения применяется для расчета безразмерных коэффициентов γ , $\gamma_\alpha^\varepsilon$ ((3), (4)). Скачки энтропии после УВ получаются ненулевыми.

3. Тестовые расчеты

А. Ударная волна в водородной плазме. В качестве теста рассмотрим УВ в водороде, возникающую при задании постоянной скорости на правой границе и движении газа в неподвижной плазме водорода. Начальное состояние – полностью ионизованный водород. В системе присутствуют протоны, электроны. Электроны не вносят вклад в массу, однако переносят тепло с помощью теплопроводности и обмениваются энергией с протонами. Температуры различаются вблизи УВ. Кинетические коэффициенты взяты из [12]: скорость обмена энергиями между компонентами в уравнениях (1)

$$\rho\chi_{ie}(T_i - T_e) = \frac{3m_e n_e}{m_p \tau_e} (kT_e - kT_i), \quad (6)$$

где $\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\lambda e^4 n_e}$, кулоновский логарифм $\lambda = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{kT_e T_i}{T_e + T_i}\right)^3 \frac{1}{e^6 n_e}$,

$n_e = n_i = \rho/m_p$, поток тепла в теплопроводности электронов $-\kappa_e \nabla(kT_e)$ с коэффициентом теплопроводности

$$\kappa_e = 3.16 n_e k T_e \tau_e / m_e. \quad (7)$$

Уравнение состояния – идеальный одноатомный газ для протонов и электронов $\gamma_{i,e} = 5/3$. Предполагается электронейтральность, концентрации и скорости электронов и протонов везде совпадают, скачком плотности электронов на УВ пренебрегаем. В.Д. Шафранов в [18] рассчитал структуру стационарной УВ из условий на скачке и решении обыкновенных дифференциальных уравнений в областях перед УВ и за ее фронтом.

Начальное давление водорода примерно равно атмосферному, а начальная температура выбирается из соображений полной ионизации. Ока-

зывается при начальной температуре 10^4 К и плотности 10^{-6} г·см $^{-3}$ водород уже наполовину ионизован. Уравнения Саха (получаются из равенства сумм химпотенциалов частиц начальных и конечных) для водорода

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{(m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} g_e \exp(-I / (kT)), \quad (8)$$

где потенциал ионизации $I = 13.6$ эВ. Водород оказывается ионизованным уже при невысокой температуре $kT \ll I$. Скорость инжектируемого газа на правой границе выбирается из соображения получения сильной стационарной УВ, на которой скачок плотности близок к четырем, чтобы численное решение можно было сравнить с решением Шафранова для сильной УВ. Выбрана скорость газа на правой границе $-4 \cdot 10^7$ см·с $^{-1}$, давление и температуры компонентов такие, как в невозмущенном газе. При этом за УВ получается скорость газа $-2 \cdot 10^7$ см·с $^{-1}$, давление $5.37 \cdot 10^8$ дин·см $^{-2}$, температура $8.11 \cdot 10^5$ К. Давление чернотельного излучения с такой температурой $\frac{4}{3} \frac{\pi^2}{60(\hbar c)^3} (kT)^4 = 1.2 \cdot 10^9$ дин·см $^{-2}$ уже превышает давление газа. Т.е.

для корректной физической постановки задачи надо вводить фотоны, учитывать перенос их энергии и обмен энергией с электронами, либо снижать скорость на правой границе и интенсивность УВ, что сделано в данной работе.

Численное решение задачи изображено на рис.1, а параметры на УВ представлены в табл.1. Использовалась сетка $\Delta x_j = 2.5 \cdot 10^{-3}$ см. По мере продвижения газа формируется стационарная УВ, движущаяся по невозмущенному газу. Вторая УВ справа, движущаяся по газу со скоростью $v = -4 \cdot 10^7$ см·с $^{-1}$, интерес не представляет. Профили всех величин вблизи УВ смещаются с постоянной скоростью фронта УВ и остаются неизменными. Состояние плазмы неравновесное вблизи УВ, на некотором расстоянии позади фронта устанавливается равновесие. На УВ имеется скачок плотности протонов и скачок их температуры. Благодаря теплопроводности электронов, их температура T_e непрерывна и кусочно-гладкая. Имеем законы сохранения массы, импульса, полной энергии для корректного определения оставшихся величин в области разрывов даже без использования искусственной вязкости. Скорость звука в невозмущенном газе $c_0 = \sqrt{(5/3)P_0 / \rho_0} = 1.66 \cdot 10^6$ см·с $^{-1}$, т.е. скорость Маха УВ получилась равной $M = |D| / c_0 = 16$ относительно невозмущенного газа. Скорость УВ D вычисляется из сохра-

нения потока частиц в системе отсчета УВ: $j = nv_L = \text{const} = (u_i - D)u_i$, где v_L – скорость в системе отсчета УВ, u – скорость в неподвижной лабораторной системе, индекс $i = L, R$ – состояние перед и после УВ. Решение задачи согласуется с точным в пределах десятков процентов на рис.1. Интересно отметить, несмотря на теплопроводность, скачок давления на УВ не мал – почти порядок на 3-х интервалах, а в соседних счетных интервалах разница давлений достигает 3 раза. Т.е. предложенный способ решения задачи о распаде разрыва дает физически осмысленный результат, несмотря на предположение о малости скачка энтропии при вычислении безразмерных коэффициентов газов.

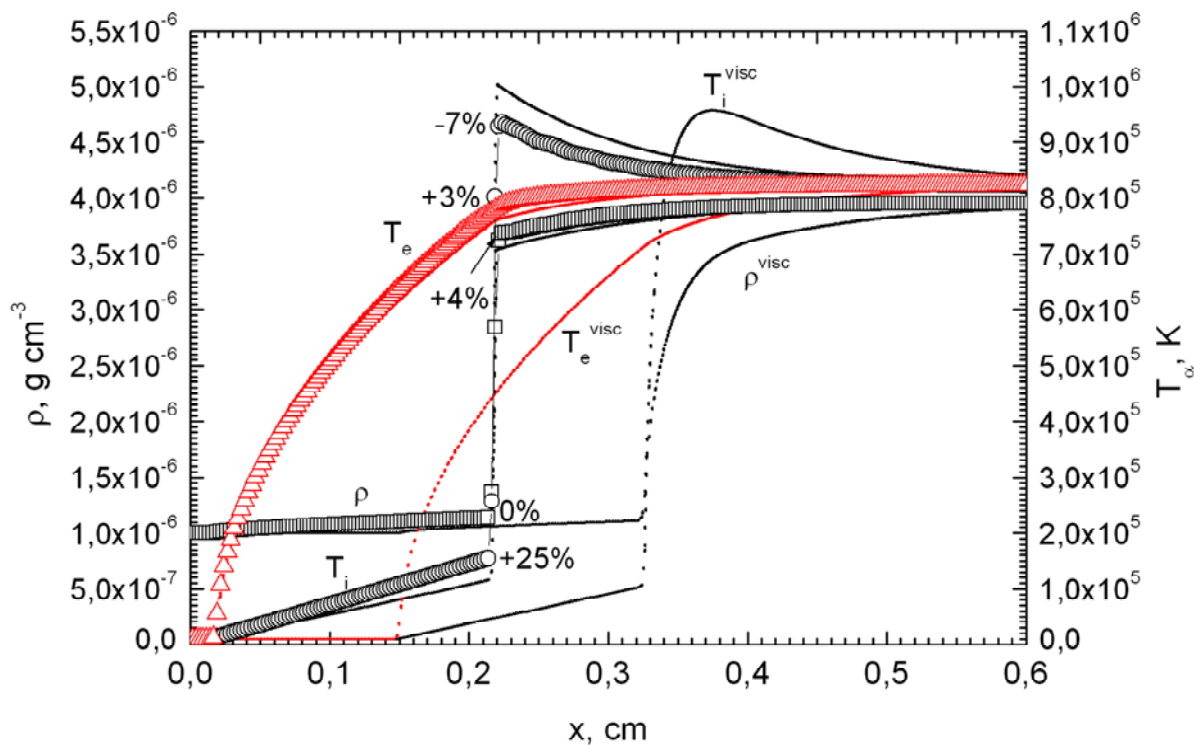


Рис.1. Профили плотности (кружки), температуры протонов (квадраты), электронов (треугольники), сравнение с точным решением задачи Шафранова (пунктир) для сильной УВ $M=16$. Цифры рядом с УВ обозначают относительную точность численного решения. Показано также решение с учетом физической вязкости протонов (сдвинуто правее по оси x).

Решение Шафранова для структуры сильной ударной волны в водородной плазме из двух компонент казалось удачным тестом методики. Скачки температур и плотности для сильной ударной волны известны. Это решение было использовано для тестирования разрабатываемой методики в [19]. Сделаны 2 вывода. **1.** Есть некоторая разница в скачках методики интегрирования системы двухтемпературной ГД и решения Шафранова. **2.** Само решение Шафранова в [18] не есть точное. Шафранов работал с соотно-

шениями на разрывах и решал систему ОДУ по обе стороны разрыва. Шафранов писал о кусочно-гладкой температуре электронов на УВ: $(-\partial T_e / \partial x)_1 > (-\partial T_e / \partial x)_2$, соответственно потоки тепла разные, $(-k(\partial T_e / \partial x))_1 > (-k(\partial T_e / \partial x))_2$, в коэффициенте теплопроводности зависимость от концентрации пропадает. И необходимо включить в соотношения на разрывах потоки тепла за счет электронной теплопроводности, для чего надо знать профиль температуры электронов по обе стороны от разрыва. Скачок температуры ионов в разработанной схеме на УВ оказался ниже решения Шафранова, но и само решение Шафранова занижает этот скачок, т.к. не учитывает теплопроводность на УВ. Т.е. работа [19] привела к выводу о том, что схема работает правильно, но количественная мера качества схемы была не определена.

Таблица 1. Параметры плотности и температур в задаче Шафранова на сильной УВ с $M=16$, распространяющейся по невозмущенному газу $\rho_0=1 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}$, $T_0=1 \cdot 10^4 \text{ К}$.

	ρ_1 / ρ_0	ρ_2 / ρ_0	T_{i1} / T_0	T_{i2} / T_0	T_e / T_0
решение Шафранова	1.13	3.53	13.0	101	55.4
численное решение	1.13	3.68	15.3	93.4	78.0
точное решение задачи с нулевой вязкостью	1.13	3.55	11.6	101	76.1
точное решение задачи с физической вязкостью	1.13	3.46	10.7	95.7	75.0
задача без теплопроводности численное решение	1.00	3.96	1.00	157	1.00..8.05
точное решение с "нулевой" вязкостью	1.00	3.96	1.00	135	1.00..26.7

Естественно требование получить решение задачи Шафранова, чтобы делать выводы о возможностях метода. Шафранов допускал разные скорости и разделение зарядов в самой УВ, в нашем приближении электронейтральности скорости протонов и электронов повсюду совпадают.

Б. Решение задачи Шафранова. Проще всего получить решение задачи Шафранова с помощью решения системы уравнений в частных производных. Для исключения разрывов можно включить в рассмотрение вязкость протонов, т.е. перейти от гиперболической системы уравнений к параболической. Закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4\eta_p}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

импульса

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v^2 + P - \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

уравнения для энергий компонентов

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x} \right) = - \left(P_p - \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \chi (k_B T_p - k_B T_e),$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\rho E + P - \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) v - \kappa \frac{\partial k_B T}{\partial x} \right) = \rho Q, \quad (9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial x} \right) = - P_e \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_e \left(\frac{\partial k_B T_e}{\partial x} \right) \right) - \chi (k_B T_e - k_B T_p),$$

необходимые кинетические коэффициенты

$$k_B T_\alpha = (\gamma - 1) m_p \varepsilon_\alpha,$$

$$\kappa_e \sim \frac{3.16 n k_B T_e}{m_e} \tau_e = \frac{3.16}{\sqrt{m_e}} \frac{3 (k_B T_e)^{5/2}}{4 \sqrt{2} \pi \lambda e^4}, \quad \tau_e = \frac{3 \sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2}}{4 \sqrt{2} \pi \lambda e^4 n},$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{k_B T_p k_B T_e}{k_B T_p + k_B T_e} \right)^3 \frac{1}{e^6 n} \right], \quad \kappa_p \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{k_B T}{m_p}},$$

$$\eta_p \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{m_p k_B T} = \frac{\kappa_p}{\sqrt{(k_B T) / m_p}} \sqrt{m_p k_B T} = \kappa m_p = m_p \frac{3.92}{\sqrt{m_p}} \frac{3 k_B (k_B T_i)^{3/2}}{4 \sqrt{2} \pi \lambda e^4},$$

$$\chi_e = \frac{3 m_e}{m_p} \frac{n}{\tau_e} = \frac{3 m_e}{m_p} n \frac{4 \sqrt{2} \pi \lambda e^4 n}{3 \sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2}},$$

$$\sigma_{ij} = \rho v_i v_j + P \delta_{ij} - \sigma'_{ij}, \quad \sigma_{xx} = \rho v^2 + P - \sigma'_{xx} = \rho v^2 + P - \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\sigma'_{xx} = \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x},$$

Численно задачу проще решать в лагранжевых переменных ($dm = \rho dx, t$), движущихся вместе с веществом. Вводится сетка $m_{j+1/2}$ и величины на гра-

ницах $v_{j+1/2}$ и интервалах сетки $\varepsilon_{p,j}$, $\varepsilon_{e,j}$. Далее используется метод Прямых: оставляем производные по времени, для аппроксимации пространственных производных используем центральные разности. Уравнение для лагранжевой координаты

$$\frac{dr_{j+1/2}}{dt} = v_{j+1/2}, \quad \rho_j = \frac{\Delta m_j}{\Delta r_j}, \quad \frac{dv_{j+1/2}}{dt} + \frac{\partial P}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{4\eta_p}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \right],$$

скорости

$$\frac{d\varepsilon_{p,j}}{dt} = - \left(P_p - \frac{4\eta}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial m} - \frac{\chi}{\rho} (k_B T_p - k_B T_e),$$

уравнения для удельных энергий

$$\frac{d\varepsilon_{e,j}}{dt} = -P_e \frac{\partial v}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} \left(\kappa_e \left(\frac{\partial k_B T_e}{\partial r} \right) \right) - \frac{\chi}{\rho} (k_B T_e - k_B T_p).$$

Система ОДУ решается неявным методом Гира [21]. Ширина вязкого скачка в случае учета физической вязкости в $\sqrt{m_p / m_e}$ раз меньше ширины области электронной теплопроводности.

На рис.1 представлено численное решение задачи об ударной волне в плазме, "точное" решение математической задачи и решение физической задачи с реальной вязкостью. Нанесены отличия скачков в разрабатываемой методике от решения математической задачи. Физическая задача ближе к численному решению, ширина вязкого скачка в $\sqrt{m_p / m_e}$ раз меньше ширины скачка теплопроводности электронов и хорошо разрешается на подробной сетке. Совпадение для сильной ударной волны всех величин в газодинамическом коде хорошее, разница для значений плотности и температур составляет несколько %, за исключением 25% завышенного прогрева ионов перед УВ. Впрочем, вклад протонов в суммарное давление перед УВ мал.

Однако УВ выбрана сильной – давление за УВ на 3 порядка выше, чем перед УВ. Можно понизить интенсивность УВ так, чтобы приближенная модель уравнения состояния была формально применимой. Для скачка давления на один порядок после УВ и $M = 3.5$ точность расчетов более чем приемлемая для значений плотности (рис.2) и температур – худшие показатели у скачка температуры протонов за УВ, дефицит температуры составляет 5% на рис.3.

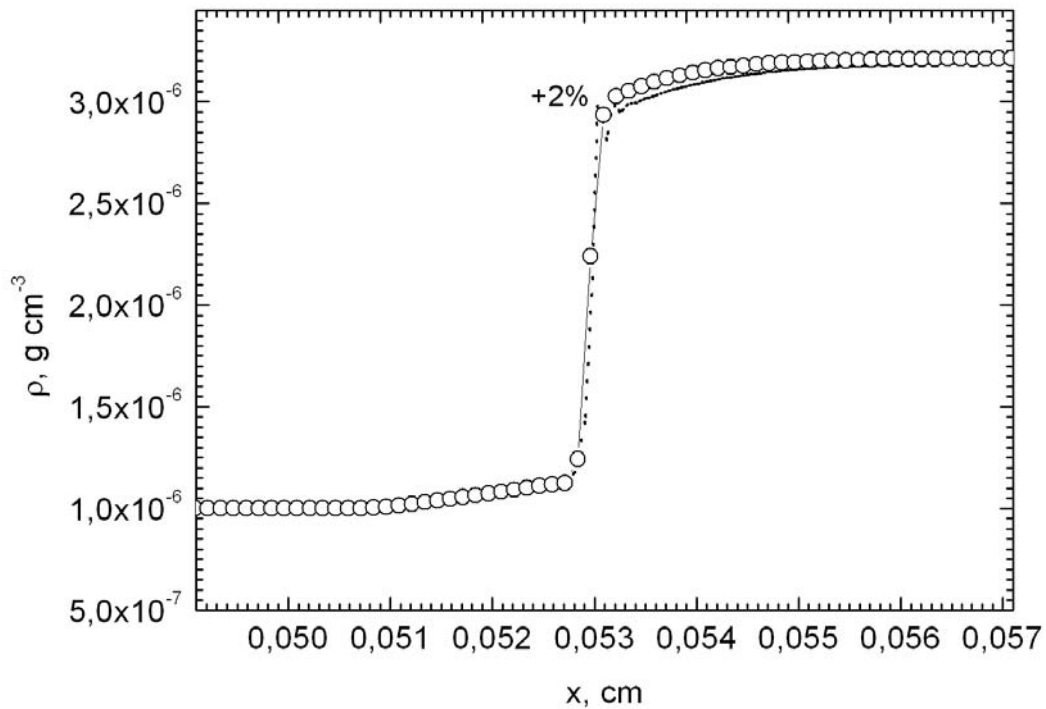


Рис.2. Профили плотности (кружки), сравнение с точным решением задачи Шафранова (пунктир) для "слабой" УВ $M=3.5$. Цифры рядом с УВ демонстрируют лучшую относительную точность численного решения.

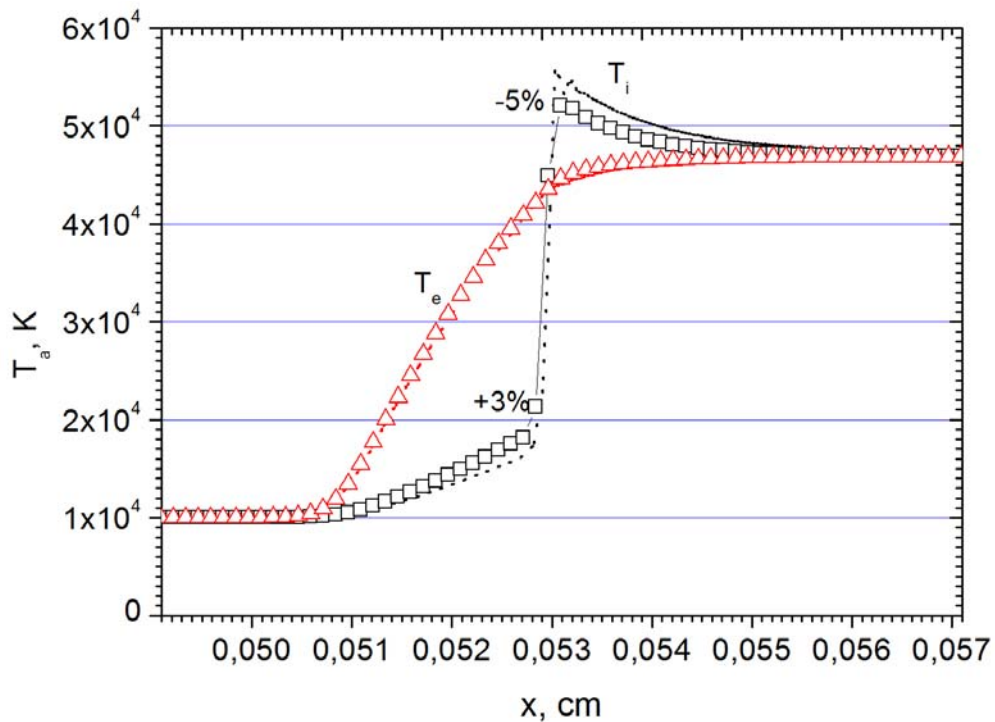


Рис.3. Профили температур протонов (квадраты), электронов (треугольники), сравнение с точным решением задачи Шафранова (штрихи) для "слабой" УВ $M=3.5$.

Задача с выключенной теплопроводностью (принципиально это можно сделать с помощью поперечного магнитного поля) представляет для проверки метода также большой интерес. Можно ли получить решение с по-

мощью предложенной методики? Слабая УВ – применимо предположение о слабом изменении энтропии, решение однозначно определено. Повышение скорости инжектируемого газа приводит к росту температуры протонов за УВ и выходу температуры электронов на константу. Полное давление и скорость имеют всюду постоянные значения, за исключением двух интервалов на УВ. Формально имеем 3 консервативных величины и 3 уравнения в виде закона сохранения. Имеем дифференциальное уравнение для разницы температур. Вопрос состоит в корректности счета разницы температур за УВ. Простые рассуждения приводят к выводу о том, что за сильной УВ вся тепловая энергия приходится на протоны, далее идет область выравнивания температур. Т.е. за сильной УВ T_i должна быть в 2 раза выше, $\sim 1.6 \cdot 10^6$ К, чем в области выравнивания температуры. При малых временах релаксационный член в правой части мал, фактически получается численное решение задачи о распаде разрыва. Имеем правильный скачок температуры ионов – вся внутренняя энергия оказывается в протонах за сильной УВ (табл.1). Используемый приближенный "решатель" задачи о распаде разрыва дает везде одинаковые температуры протонов и электронов за УВ при их равенстве перед волной $\gamma_i^\varepsilon = \gamma_e^\varepsilon$. Формально "решатель" для сильного скачка давления (почти 3 порядка в задаче без теплопроводности на 2 интервала сетки) неправильный. От него требуется физически разумное решение и консервативность схемы для суммарной энергии всех компонент. Правильный скачок давления для протонов – результат схемной вязкости на УВ (снижения порядка метода для большого скачка давления до первого) и градиента давления электронов в уравнениях для энергий (см. табл.1). В этой же таблице представлено точное решение системы уравнений с заниженным коэффициентом физической вязкости (с множителем 0.02). Даже такая искусственно уменьшенная ширина переходной области немного размывает эффект скачка температуры ионов – параметры, полученные в газодинамической схеме (сетка $\Delta x = 1.5 \cdot 10^{-5}$ см), ближе к идеализированной модели без вязкости и теплопроводности (на сетке $\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-3}$ см).

С. Однородное движение смеси газов с контактными разрывами. Задача об однородном движении смеси идеальных газов с разными массами частиц изображена на рис.4, 5. Имеем границу, разделяющую 2 идеальных газа, с постоянным давлением $P=1$, постоянной скоростью $v=1$, одинаковыми постоянными температурами, одинаковыми концентрациями $n_\alpha = \rho_\alpha / m_\alpha$. Массы частиц различаются на два порядка: $m_\alpha = 1, 100$. Тест демонстрирует отличное сохранение контактных границ гудуновской схемой высокого по-

рядка точности. Размытие контактной границы остается в пределах трех интервалов сетки. Скорости, плотности, температуры остаются невозмущенными. Это значит, что для ряда задач можно с помощью введения концентраций и табличных уравнений состояния моделировать движение газа в области сложной формы на регулярной эйлеровой сетке без явного выделения границ в подвижных лагранжевых координатах. Это удобно при исследовании неустойчивостей на границах.

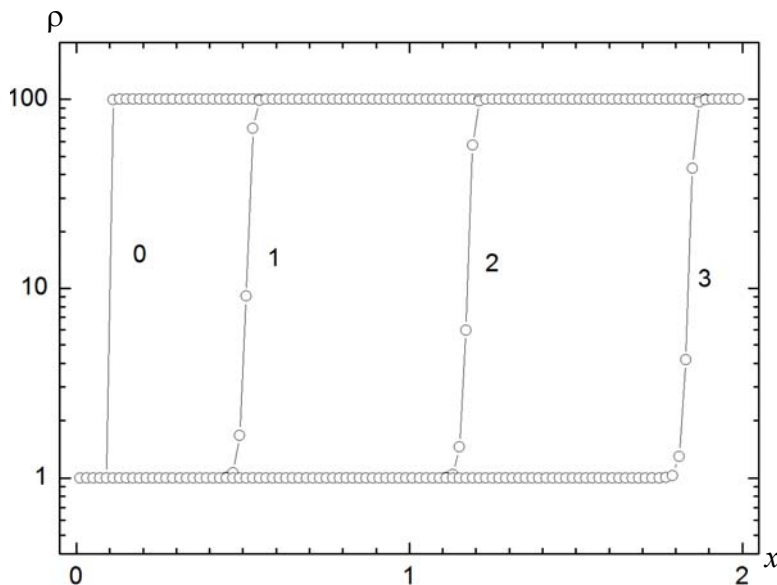


Рис.4. Профили плотности смеси двух идеальных газов с массами частиц 1,100. В начальный момент времени постоянная скорость $v=1$, постоянное давление $P=1$, одинаковые и постоянные температуры и концентрации. Моменты времени $t=0$ (0), 0.42 (1), 1.09 (2), 1.75 (3).

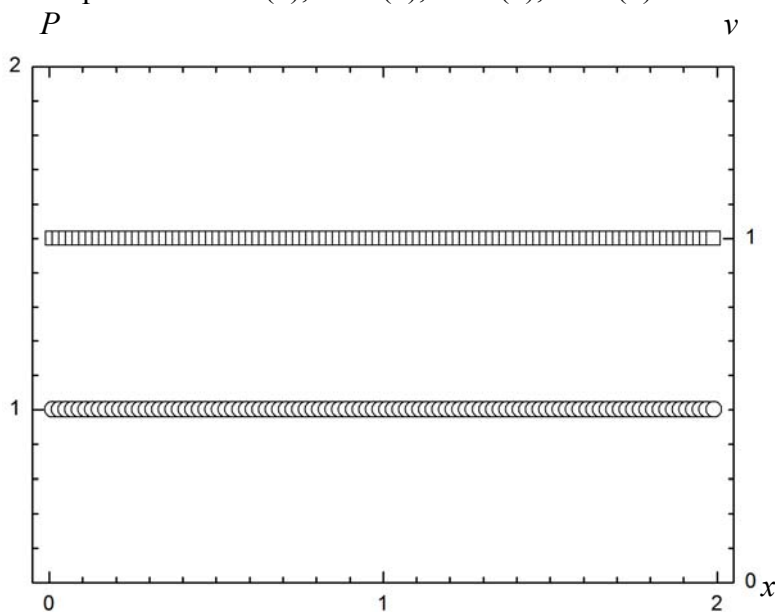


Рис.5. Профили давления (кружки) и скорости (квадраты) смеси двух идеальных газов с массами частиц 1,100. Постоянная скорость $v=1$, постоянное давление $P=1$ в начальный момент времени остаются постоянными в те же моменты времени, что на рис.4.

4. Заключение

С помощью полученного "точного" решения задачи об УВ в плазме проверен численный метод для интегрирования уравнений газовой динамики многокомпонентного многотемпературного газа на неподвижной эйлеровой сетке. Метод основан на оригинальном приближенном "адиабатическом" решении задачи Римана. По трудоемкости расчетов распада разрыва для табличного уравнения состояния и многокомпонентного газа используемый алгоритм не отличается от идеального однокомпонентного газа. Для сильной ударной волны с $M = 16$ точность методики составляет десятки процентов для температуры ионов перед УВ. Вклад в суммарное давление этих ионов мал, а точность описания температуры электронов несколько процентов. Дефицит прогрева ионов после сильной УВ составляет несколько процентов. Точность описания плотности укладывается в несколько процентов. Для слабой УВ с $M = 3.5$ все параметры расчетов улучшаются и укладываются в единицы процентов. В случае выключенной электронной теплопроводности метод также дает правильный количественный результат.

Проведенная в работе количественная оценка точности приближенного метода "решателя" задачи Римана важна, т.к. термоядерное горение чувствительно к ошибкам в расчете ионной температуры. Очевидно, режим горения в моделях термоядерных сверхновых звезд также требует достаточной точности расчета температуры ионов. Для сильной УВ скачок температуры ионов в газодинамической схеме на 7% ниже точного решения. Впрочем, ошибка меньше -2%, если сравнить с более физичным решением, учитывающим вязкость ионов. Режим волны горения в сверхновых (детонация или дефлаграция) чувствителен к сильному вырождению электронов – большой рост давления сопровождается недостаточным для возникновения детонации ростом температуры на УВ. Разрабатываемый метод позволяет проводить расчеты с произвольным уравнением состояния.

Одновременно в работе получено решение задачи об ударной волне в водородной плазме через 60 лет после ее постановки [18]. Учтена разница тепловых потоков электронов вблизи УВ с помощью решения системы уравнений в частных производных с теплопроводностью и вязкостью без УВ. Разделением зарядов на ударной волне пренебрегли, в математической постановке повсюду предполагается электронейтральность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Годунов. Разностный метод расчета ударных волн // Успехи математических наук, 1957, 12:1(73), 176-177;
S.K. Godunov. A Difference Scheme for the shock wave calculations // Usp. Mat. Nauk, 1957, 12, 176-177.
2. G.V. Vereshchagin and A.G. Aksenov // Relativistic Kinetic Theory, 2017.

3. С.К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник, 1959, 47(89)3, 271-306;
S.K. Godunov. A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations // Math. Sbornik, 1959, 47(89):3, 271-306.
4. *P. Colella and P.R. Woodward. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // Journal of Computational Physics, 1984, 54, 174.*
5. *P.L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // Journal of Computational Physics, 1997, 135, 250.*
6. *P. Colella and H.M. Glaz. Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases // Journal of Computational Physics, 1985, 59, 264.*
7. *M.M. Basko, M.D. Churazov, and A.G. Aksenov. Prospects of heavy ion fusion in cylindrical geometry // Laser and Particle Beams, 2002, 20, 411-414.*
8. *S.I. Anisimov, V.V. Zhakhovskii, N.A. Inogamov, K. Nishihara, Y.V. Petrov and V.A. Kholov. Ablated matter expansion and crater formation under the action of ultrashort laser pulse // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2006, 103, 183-197.*
9. *V.E. Fortov, D.H. Hoffmann, and B.Y. Sharkov. Reviews of topical problems: Intense ion beams for generating extreme states of matter // Physics Uspekhi, 2008, 51(2), 109-131.*
10. *S.W. Bruenn. Stellar core collapse: numerical model and infall epoch // ApJS, 1985, 58, 771.*
11. *M. Pelanti and K.-M. Shyue. A mixture-energy-consistent six-equation two-phase numerical model for fluids with interfaces, cavitation and evaporation waves // Journal of Computational Physics, 2014, 259, 331-357.*
12. *В.Т. Жуков, В.Т. Забродин, О.В. Феодоритова. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1993, 33:8, 1240-1250.*
V.T. Zhukov, A.V. Zabrodin, and O.V. Feodoritova. A method for solving two-dimensional equations of heat-conducting gas dynamics in domains of complex configurations // J. Comp. Math. and Math. Physics, 1993, 33:8, 1099-1108.
13. *G.H. Miller and E.G. Puckett. A high-order Godunov method for multiple condensed phases // Journal of Computational Physics, 1996, 128, 134-164.*
14. *A.G. Aksenov and M.D. Churazov. Ignition problems for advanced fuel // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 2001, A 464, 180-184.*
15. *A.G. Aksenov and M.D. Churazov. Deuterium targets and the MDMT code // Laser and Particle Beams, 2003, 21(1), 81-84.*
16. *A.G. Aksenov, M.D. Churazov, A.A. Golubev, D.G. Koshkarev, and E.A. Zabrodina. Cylindrical targets for heavy ions fusion // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 2005, A 544, 412.*
17. *В.М. Чечеткин, А.Г. Аксенов. Механизм взрыва сверхновых с участием нейтрино // Ядерная физика, 2018, 81(1), в печати.*
V.M. Chechetkin, A.G. Aksenov. Supernova-Explosion Mechanism Involving Neutrinos // Nucl. Phys., 2018, 81, accepted.
18. *В.Д. Шафранов. Структура ударной волны в плазме // ЖЭТФ, 1957, 5, 1183;*
V.D. Shafranov. A structure of the shock wave in the plasma // JEIP, 1957, 5, 1183.
19. *A.G. Aksenov. Computation of shock waves in plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015, 55, 1752.*
20. *M.M. Basko. Metallic equation of state in the maen ion approximation // Sov. J. Plasma Phys., 1984, 10, 689-694.*
21. *C.W. Gear. Numerical initial value problems in ordinary differential equations // Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs. – New Jersey: 1971.*