В. П. Ильин, О полной непрерывности оператора вложения для случая неограниченной области, *Докл. АН СССР*, 1960, том 135, номер 3, 517–519

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 135, № 3

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

О ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 VI 1960)

В настоящей заметке мы приведем некоторые достаточные условия полной непрерывности оператора вложения для случая, когда функции соответствующих функциональных классов определены на всем n-мерном пространстве E_n или на подпространстве E_m размерности $m < n$. Вопросами аналогичного рода для частного случая (вложение в $L_2(E_n)$) занимались А. М. Молчанов [1], М. Ш. Бирман [2], М. Ш. Бирман и Б. С. Павлов *. Результаты этих авторов имеют характер необходимых и достаточных условий.

Пусть E_n — n-мерное эвклидово пространство, $\omega(X) = \omega(x_1, \ldots, x_n)$ — положительная измеримая функция, заданная в E_n. Пусть $p > 1$.

Обозначим через $L_p(\omega; E_n)$ — множество функций $f(X)$, заданных в E_n, для которых

$$\|f\|_{L_p(\omega;\ E_n)} = \Big[\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(E_n)} \omega\,|f|^p\,dX\Big]^{1/p} < \infty. \qquad (1)$$

Пусть l — произвольное положительное число, $\bar{l} = [l]$. Пусть $f(X)$ имеет непрерывные производные порядка $\bar{l}$. Положим

$$\|f\|_{L_p^{(l)}(E_n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_{\bar{l}}=1}^{n}\left[\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(E_n)}\left(\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(E_n)}\frac{\left|\dfrac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{\bar{l}}}} - \dfrac{\partial^{\bar{l}} f(Y)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{\bar{l}}}}\right|^p}{|X-Y|^{n+(l-\bar{l})p}}\,dY\right)dX\right]^{1/p} \qquad (2)$$

при l нецелом и

$$\|f\|_{L_p^{(l)}(E_n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_{\bar{l}}=1}^{n}\left[\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(E_n)}\left|\frac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{\bar{l}}}}\right|^p dX\right]^{1/p} \qquad (2')$$

при l целом, если правые части (2) или соответственно (2′) конечны. Положим, далее,

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(\omega;\ E_n)} = \|f\|_{L_p(\omega;\ E_n)} + \|f\|_{L_p^{(l)}(E_n)}. \qquad (3)$$

Если $\omega \equiv 1$, то будем писать $W_p^{(l)}(E_n)$, соответственно $L_p(E_n)$. Определим пространство $W_p^{(l)}(\omega; E_n)$ как замыкание множества $\bar{l}$ раз непрерывно дифференцируемых функций, для которых правая часть (3) конечна, в норме (3).

* Не опубликовано.

Далее, через $Ш_R^{(n)}(X)$ будем обозначать n-мерный шар радиуса R с центром в X; в частности $Ш_R^{(n)}(0)$ означает шар с центром в начале координат; $E_n - Ш_R^{(n)}(0)$ — дополнение $Ш_R^{(n)}(0)$ до E_n; $|X| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — расстояние от X до начала координат.

Теорема 1. *Пусть F — множество функций $f(X) \in W_p^{(l)}(\omega; E_n)$ такое, что*

$$\sup_{f \in F} \|f\|_{W_p^{(l)}(\omega;\, E_n)} \leqslant M, \tag{4}$$

где $\omega(X)$ удовлетворяет условиям:

$$\sup_{Y \in E_n} \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{Ш_H^{(n)}(Y)} \omega^{-p'/p}(X)\, dX < \infty; \qquad \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{Ш_H^{(n)}(Y)} \omega^{-p'/p}(X)\, dX \to 0 \ \text{при} \ |Y| \to \infty, \tag{5}$$

где $H > 0$ — фиксированное число.

Тогда, если

$$0 \leqslant s < l, \quad q \geqslant p > 1, \quad m \text{ — целое}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \quad l - s + \frac{m}{q} - \frac{n}{p} > 0, \tag{6}$$

то функции $f \in F$, рассматриваемые на гиперплоскости E_m размерности m, образуют множество F', компактное в $W_q^{(s)}(E_m)$.

Доказательство. Исходя из неравенства

$$\left| \frac{\partial^k f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right| \leqslant \frac{C_1}{h^{n+k}} \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{Ш_h^{(n)}(X)} |f(Y)|\, dY +$$

$$+ \sum_{i_1, \ldots, i_{\bar{l}} = 1}^{n} C_{i_1 \ldots i_{\bar{l}}} \int_0^h \frac{dv}{v^{1+n+k-l}} \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{Ш_v^{(n)}(X)} \left(\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{(E_n)} \frac{\left| \dfrac{\partial^{\bar{l}} f(Y)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{\bar{l}}}} - \dfrac{\partial^{\bar{l}} f(Z)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{\bar{l}}}} \right|^p}{|Y - Z|^{n + (l - \bar{l})p}} dZ \right)^{1/p} dY \right]$$

(при целом l второе слагаемое записывается проще), справедливого для непрерывно дифференцируемых функций при любом целом $k < l$, где h — произвольное положительное число, C_i не зависят от f и h, а также аналогичного типа неравенства для разностей производных порядка k, нетрудно доказать, что:

1) Для любой области $\Omega_n \subset E_n$ (в частности, для $\Omega_n = E_n$) справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p(\Omega_n)} \leqslant C_2 h^{-n/p'} \|f\|_{L_p(\omega;\, E_n)} \sup_{X \in \Omega_n} \left(\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{Ш_h^{(n)}(X)} \omega^{-p'/p}(Y)\, dY \right)^{1/p'} + C_3 h^l \|f\|_{L_p^{(l)}(E_n)}. \tag{7}$$

2)
$$\|f\|_{W_q^{(s)}(E_m)} \leqslant C_4 \left(\|f\|_{L_p(E_n)}^{l - s + m/q - n/p} \|f\|_{W_p^{(l)}(\omega;\, E_n)}^{n/p + s - m/q} \right)^{1/l}. \tag{8}$$

Из (8) следует ($l - s + m/q - n/p > 0$), что достаточно доказать компактность множества F в $L_p(E_n)$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы при любом $R > 0$ F было компактно в метрике $L_p(Ш_R^{(n)}(0))$ и при $R \to \infty$

$$\sup_{f \in F} \|f\|_{L_p(E_n - Ш_R^{(n)}(0))} \to 0. \tag{9}$$

Первое утверждение доказывается обычным способом, а второе следует из (8) при $\Omega_n = E_n - Ш_R^{(n)}(0)$. Действительно, считая $h \leqslant H$, на основании (4) имеем:

$$\|f\|_{L_p(E_n - Ш_R^{(n)}(0))} \leqslant C_6 M \left[h^{-n/p'} \sup_{X \in E_n - Ш_R^{(n)}(0)} \Big(\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{Ш_H^{(n)}(X)} \omega^{-p'/p}(Y)\, dY\Big)^{1/p'} + h^l\right],$$

откуда, в силу (5) и произвольности h, получаем (9).

Замечание. Положим для любого положительного числа s

$$\|f\|_{C^{(s)}(E_n)} = \sup_{X \in E_n} |f(X)| + \sup_{X \in E_n} |f'(X)| + \ldots + \sup_{X \in E_n} |f^{[s]}(X)| +$$

$$+ \sup_{X, Y \in E_n} \frac{|f^{[s]}(X) - f^{[s]}(Y)|}{|X - Y|^{s - [s]}}.$$

Тогда, если условие (6) теоремы 1 выполнено в форме

$$0 \leqslant s < l, \quad l - s - \frac{n}{p} > 0, \tag{6'}$$

то множество E компактно в $C^{(s)}(E_n)$.

Теорема 2. *Пусть F — множество функций $f(X) \in W_p^{(l)}(E_n)$, для которых*

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(E_n)} \leqslant M. \tag{5'}$$

Пусть $\bar{s}$, m — целые числа, $0 \leqslant \bar{s} < l$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $q \geqslant p > 1$, $l - \bar{s} + m/q - n/p > 0$. Пусть, далее, E_m — гиперплоскость размерности m; $\omega(X)$ — положительная функция, определенная на E_m, удовлетворяющая условиям:

$$1) \sup_{Y \in E_m} \overbrace{\int \ldots \int}^{m}_{Ш_H^{(m)}(Y)} \omega(X)\, dX < \infty, \quad \overbrace{\int \ldots \int}^{m}_{Ш_H^{(m)}(Y)} \omega(X)\, dX \to 0 \quad \text{при } |Y| \to \infty; \tag{10}$$

2) *существует такое число $\delta > 0$, что*

$$\sup_{Y \in E_m} \Big(\overbrace{\int \ldots \int}^{m}_{Ш_H^{(m)}(Y)} \frac{\omega(X)\, dX}{|X - Y|^{[n/p + s + \delta - l]q}}\Big) < \infty, \tag{11}$$

где $H > 0$ — фиксированное число.

Тогда производные порядка $\bar{s}$ функций $f \in F$, рассматриваемые на гиперплоскости E_m, образуют множество F', компактное в $L_q(\omega; E_m)$.

Для доказательства применяются те же методы, что и выше.

Замечание. Если $l - \bar{s} - n/p > 0$, то условие (11) является лишним (можно положить $\delta = l - \bar{s} - n/p > 0$, и тогда (11) совпадает с первым из условий (10)). В этом случае М. Ш. Бирманом и Б. С. Павловым получены необходимые и достаточные условия.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 VI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Молчанов, Тр. Моск. матем. общ., 2, 169 (1953). [2] М. Ш. Бирман, ДАН, 125, № 3 (1959).