УДК 517.986+512.554

ЙОРДАНОВЫ ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ

Ш. А. Аюпов

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена обзору ряда результатов, полученных в последние годы в теории йордановых алгебр самосопряженных операторов (JC- и JW-алгебр) и их абстрактных обобщений — йордановых банаховых алгебр. Эти алгебры являются вещественными неассоциативными аналогами C^*- и W^*-алгебр (алгебр фон Неймана).

Впервые систематическое изложение теории JW-алгебр было дано в 1965 году в работе Топпинга [68], хотя алгебраические предпосылки для этой теории уже имелись в работе Йордана-фон Неймана-Вигнера [46] и в работе фон Неймана [18]. Исследование JC- и JW-алгебр было продолжено в работах Штёрмера и других [34, 35], [59—62].

Наиболее бурное развитие этого направления началось после появления в конце семидесятых годов работ Альфсена-Шульца-Штёрмера [25] и Шульца [55], где были введены и изучены йордановы банаховы алгебры — JB-алгебры и JBW-алгебры, и, в частности, доказан для них аналог теоремы Гельфанда—Наймарка. Существенное отличие этой теоремы от классической (для C^*-алгебр) заключается в том, что существуют исключительные JB-алгебры, не имеющие операторных представлений.

В последние 5—6 лет появилось значительное количество работ, посвященных самым различным аспектам теории йордановых банаховых алгебр, — как специфических для йордановых алгебр, так и аналогам соответствующих аспектов теории C^*-алгебр и W^*-алгебр. В настоящее время эта теория продолжает интенсивно развиваться и находит интересные приложения в некоторых отраслях математики и квантовой теории.

В настоящем обзоре мы не ставили целью охватить как можно больше разделов теории йордановых операторных алгебр и йордановых банаховых алгебр. Более того, вне нашего поля зрения остались такие важные разделы, как геометрия пространств состояний JB-алгебр (см. [22, 23, 26, 44]), JB-алгебры и некоммутативная спектральная теория [24], теория интегрирования на йордановых алгебрах [4, 11, 43] и приложения к вопросам квантовой теории вероятностей и эргодической теории [1, 6]. Кроме того, имеется глубокая связь между JB-алгебрами и теорией самодуальных конусов в гильбертовых пространствах. Этот аспект теории подробно изложен в монографии [43], где также можно найти обзор и других результатов и библиографию по теории йордановых банаховых алгебр. Мы не касаемся и йордановых алгебр неограниченных самосопряженных операторов и их абстрактных обобщений, в частности, упорядоченных йордановых алгебр — OJ-алгебр, рассмотренных в монографии [17] (см. также [2, 6, 7, 16]).

В работе приведены, в основном, последние результаты, относящиеся к классификации JBW-алгебр и к связи между JW-алгебрами и их обертывающими W^*-алгебрами. Показано, как эти результаты могут быть применены при доказательстве аналогов многих важнейших результатов теории W^*-алгебр (классификация инъективных факторов, теория Томиты—Такесаки, теоремы Радона—Никодима и другие). Сформулированы некоторые открытые проблемы, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов.

В § 1 приведены основные определения и необходимые сведения из теории JW-алгебр и йордановых банаховых алгебр. В § 2 установлена связь между типами JW-алгебры и ее обертывающей W^*-алгебры, введены понятия веса и следа на JBW-алгебре. С помощью этих результатов в § 3 приведена конструкция JW-факторов типа II и III, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры. Показано, что вопрос о полной классификации JW-факторов можно свести к проблеме классификации W^*-факторов и их инволютивных $*$-антиавтоморфизмов с точностью до сопряженности. Почти полное решение этой проблемы для случая инъективных W^*-факторов мы приводим в § 4. В § 5 рассмотрены два подхода к построению аналога теории Томиты-Такесаки для JBW-алгебр. В § 6 обсуждаются различные варианты теоремы Радона—Никодима для весов, следов и состояний на JBW-алгебрах. В частности, доказана теорема Радона—Никодима для полуконечных весов относительно точного нормального полуконечного следа. Наконец, в § 7 рассмотрены меры на идемпотентах JBW-алгебр и для них получен аналог теоремы Глисона. Именно, показано, что всякая вероятностная мера на идемпотентах JBW-алгебры без прямых слагаемых типа I_2 единственным образом продолжается до нормального состояния. Заметим, что эта теорема даже для случая W^*-алгебр полностью была доказана сравнительно недавно [13, 15, 28, 70].

В заключение я хочу поблагодарить Д. П. Желобенко за полезные обсуждения. Кроме того, я признателен Штёрмеру, обратившему мое внимание на препринт [42], и Джиордано, ознакомившему меня с диссертацией [38] до ее опубликования в [39, 40].

§1. ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЙОРДАНОВЫ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ

1.1. Через $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ обозначаются соответственно поля вещественных, комплексных чисел и тело кватернионов. Алгебру всех ограниченных самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H обозначим через $B(H)$. J-алгебра — это вещественное линейное пространство самосопряженных операторов из $B(H)$, замкнутое относительно йорданова умножения $a \circ b = {}^1/_2(ab+ba)$, где ab — обычное ассоциативное произведение операторов a, $b \in B(H)$. Очевидно, всякая J-алгебра A замкнута относительно операции $aba = 2a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b$, a, $b \in A$. Если J-алгебра замкнута в слабой (соответственно равномерной) операторной топологии в $B(H)$, то она называется JW-алгеброй (соответственно JC-алгеброй). Для самосопряженных операторов a, $b \in B(H)$ известно, что следующие три условия эквивалентны: а) $ab = ba$; б) $a \circ (c \circ b) = (a \circ c) \circ b$ для всех $c \in B(H)$; в) $a \circ (a \circ b) = a^2 \circ b$ [68]. Следовательно, J-алгебра ассоциативна тогда и только тогда, когда все операторы в ней коммутируют. Поэтому ассоциативную J-алгебру называют абелевой. Центр Z_A J-алгебры A — это пересечение всех максимальных абелевых подалгебр в A. Если A—JW-алгебра, то вместе с оператором a она содержит все его спектральные проекторы. В частности, всякая JW-алгебра равномерно порождается своими проекторами и содержит наибольший проектор. Поэтому далее всюду считаем, что этим наибольшим проектором в JW-алгебре является единичный оператор $\mathbf{1}$. Если $Z_A = \{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbf{R}\}$, то JW-алгебра A называется JW-фактором. Вместе с каждым оператором a JW-алгебра A содержит его центральный носитель $C(a)$, т. е. наименьший центральный проектор e такой, что $ea = a$. Если $C(a) = \mathbf{1}$, то a называется точным.

1.2. Пусть A — JW-алгебра. Проектор $e \in A$ называется абелевым, если eAe—абелева JW-алгебра. Если A содержит точный абелев проектор, то говорят, что A имеет тип I. Проектор $e \in A$ называется модулярным, если решетка $[0, e] = \{f \in \mathcal{P}_A : f \leqslant e\}$ является модулярной, т. е. $(f \vee g) \wedge h = f \vee (g \wedge h)$ для всех f, g, $h \in [0, e]$, $f \leqslant h$, где $\mathcal{P}_A$ — решетка всех проекторов из A. Понятие модулярного проектора в JW-алгебре является аналогом понятия конечного проектора в W^*-алгебре [66, гл. V, теорема 1.37]. JW-алгебра A называется:

модулярной, если $\mathbf{1}$ является модулярным проектором в A;

локально модулярной, если в A существует точный модулярный проектор;

собственной немодулярной, если в A не существует ненулевых центральных модулярных проекторов;

чисто немодулярной, если в ней нет ненулевых модулярных проекторов.

Если локально модулярная JW-алгебра не содержит ненулевых абелевых проекторов, то говорят, что она имеет тип II.

Теорема 1.1 ([68]). Произвольная JW-алгебра единственным образом раскладывается в прямую сумму пяти JW-алгебр следующих типов:

(i) типа I модулярная (тип I_{fin});

(ii) типа I собственно немодулярная локально модулярная (тип I_∞);

(iii) типа II модулярная (тип II_1);

(iv) типа II собственно немодулярная (тип II_∞);

(v) чисто немодулярная (тип III);

при этом JW-фактор принадлежит одному и только одному из этих типов.

Отметим, что если JW-алгебра A совпадает с эрмитовой частью W^*-алгебры, то это разложение по типам согласуется с классификацией W^*-алгебр [68].

Пример 1. Спин-система в $B(H)$ — это семейство нетривиальных симметрий $S\subset B(H)$, т. е. операторов таких, что $s^*=s$, $s^2=1$, $s\neq\pm 1$, которые антикоммутируют: $s\circ t=0$ для всех s, $t\in S$, $s\neq t$. Нетрудно проверить, что каждый оператор из слабого замыкания $(S)^-$ линейной оболочки спин-системы S также является кратным некоторой симметрии. Спин-фактором называется линейное пространство $\mathrm{R}1\oplus(S)^-$, которое является JW-фактором типа I_2 в $B(H)$ Можно дать и абстрактное определение спин-фактора. Пусть A — вещественное гильбертово пространство размерности >2 со скалярным произведением $\langle x|y\rangle$, x, $y\in A$. И пусть $u\in A$ — некоторый единичный вектор, $N=\{u\}^\perp$, т. е. $A=\mathrm{R}u\oplus N$. Определим в A произведение

$$(\alpha u+x)\circ(\beta u+y)=(\alpha\beta+\langle x|y\rangle)u+(\beta x+\alpha y),$$

где α, $\beta\in\mathbf{R}$, x, $y\in N$. Известно (см. [25, 69]), что с этим произведением A является йордановой алгеброй (алгебра билинейной формы) с единицей u. Такая йорданова алгебра полностью определяется структурой гильбертова пространства A и называется абстрактным спин-фактором. Оказывается, всякий абстрактный спин-фактор изоморфен спин-фактору, построенному по некоторой спин-системе в $B(H)$, и наоборот [69]. Поэтому мы не будем их различать и также назовем спин-факторами. Под размерностью спин-фактора будем понимать размерность гильбертова пространства A.

1.3. Абстрактными аналогами JC- и JW-алгебр являются йордановы банаховы алгебры.

Йорданова алгебра [45] A над $\mathbf{R}$ (с единицей $\mathbf{1}$) называется JB-алгеброй, если на ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и удовлетворяет условиям $\|a^2\|=\|a\|^2$, $\|a^2\|\leqslant\|a^2+b^2\|$ для всех а, $b\in A$ [25].

JBW-алгеброй называется JB-алгебра A, которая имеет предсопряженное пространство A_*, т. е. $A\cong(A_*)^*$. Как и в случае W^*-алгебр, это условие эквивалентно тому, что JB-алгебра A монотонно полна и обладает разделяющим семейством нормальных состояний; при этом A_* может быть отождествлено с банаховым пространством всех нормальных линейных функционалов на A [55].

Примерами специальных JB-алгебр (соответственно JBW-алгебр) являются JC-алгебры (соответственно JW-алгебры). Исключительной JBW-алгеброй является алгебра M_3^8 эрмитовых 3×3 матриц над числами Кэли. Известно [25], что JB-алгебра A изоморфна JC-алгебре в том и только в том случае, когда никакая фактор-алгебра A не изоморфна M_3^8. Произвольная JBW-алгебра A разлагается в прямую сумму $A=A_{sp}\oplus A_{ex}$, где A_{sp} изоморфна JW-алгебре, а JBW-алгебра A_{ex} изоморфна алгебре $C(X, M_3^8)$ всех непрерывных отображений гиперстоуновского компакта X в JBW-алгебру M_3^8 [55]. В силу конечномерности M_3^8, слагаемое A_{ex} изоморфно также пространству $L^\infty(\Omega, \mu, M_3^8)$, где μ — мера Радона на локально компактном пространстве Ω [56].

Понятия и определения из 1.1 и 1.2 легко переносятся на абстрактные JBW-алгебры (см. [33, 42]). При этом произвольная JBW-алгебра раскладывается в прямую сумму JBW-подалгебр типа I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞, III. Как и в случае W^*-алгебр, JBW-алгебры типа I могут быть далее разложены в прямую сумму JBW-алгебр типа I_n, где n — кардинальное число. Исключительная часть $A_{ex}=L^\infty(\Omega, \mu, M_3^8)$ является, очевидно, слагаемым типа I_3. В частности, все JBW-алгебры без прямых слагаемых типа I_3 специальны, т. е. являются JW-алгебрами. Кроме исключительного JBW-фактора M_3^8 (типа I_3), JBW-факторами типа I_n ($n\geqslant3$) являются алгебры эрмитовых $n\times n$ матриц $M_n(\mathbb{R})_{SA}$; $M_n(\mathbb{C})_{SA}$; $M_n(\mathbb{H})_{SA}$ и только они (с точностью до изоморфизма); JBW-факторы типа I_2 — это в точности спин-факторы (см. [25, 46]).

1.4. Пусть A — JBW-алгебра, $\mathscr{P}_A=\{e\in A: e^2=e\}$ — решетка всех идемпотентов (проекторов) из A. Семейство $\{e_\lambda, \lambda\in\mathbb{R}\}\subset\mathscr{P}_A$ называется спектральным семейством в A, если

а) $e_\lambda\leqslant e_\mu$ при $\lambda\leqslant\mu$, $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$;

б) $\inf e_\lambda=0$, $\sup e_\lambda=1$;

в) $\sup\{e_\lambda, \lambda<\mu\}=e_\mu$ для всех $\mu\in\mathbb{R}$.

Спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ назовем ограниченным, если существует $\lambda_0\in\mathbb{R}_+$ такое, что $e_\lambda=1$ при $\lambda\geqslant\lambda_0$, $e_\lambda=0$ при $\lambda\leqslant-\lambda_0$. Если $e_\lambda=0$ при $\lambda\leqslant0$, то спектральное семейство называется положительным.

Т е о р е м а 1.2 (спектральная теорема [25]). *Для любого $a\in A$ существует единственное спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, ограниченное с $\lambda_0=\|a\|$, такое, что для любого нормального состояния ω на A и $n=1, 2, \ldots$ имеет место равенство*

$$\omega(a^n)=\int\lambda^n d\omega(e_\lambda).$$

При этом $e_\lambda \in A(a)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$, где $A(a)$ — JBW-подалгебра в A, порожденная элементами a и 1. Суммы Стилтьеса $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (e_{\lambda_i} - e_{\lambda_{i-1}})$ по норме сходятся к a, когда радиус разбиения $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ отрезка $[-\|a\|, \|a\|]$ стремится к нулю

Утверждение теоремы 2 записывается как $a = \int \lambda de_\lambda$. С помощью спектральной теоремы определяется ограниченная борелевская функция φ от элемента $a \in A$ равенством $\varphi(a) = \int \varphi(\lambda) de_\lambda$.

Через $\mathscr{A}(A)$ будем обозначать множество всех спектральных семейств из JBW-алгебры A и называть его множеством элементов, присоединенных к A. В силу теоремы 1.2 сама JBW-алгебра A может быть отождествлена с множеством ограниченных элементов из $\mathscr{A}(A)$. Через $\mathscr{A}^+(A)$ обозначим множество положительных спектральных семейств; очевидно, $\mathscr{A}^+(A) \cap A = A^+$. сли $h = \{e_\lambda\} \in \mathscr{A}^+(A)$, то для любой строго монотонно возрастающей функции φ на $\mathbf{R}_+$, с $\varphi(0) = 0$, можно определить функцию φ от h, положив $\varphi(h) = \{f_\lambda\}$, где

$$f_\lambda = \begin{cases} e_{\varphi^{-1}(\lambda)} & \text{при } \lambda \in [0, \varphi(\lambda)], \\ 1 & \text{при } \lambda \notin [0, \varphi(\lambda)]. \end{cases}$$

При этом, очевидно, $\varphi(h) \in \mathscr{A}^+(A)$ и, если функция φ ограничена, т. е. $\varphi(+\infty) < +\infty$, то $\varphi(h) \in A^+$. Пользуясь разложением произвольной JBW-алгебры A в прямую сумму JW-алгебры A_{sp} и алгебры $C(X, M_3^8)$, можно дать описание множества $\mathscr{A}(A)$ в терминах неограниченных самосопряженных операторов, присоединенных к A_{sp}, и неограниченных отображений из X в M_3^8 (см. [2, 6, 7]).

§ 2. JW-АЛГЕБРЫ И ОБЕРТЫВАЮЩИЕ W^*-АЛГЕБРЫ

2.1. Пусть A—JW-алгебра в $B(H)$. Через $\mathfrak{R}(A)$ будем обозначать наименьшую слабо замкнутую ассоциативную вещественную $*$-алгебру в $B(H)$, содержащую A, через $\mathfrak{A}(A)$ — наименьшую W^*-алгебру, содержащую A, т. е. $\mathfrak{A}(A) = A''$ (бикоммутант A).

Определение 1. JW-алгебра A называется **обратимой**, если $a_1 a_2 \ldots a_n + a_n a_{n-1} \ldots a_1 \in A$ для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Среди JW-факторов необратимыми могут быть только спин-факторы; при этом если размерность спин-фактора A отлична от 3, 4 и 6, то A всегда необратим; если размерность A равна 3 или 4, то спин-фактор A обратим и, наконец, если $\dim A = 6$, то обратимость A зависит от его представления в $B(H)$ (см. [51]).

Если A — обратимая JW-алгебра, то она совпадает с эрмитовой частью $\mathfrak{R}(A)_{SA}$ вещественной $*$-алгебры $\mathfrak{R}(A)$, причем $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{R}(A) + i\mathfrak{R}(A)$ [62].

Предложение 2. 1 ([60]). Пусть A — произвольная JW-алгебра. Тогда в A существуют три центральных проектора e_1, e_2, e_3 такие, что

(i) e_1A — обратимая JW-алгебра и $e_1A \approx \mathfrak{A}(e_1A)_{SA}$;

(ii) e_2A — обратимая JW-алгебра и $\mathfrak{R}(e_2A) \cap i\mathfrak{R}(e_2A) = \{0\}$;

(iii) e_3A—JW-алгебра типа I_2.

Слабо замкнутая вещественная *-алгебра $\mathfrak{R} \subset B(H)$ называется вещественной W^*-алгеброй [63], если $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \{0\}$. Таким образом JW-алгебра e_2A — это эрмитова часть вещественной W^*-алгебры. Такие JW-алгебры назовем чисто вещественными. Свойство быть чисто вещественным не является инвариантом при изоморфизмах. Более того, следующий пример показывает, что для любой W^*-алгебры существует вещественная W^*-алгебра, изоморфная ей в смысле вещественных *-алгебр.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{A}$—W^*-алгебра, $\mathfrak{A}_0$ — противоположная W^*-алгебра, т. е. $\mathfrak{A}_0$ — это векторное пространство $\mathfrak{A}$, снабженное произведением $(x, y) \mapsto yx$ Для $a \in \mathfrak{A}$ обозначим через a_0, элемент a, рассмотренный в $\mathfrak{A}_0$. Тогда множество $\mathfrak{R} = \{(a, a_0{}^*)$, $a \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{A} * \mathfrak{A}_0$ с покоординатными операциями является вещественной W^*-алгеброй; при этом отображение $(a, a_0{}^*) \mapsto a$ является вещественным *-изоморфизмом между $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$. В частности, JW-алгебра $\mathfrak{A}_{SA}$ изоморфна чисто вещественной JW-алгебре $\mathfrak{R}_{SA}$.

Пусть A — чисто вещественная JW-алгебра, т. е. $\mathfrak{R}(A) \cap \cap i\mathfrak{R}(A) = \{0\}$, $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{R}(A) + i\mathfrak{R}(A)$. Тогда легко видеть, что отображение $\alpha : a + ib \mapsto a^* + ib^*$, a, $b \in \mathfrak{R}(A)$, является инволютивным (т. е. периода 2) *-антиавтоморфизмом W^*-алгебры $\mathfrak{A}(A)$, т. е. α — линейное преобразование $\mathfrak{A}(A)$ такое, что

(i) $\alpha(\alpha(x)) = x$; (ii) $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$;

(iii) $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ для всех x, $y \in \mathfrak{A}(A)$ (см. [62]). При этом, очевидно, $A = \{x \in \mathfrak{A}(A)_{SA} : \alpha(x) = x\}$. Обратно, если на некоторой W^*-алгебре $\mathfrak{A}$ задан инволютивный *-антиавтоморфизм α, то непосредственно проверяется, что $A = \{x \in \mathfrak{A}_{SA} : \alpha(x) = x\}$ является чисто вещественной JW-алгеброй. Отсюда и из примера 2 вытекает

Предложение 2.2. Для любой обратимой JW-алгебры A существуют W^*-алгебра $\mathfrak{A}$ и инволютивный *-антиавтоморфизм α на $\mathfrak{A}$ такие, что A изоморфна JW-алгебре $\{x \in \mathfrak{A}_{SA} : : \alpha(x) = x\}$.

Следует отметить, что в предложении 2.2 W^*-алгебра $\mathfrak{A}$ может не совпадать с $\mathfrak{A}(A)$, поскольку изоморфизм JW-аглебр, вообще говоря, не влечет изоморфизма их обертывающих W^*-алгебр.

2.2. Рассмотрим понятия веса и следа на JBW-алгебрах.

Определение 2. Вес на JBW-алгебре A — это отображение $\varphi : A^+ \to [0, +\infty]$ такое, что

(i) $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$, $a \in A^+$, $\lambda \in \mathbf{R}_+ (0 \cdot (+\infty) = 0)$;

(ii) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, a, $b \in A^+$.

Вес φ называется: точным, если $\varphi(a)>0$ для всех $a\in A^+$, $a\neq 0$; нормальным, если $\varphi(a_\alpha)\uparrow\varphi(a)$ для любой сети $\{a_\alpha\}\subset A^+$, возрастающей к $a\in A^+$; ограниченным (или конечным), если $\varphi(1)<<+\infty$; полуконечным, если в A^+ существует сеть $\{a_\alpha\}$, возрастающая к $\mathbf{1}$ и такая, что $\varphi(a_\alpha)<+\infty$ для всех α. Вес φ называется следом, если

(iii) $\varphi(U_s a)=\varphi(a)$ для любого $a\in A^+$ и всех симметрий $s\in A$ (т. е. $s^2=1$).

Здесь оператор U_x на A определяется как $U_x a==2x\circ(x\circ a)-x^2\circ a$, $a\in A$; он является положительным линейным оператором на A для всех $x\in A$, а если s симметрия, то U_s является автоморфизмом A. В частности, когда A—JW-алгебра, $U_x a=xax$, т. е. условие (iii) записывается в виде $\varphi(sas)=\varphi(a)$.

Легко видеть, что если φ — след, то полуконечность φ эквивалентна тому, что для любого $a\in A^+$ существует $b\in A^+$, $b\neq 0$, $b\leqslant a$ такой, что $\varphi(b)<+\infty$. Заметим, что понятие следа на JBW-алгебре можно ввести и другими эквивалентными (iii) условиями (см. [43, 49]).

2.3. Пусть A — обратимая JW-алгебра. Отождествим A с изоморфной ей JW-алгеброй $\{x\in\mathfrak{A}_{sA}:\alpha(x)=x\}$ из предложения 2.2. Очевидно, что $\mathfrak{A}(A)\subset\mathfrak{A}$. Если на A задан вес φ, то его можно продолжить до веса φ_0 на $\mathfrak{A}$, положив $\varphi_0(x)={}^1/_2(x++\alpha(x))$, $x\in\mathfrak{A}^+$. Нетрудно проверить, что если вес φ нормален, точен или полуконечен, то таким же является вес φ_0 на $\mathfrak{A}$ и на $\mathfrak{A}(A)$. Более того, имеет место следующий результат (см. [3, 21]).

Теорема 2.3. Если φ — нормальный след на A (точный, конечный, полуконечный), то φ_0 является нормальным следом на W^*-алгебрах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}(A)$ (соответственно точным, конечным, полуконечным).

Этот результат позволяет установить полную взаимосвязь между типами JW-алгебры A и ее обертывающей W^*-алгебры $\mathfrak{A}(A)$.

Теорема 2.4. Пусть A — обратимая JW-алгебра. Тогда она имеет тип I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞ или III в том и только в том случае, когда W^*-алгебра $\mathfrak{A}(A)$ имеет соответствующий тип.

Замечание. В этих теоремах обратимость JW-алгебры A существенна. В самом деле, если A — спин-фактор счетной размерности, то C^*-алгебра B, порожденная A, является простой и сепарабельной (C^*-алгебра канонических антиперестановочных соотношений) и имеет единственный след τ ($\tau(1)=1$), продолжающий канонический след на A [69]. В частности, всякое ГНС-представление π C^*-алгебры B в гильбертовом пространстве является изоморфизмом, причем $\pi(B)$ порождает $\pi(B)''$ (бикоммутант $\pi(B)$) как W^*-алгебру. Поэтому спин-фактор $\pi(A)$, изоморфный A, может порождать все типы аппроксимативно конечномерных W^*-факторов, т. е. типы I_∞, II_1, II_∞ и III в зависимости от представления π, в то время как $\pi(A)$ имеет тип I_2. В частности, канонический след на спин-факторе $\pi(A)$ не всегда может быть продолжен до следа на его обертывающей W^*-алгебре $\pi(B)''$.

Доказательство теоремы 2.4. Приведем основные моменты доказательства (подробности см. [21]). В силу [62, следствие 6.5] A имеет тип I тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(A)$ имеет тип I. Далее, если A — модулярная JW-алгебра, то она обладает разделяющим семейством конечных нормальных следов [68, теорема 26], которые в силу теоремы 2.3 можно продолжить до разделяющего семейства нормальных конечных следов на $\mathfrak{A}(A)$, т. е. $\mathfrak{A}(A)$ — конечная W^*-алгебра [66, гл. V, теорема 2.4]. Обратно, если $\mathfrak{A}(A)$ — конечная W^*-алгебра, то решетка $\mathcal{P}$ ее проекторов модулярна [66, гл. V, теорема 1.37]. Так как решетка $\mathcal{P}_A$ проекторов A является правильной подрешеткой в $\mathcal{P}$, то A — модулярная JW-алгебра. Аналогично показывается, что если A локально модулярна, то W^*-алгебра $\mathfrak{A}(A)$ полуконечна. С помощью [62, лемма 3.4] можно показать, что если JW-алгебра A не содержит абелевых (соотв. центральных модулярных) проекторов, отличных от нуля, то $\mathfrak{A}(A)$ также не содержит ненулевых абелевых (соответственно центральных модулярных) проекторов. Из сказанного вытекает, что A имеет тип I_{fin} (соотв. I_∞, II_1) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(A)$ имеет тип I_{fin} (соответственно I_∞, II_1). Чтобы получить доказательство остальных утверждений, достаточно показать, что если A имеет тип III, то $\mathfrak{A}(A)$ также имеет тип III. Предположим противное, тогда существуют ненулевой полуконечный нормальный след τ на $\mathfrak{A}(A)$ и положительный элемент $a\in\mathfrak{A}(A)$ такие, что $\tau(a^2)<+\infty$. Элемент $x_0=1/2\,(a^2+\alpha(a^2))$ (см. предложение 2.2) является положительным в A и в силу спектральной теоремы существует ненулевой проектор $e\in A$ такой, что $e\leqslant\lambda x_0$ при некотором $\lambda>0$. Для любого $t\in e\mathfrak{R}(A)e$ имеем $tt^*=tet^*\leqslant\lambda t x_0 t^*=\lambda t\Psi(a^2)t^*=\lambda\Psi(ta^2t^*)=\lambda\Psi(ta)(ta))^*$, где $\Psi(x)=1/2(x+\alpha(x))$, $x\in\mathfrak{A}(A)$. Из этого неравенства, слабой непрерывности Ψ на ограниченных подмножествах $\mathfrak{A}(A)$ и сильной непрерывности отображения $t\mapsto at^*$ на ограниченных подмножествах $\mathfrak{A}(A)$ [66, гл. V, лемма 2.27] вытекает, что отображение $t\mapsto t^*$ сильно непрерывно на единичном шаре $e\mathfrak{R}(A)e$. С другой стороны, так как A имеет тип III, то JW-алгебра eAe не модулярна и из [68, лемма 23] вытекает, что отображение $t\mapsto t^*$ разрывно на единичном шаре $e\mathfrak{R}(A)e$. Противоречие показывает, что $\mathfrak{A}(A)$ также имеет тип III. Теорема доказана.

Следствие 1. а) JW-алгебра модулярна тогда и только тогда, когда она обладает разделяющим семейством нормальных конечных следов;

б) JW-алгебра локально модулярна тогда и только тогда, когда на ней существует точный нормальный полуконечный след;

в) JW-алгебра чисто немодулярна тогда и только тогда, когда на ней нет ни одного ненулевого нормального полуконечного следа.

Следствие 2 (ср. [66, гл. V, следствие 2.24]). Обратимая JW-алгебра A имеет тип I, II или III тогда и только тогда, когда ее коммутант A' является W^*-алгеброй соответственно типа I, II или III.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ JW-ФАКТОРОВ

3.1. Рассмотрим вопрос о классификации JW-факторов с точностью до изоморфизма. Начнем с JW-факторов типа I. JW-факторы типа I_2 — это в точности спин-факторы, классификация которых содержится в следующей теореме (см. [69] и пример 1).

Теорема 3.1. Два спин-фактора изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их размерности. Более того, для любого кардинального числа $m \geqslant 3$ существует единственный с точностью до изоморфизма спин-фактор размерности m.

Полное описание всех JW-факторов типа I получено в [60]. Что же касается их классификации с точностью до изоморфизма, то имеет место

Теорема 3.2 [22]. Всякий JW-фактор типа I (исключая тип I_2) изоморфен одному и только одному из следующих:

1) $B(H_{\mathbf{R}})_{sA}$; 2) $B(H_{\mathbf{C}})_{sA}$; 3) $B(H_{\mathbf{H}})_{sA}$, где $B(H_{\mathbf{K}})_{sA}$ означает алгебру всех ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $H_{\mathbf{K}}$ (над $\mathbf{K}$, где $\mathbf{K}=\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$) размерности $\geqslant 3$.

Замечание 1. В теореме 3.2 JW-фактор $B(H_{\mathbf{C}})_{sA}$ — это эрмитова часть W^*-алгебры, а JW-факторы $B(H_{\mathbf{R}})_{sA}$ и $B(H_{\mathbf{H}})_{sA}$ не изоморфны эрмитовой части W^*-алгебры и не изоморфны между собой.

Замечание 2. JW-алгебры типа I, не обязательно факторы, полностью описаны в [56, 57].

3.2. Теперь рассмотрим случай JW-факторов не типа I, т. е. не содержащих минимальных проекторов. Сразу отметим, что если JW-фактор изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, то рассматриваемая нами задача, очевидно, сводится к классификации W^*-факторов. Поэтому в дальнейшем в рамках рассматриваемой проблемы ограничимся случаем JW-факторов, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры. Ясно, что такие JW-факторы являются чисто вещественными. Обратное, как мы уже видели в примере 2, вообще говоря, неверно. Поэтому представляет интерес следующий результат.

Предложение 3.3. Чисто вещественный JW-фактор не изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}(A)$ является W^*-фактором.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(A)$ не фактор, то в силу [62, следствие 3.5] существует минимальный проектор p в центре

$\mathfrak{A}(A)$ такой, что A изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры $p\mathfrak{A}(A)$. Обратно, пусть $\mathfrak{A}(A)$ — W^*-фактор и предположим, что существует изоморфизм φ между эрмитовой частью W^*-алгебры $\mathfrak{B}$ и JW-фактором A. Положив для $x=a+ib$, $a, b\in\mathfrak{B}_{SA}$, $\varphi_1(x)=\varphi(a)+i\varphi(b)$, получим C^*-изоморфизм φ_1 из $\mathfrak{B}$ на $A+ia\subset\mathfrak{A}(A)$. Так как $\mathfrak{A}(A)$ — фактор, то в силу [59, теорема 3.3] φ_1 является либо $*$-изоморфизмом либо $*$-антиизоморфизмом; в обоих случаях $A+iA=\varphi_1(\mathfrak{B})$ является $*$-подалгеброй в $\mathfrak{A}(A)$. Для любых a, $b\in A$ имеем $ab\in A+iA$, т. е. $ab=x+iy$, x, $y\in A$. Следовательно, $ab-x=iy\in\mathfrak{R}(A)\cap i\mathfrak{R}(A)=\{0\}$, т. е. $ab=x=x^*=ba$. Это означает, что A — абелева JW-алгебра — противоречие. Предложение доказано.

В следующей теореме, которая уточняет предложение 2.2, содержится общий метод построения JW-факторов, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры.

Теорема 3.4. Пусть $\mathfrak{U}$ — W^*-фактор не типа I, α — инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathfrak{U}$. Тогда множество $A=\{x\in\mathfrak{U}_{SA}:\alpha(x)=x\}$ является JW-фактором, не изоморфным эрмитовой части W^*-алгебры и $\mathfrak{A}(A)=\mathfrak{U}$. Обратно, для произвольного JW-фактора A, не изоморфного эрмитовой части W^*-алгебры, существует единственный инволютивный $*$-антиавтоморфизм α W^*-фактора $\mathfrak{A}(A)$ такой, что $A=\{x\in\mathfrak{A}(A)_{SA}:\alpha(x)=x\}$.

Доказательство. В силу предложения 3.3 первая часть теоремы будет доказана, если мы покажем, что A является JW-фактором и $\mathfrak{A}(A)=\mathfrak{U}$. Пусть e — центральный проектор в A. Покажем, что e является центральным в $\mathfrak{U}$. Пусть $\mathfrak{R}=\{x\in\mathfrak{U}:\alpha(x)=x^*\}$, тогда легко видеть, что $\mathfrak{R}$ — вещественная W^*-алгебра, $\mathfrak{R}_{SA}=A$, $\mathfrak{R}+i\mathfrak{R}=\mathfrak{U}$. Если b косоэрмитов элемент в $\mathfrak{R}$ (т. е. $b^*=-b$), то $eb-be\in\mathfrak{R}_{SA}=A$. Поэтому $e(eb-be)=(eb-be)e$, т. е. $eb-be=2ebe$. Умножая это равенство на e справа, затем слева, получим, что $eb=be=ebe$, т. е. e коммутирует с b. Так как произвольный элемент из $\mathfrak{R}$ можно представить как сумму $a+b$, где $a\in\mathfrak{R}_{SA}=A$, $b\in\mathfrak{R}$, $b^*=-b$, то проектор e коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{R}$, а значит, из $\mathfrak{U}=\mathfrak{R}+i\mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{U}$ — W^*-фактор, то $e=0$ либо 1, т. е. A — JW-фактор. Покажем, теперь, что A не содержит минимальных проекторов (т. е. не типа I). Допустим противное, т. е. q — минимальный проектор в A. Тогда qAq изоморфно полю $\mathbf{R}$. Так как $(q\mathfrak{R}q)_{SA}=qAq$, то $q\mathfrak{R}q$ является вещественной W^*-алгеброй, в которой всякий самосопряженный оператор имеет вид λq, $\lambda\in\mathbf{R}$. В силу [60, теорема 2.1] $q\mathfrak{R}q$ как вещественная $*$-алгебра изоморфна либо $\mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$, либо $\mathbf{H}$. Поэтому W^*-алгебра $q\mathfrak{U}q=q\mathfrak{R}q+iq\mathfrak{R}q$ изоморфна либо $\mathbf{C}$, либо алгебре $M_2(\mathbf{C})$ матриц второго порядка над $\mathbf{C}$. В частности, в $q\mathfrak{U}q$, а значит, и в $\mathfrak{U}$ содержится минимальный проектор, что противоречит непрерывности W^*-фактора $\mathfrak{U}$. Следовательно, JW-фактор A также непрерывен. По теореме 8.1 из [25] существуют четыре ортогональных проектора e_1, e_2, e_3, e_4, любые два из которых эквивалентны через симметрию. Это значит, что для любых $i, j=\overline{1, 4}$ существует симметрия s_{ij} (т. е. $s_{ij}^2=1$) такая, что $e_j=s_{ij}e_is_{ij}$, т. е. $e_j\in\mathfrak{R}e_i\mathfrak{R}$. Поэтому $1=\sum_{j=1}^{4}e_j\in\mathfrak{R}e_i\mathfrak{R}$ для любого $i=\overline{1, 4}$. Кроме того, очевидно $\mathfrak{R}e_i\mathfrak{R}$ является двусторонним идеалом в $\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{R}e_i\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$ для всех $i=\overline{1, 4}$. По теореме Мартиндейла из теории йордановых алгебр [45, гл. III, теорема 6] $\mathfrak{R}$ является совершенной *-алгеброй, т. е. пара $(\mathfrak{R}, \sigma)$, где σ — вложение $\mathfrak{R}_{SA}$ в $\mathfrak{R}$, является унитальной специальной универсальной обертывающей для йордановой алгебры $A=\mathfrak{R}_{SA}$ (подробнее см. [45, гл. II, п. 4]). В частности, $\mathfrak{R}$ алгебраически порождается йордановой алгеброй A. Отсюда $\mathfrak{R}(A)=\mathfrak{R}$ и, значит, $\mathfrak{A}(A)=\mathfrak{R}(A)+i\mathfrak{R}(A)=\mathfrak{U}$. Обратное утверждение теоремы очевидным образом вытекает из предложения 3.3. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3.4 и свойств унитальной специальной универсальной обертывающей для йордановых алгебр вытекает

Следствие 1. Пусть A_1, A_2 — чисто вещественные JW-факторы не типа I, θ — изоморфизм между A_1 и A_2. Тогда θ единственным образом можно продолжить до изоморфизма W^*-алгебр $\mathfrak{A}(A_1)$ и $\mathfrak{A}(A_2)$.

Приведем пример, показывающий, что на факторе Кригера (т. е. скрещенном произведении абелевой W^*-алгебры с ее эргодическим автоморфизмом) всегда существует канонический инволютивный *-антиавтоморфизм.

Пример 3. Пусть N — абелева W^*-алгебра в $B(H)$, $\alpha: G\to\mathrm{Aut}(N)$ — эргодическое действие счетной дискретной группы G на N и $\mathfrak{U}=W^*(N, G)$ — скрещенное произведение N с группой G, действующее в гильбертовом пространстве $L_2(G, H)$ всех суммируемых с квадратом H-значных функций на G [66]. Известно, что существует канонический изоморфизм π между N и W^*-подалгеброй в $\mathfrak{U}$, причем $\mathfrak{U}$ порождается операторами вида $\pi(a)$ $(a\in N)$, $u(g)$ $(g\in G)$, где

$$\pi(a)\xi(h)=\alpha_h^{-1}\xi(h),\quad u(g)\xi(h)=\xi(g^{-1}h),\quad \xi(h)\in L_2(G, H),\quad g, h\in G.$$

Каждый элемент $x\in\mathfrak{U}$ можно представить в виде $x=\sum_{g\in G}\pi(x(g))\times$ $\times u(g)$, где $x(\cdot)$ — N-значная функция на G. В зависимости от свойств N и действия G, $\mathfrak{U}$ может быть W^*-фактором любого заданного типа.

Рассмотрим отображение $\alpha:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$, задаваемое как

$$\alpha: x=\sum_{g\in G}\pi(x(g))\,u(g)\mapsto\alpha(x)=\sum_{g\in G}\pi(\alpha_g(x(g^{-1}))\,u(g),$$

т. е. $\alpha: x(g) \mapsto \alpha_g(x(g^{-1}))$. Нетрудно видеть, что α является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом $\mathfrak{U}$, и по теореме 3.4 множество $A = \{x \in \mathfrak{U}_{sA}: \alpha(x) = x\} = \{x \in W^*(N, G): x(g)^* = x(g) = \alpha_g(x(g^{-1}))\}$ является JW-фактором, не изоморфным эрмитовой части W^*-алгебры, причем, если $\mathfrak{U}$ не типа I, то $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{U}$.

Из этого примера и теорем 2.4 и 3.4 вытекает

Следствие 2 (см. [9, 10]). Существуют JW-факторы типа II_1, II_∞, III, не изоморфные эрмитовой части W^*-алгебры.

Замечание. Инволютивный $*$-антиавтоморфизм скрещенного произведения $W^*(N, G)$ можно построить и в случае произвольной (не обязательно абелевой) W^*-алгебры N. Как и в примере 3, всякий элемент из $\mathfrak{U} = W^*(N, G)$ представим в виде $x = \sum_{g \in G} \pi(x(g)) u(g)$. Если α — антиавтоморфизм N, коммутирующий с действием группы G, то преобразование

$$\bar{\alpha}: \sum_{g \in G} \pi(x(g)) u(g) \mapsto \sum_{g \in G} u(g^{-1}) \pi(\alpha(x(g)))$$

является $*$-антиавтоморфизмом $\mathfrak{U}$, причем если α имеет период $2n$, то $\bar{\alpha}$ имеет тот же период [38, пп. 4.13 и 4.14]. Пример 2 является частным случаем этой конструкции, когда N — абелева W^*-алгебра, α — тождественное преобразование N.

3.3. Пусть A—JW-фактор, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры. Из предложения 3.3, теоремы 2.4 и следствия I теоремы 3.4 вытекает корректность следующего определения (ср. [8]).

Определение 3. Пусть A—JW-фактор типа III; будем говорить, что A имеет тип III_λ, если W^*-фактор $\mathfrak{A}(A)$ имеет тип III_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (см. [29]).

Таким образом, инвариантом в определении 3 является тип обертывающего W^*-фактора. Достоинством такого определения является то, что из теоремы 3.4 и примера 3 вытекает существование JW-фактора типа III_λ, не изоморфного эрмитовой части W^*-алгебры, для любого $\lambda \in [0, 1]$. Тем не менее, было бы интересно дать определение типа III_λ, использующее внутренние свойства JW-фактора.

Проблема 1. Получить характеризацию JW-факторов типа III_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, с помощью других инвариантов.

3.4. Вернемся к рассмотрению произвольных JW-факторов не типа I и не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры, и найдем условия их изоморфности в терминах обертывающих W^*-алгебр. По теореме 3.4 каждый такой JW-фактор определяется парой $(\mathfrak{U}, \alpha)$, где $\mathfrak{U}$—W^*-фактор $(\mathfrak{U} = \mathfrak{A}(A))$, а α — инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathfrak{U}$. Непосредственно из следствия 1 теоремы 3.4 вытекает следующий результат (см. [10]).

Теорема 3.5. Пусть JW-факторы A_1 и A_2 определяются соответственно парами $(\mathfrak{U}_1, \alpha_1)$ и $(\mathfrak{U}_2, \alpha_2)$. Тогда A_1 и A_2 изоморфны в том и только в том случае, когда существует *-изоморфизм θ между W^*-факторами $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ такой, что $\alpha_2\theta = \theta\alpha_1$. В частности если $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}$, то изоморфность JW-факторов $A_1 = (\mathfrak{U}, \alpha_1)$ и $A_2 = (\mathfrak{U}, \alpha_2)$ означает, что антиавтоморфизмы α_1 и α_2 сопряжены, т. е. существует $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$ такой, что $\alpha_2 = \theta\alpha_1\theta^{-1}$. Таким образом, полная классификация JW-факторов сводится к классификации W^*-факторов и к следующей проблеме.

Проблема 2. Описать классы сопряженных инволютивных *-антиавтоморфизмов данного W^*-фактора.

Из теоремы 3.2 (см. также 1.3) вытекает, что в W^*-факторе типа I_n ($n \geqslant 3$) существует ровно два таких класса при n четном или бесконечном и ровно один класс при n нечетном. В следующем параграфе мы приведем решение проблемы 2 для инъективных W^*-факторов типа II и III.

§ 4. ИНВОЛЮТИВНЫЕ *-АНТИАВТОМОРФИЗМЫ ИНЪЕКТИВНЫХ W^*-ФАКТОРОВ

4.1. Пусть $\mathfrak{U}$ — W^*-алгебра с сепарабельным предсопряженным $\mathfrak{U}_*$; $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$ — группа всех ее *-автоморфизмов с топологией, порожденной преднормами вида $\alpha \to \|\varphi \circ \alpha\|_*$, $\varphi \in \mathfrak{U}_*$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{U})$, где $\|\cdot\|_*$ — норма в банаховом пространстве $\mathfrak{U}_*$. И пусть $\mathrm{Int}(\mathfrak{U})$ — группа внутренних автоморфизмов $\mathfrak{U}$, $\mathrm{Ant}(\mathfrak{U})$ — множество всех *-антиавтоморфизмов $\mathfrak{U}$, $A(\mathfrak{U}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{U}) \cup \mathrm{Ant}(\mathfrak{U})$.

Ниже мы приведем результаты Джиордано [37—40], посвященные решению проблемы 3 в случае, когда $\mathfrak{U}$ — инъективный W^*-фактор в $B(H)$, т. е. существует проекция P из $B(H)$ на $\mathfrak{U}$ с $\|P\| = 1$, $P(1) = 1$ (см. [30, 64]). В дальнейшем через R (соответственно $R_{0,1}$, R_λ) будем обозначать единственный с точностью до изоморфизма инъективный W^*-фактор типа II_1 (соответственно типа II_∞, III_λ, $0<\lambda<1$, (факторы Пауэрса)). Через R_∞ обозначим фактор типа III_1 Араки-Вудса, который является единственным известным примертом инъективного W*-фактора типа III_1.* Говорят, что W^*-фактор $\mathfrak{U}$ является фактором Мак Дуфф, если он изоморфен тензорному произведению $\mathfrak{U} \otimes R$. Все факторы R, $R_{0,1}$, R_λ, R_∞ являются факторами Мак Дуфф. Напомним также [30, следствие 6.9 в.], что непрерывные факторы Кригера инъективны и наоборот, всякий инъективный W^*-фактор типа II и III_λ, $\lambda \neq 1$, а также фактор Араки-Вудса типа III_1 изоморфны фактору Кригера (см. [29, 30]). Наконец, отметим, что для инъек-

* Недавно доказано (Haagerup, U., Corres biceptralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1. Preprint N 10 Odense Universitet, 1984, 4—68), что всякий инъективный W^*-фактор типа III_1 изоморфен R_∞.

тивного фактора типа III_0 поток весов является полным инвариантом при изоморфизме [30].

Одним из основных результатов, используемых при классификации инволютивных *-антиавтоморфизмов, является (см. [37—39].

Теорема 4.1. Пусть α, β — инволютивные *-антиавтоморфизмы фактора Мак Дуфф $\mathfrak{U}$ с сепарабельным предсопряженным. Тогда α и β сопряжены через некоторый автоморфизм $\theta \in \overline{\operatorname{Int}(\mathfrak{U})} \subset \operatorname{Aut}(\mathfrak{U})$ в том и только в том случае, когда $\alpha \circ \beta \in \overline{\operatorname{Int}(\mathfrak{U})}$.

Так как $\overline{\operatorname{Int}(R)} = \operatorname{Aut}(R)$ (см. [54]), и $\overline{\operatorname{Int}(R_\infty)} = \operatorname{Aut}(R_\infty)$ (см. [38, предложения 4.10 и 5.2]), то из этой теоремы вытекают следующие результаты.

Теорема 4.2. (i) Любые два инволютивных *-антиавтоморфизма инъективного W^*-фактора типа II_1 сопряжены. (ii) Любые два инволютивных *-антиавтоморфизма фактора типа III_1 Араки-Вудса сопряжены.

Таким образом, в этих W^*-факторах существует единственный класс сопряженности инволютивных *-антиавтоморфизмов, а именно, класс, порожденный каноническим антиавтоморфизмом из примера 3.

4.2. Для того чтобы рассмотреть оставшиеся случаи, необходимо напомнить понятие фундаментального гомоморфизма ([31], [64, стр. 397]) и несколько обобщить его.

Пусть $\mathfrak{U}$ — бесконечный W^*-фактор с сепарабельным $\mathfrak{U}_*$. Тогда (подробнее см. [31, 64]) существуют абелева W^*-алгебра $N_{\mathfrak{U}}$, отображение $P_{\mathfrak{U}}$ из множества $W_{\mathrm{Int}}(\mathfrak{U})$ нормальных полуконечных интегрируемых весов на $\mathfrak{U}$ в множество проекторов $N_{\mathfrak{U}}$ и поток (весов) $F^{\mathfrak{U}}: \mathbf{R}_+^* \to \operatorname{Aut}(N_{\mathfrak{U}})$ такие, что $F^{\mathfrak{U}}(\lambda)\, p_{\mathfrak{U}}(\varphi) = p_{\mathfrak{U}}(\lambda\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ и $\varphi \in W_{\mathrm{Int}}(\mathfrak{U})$, где $\mathbf{R}_+^* = (0, +\infty)$. Обозначим через $\operatorname{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$ группу автоморфизмов $N_{\mathfrak{U}}$, коммутирующих с образом $F^{\mathfrak{U}}$, т. е.

$$\operatorname{Aut}(F^{\mathfrak{U}}) = \{\sigma \in \operatorname{Aut}(N_{\mathfrak{U}}) : \sigma_0 F^{\mathfrak{U}}(\lambda) = F^{\mathfrak{U}}(\lambda) \circ \sigma \ \forall \lambda > 0\}.$$

Для любого $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{U})$ преобразование $\varphi \mapsto \varphi \circ \alpha^{-1}$ класса интегрируемых весов бесконечной кратности [64, п. 9.18] определяет единственный элемент $\operatorname{mod}(\alpha)$ в $\operatorname{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$ такой, что

$$\operatorname{mod}(\alpha)\, p_{\mathfrak{U}}(\varphi) = p_{\mathfrak{U}}(\varphi \circ \alpha^{-1}). \qquad (\bigstar)$$

Это определение $\operatorname{mod}(\alpha)$ обобщается для $\alpha \in A(\mathfrak{U}) = \operatorname{Aut}(\mathfrak{U}) \cup \cup \operatorname{Ant}(\mathfrak{U})$ с помощью следующего результата [38].

Предложение 4.3. Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на $\mathfrak{U}$, σ_t^{φ}, $t \in \mathbf{R}$ — группа модулярных автоморфизмов, ассоциированная с φ. Если $\alpha \in \operatorname{Ant}(\mathfrak{U})$, то

$$\sigma_t^{\varphi \cdot \alpha^{-1}} = \alpha \circ \sigma_{-t}^{\varphi} \circ \alpha^{-1} \text{ для всех } t \in \mathbf{R}.$$

Определение 4. Гомоморфизм mod из $A(\mathfrak{U})$ в $\mathrm{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$, определенный по формуле (★), называется фундаментальным гомоморфизмом.

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{U}$ — бесконечный непрерывный фактор Кригера. Тогда фундаментальный гомоморфизм mod индуцирует биекцию между классами сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов $\mathfrak{U}$ и классами сопряженности инволютивных автоморфизмов потока $F^{\mathfrak{U}}$.

Если $\mathfrak{U}$ — W^*-фактор типа II_∞, то отображение $\lambda \in \mathbf{R}_+^* \to F^{\mathfrak{U}}(\lambda) \in \mathrm{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$ является изоморфизмом. В частности, группа автоморфизмов потока $F^{\mathfrak{U}}$, при $\mathfrak{U} = R_{0,1}$, топологически изоморфна мультипликативной группе $\mathbf{R}_+^*$. Поскольку единственным инволютивным (т. е. периода 2) элементом $\mathbf{R}_+^*$ является 1, то из теоремы 4.4 вытекает следующий результат

Теорема 4. 5. Инъективный W^*-фактор типа II_∞ обладает в точности одним классом сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — W^*-фактор типа III_λ, $0 < \lambda < 1$. Тогда отображение $\lambda \in \mathbf{R}_+^* \to F^{\mathfrak{U}}(\lambda) \in \mathrm{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$ является гомоморфизмом из $\mathbf{R}_+^*$ на $\mathrm{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$ с ядром $\mathbf{R}_+^* \cap S(\mathfrak{U}) = \{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ (определение инварианта $S(\mathfrak{A})$ см. [29]). Значит, группа $\mathrm{Aut}(F^{\mathfrak{U}})$ топологически изоморфна группе $\mathbf{R}_+^* / \{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$. В этой группе ровно два инволютивных элемента 1 и $\sqrt{\lambda}$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$. Поэтому из теоремы 4.4 вытекает

Теорема 4.6. Существуют ровно два класса сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов инъективного W^*-фактора типа III_λ, $0 < \lambda < 1$.

Итак, канонический инволютивный $*$-антиавтоморфизм, построенный в примере 3 § 3, является единственным с точностью до сопряженности в случае инъективных W^*-факторов типа II_1, II_∞ и в факторе типа III_1 Араки-Вудса, а также одним из антиавтоморфизмов фактора R_λ $(0 < \lambda < 1)$ — именно тем, который соответствует элементу 1 в группе $\mathbf{R}_+^* / \{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

Построим пример инволютивного $*$-антиавтоморфизма фактора R_λ, соответствующего $\sqrt{\lambda}$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

Пример 4. (см. [38, 40]). Пусть $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$, и мера μ на Ω индуцирована мерой Лебега на $\mathbf{R}^2$. И пусть

$$G = \left\{ (a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{Q}) \mid a > 0 \right\},$$

где $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. Действие группы G на Ω, определенное как $(a, b)(x, y) = (ax + b, 1/ay)$ для всех $(a, b) \in G$, $(x, y) \in \Omega$, сохраняет меру μ, свободно и эргодично. Так как группа G разрешима, то скрещенное произведение $W^*(L^\infty(Q,$

μ), G) изоморфно фактору $R_{0,1}$. Определим однопараметрическую группу автоморфизмов (Ω, μ), положив

$$\beta_s(x, y) = (x, sy), \quad (x, y) \in \Omega, \quad s \in \mathbf{R}_+^*.$$

Так как β коммутирует с действием группы G, то β можно продолжить до однопараметрической группы автоморфизмов $R_{0,1}$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{mod}_{R_{0,1}}(\beta_s) = s$. Пусть σ — канонический антиавтоморфизм $R_{0,1} = W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)$, построенный в примере 3. Для $s \in \mathrm{R}_+^*$ преобразование $\alpha_s = \beta_s \circ \sigma$ является антиавтоморфизмом $R_{0,1}$, коммутирующим с действием β, и $\mathrm{mod}(\alpha_s) = s$.

Для $\lambda \in (0,1)$ рассмотрим W^*-фактор R_λ, являющийся скрещенным произведением $R_{0,1}$ с автоморфизмом $\beta_{\lambda^{-1}}$. Пусть π — каноническое вложение $R_{0,1}$ в R_λ, $v \in R_\lambda$ — унитарный оператор такой, что $\pi(\beta_{\lambda^{-1}}(x)) = v^* \pi(x) v = \mathrm{Ad}\, v \pi(x)$, $x \in R_{0,1}$. Поскольку α_s коммутирует с $\beta_{\lambda^{-1}}$, то в силу замечания к примеру 3, α_s однозначно продолжается до $*$-антиавтоморфизма $\bar{\alpha}_s$ фактора R_λ так, что для всех

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi(x_n) v^n \in R_\lambda : \bar{\alpha}_s \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi(x_n) v^n \right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} v^{-n} \pi(\alpha_s(x_n)),$$

и $\mathrm{mod}(\bar{\alpha}_s) = s$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$. Положим $s = \sqrt{\lambda}$. Так как $\alpha^2_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(x) = \beta_{\lambda^{-1}}(x)$ для всех $x \in R_{0,1}$, то $\bar{\alpha}^2_{\lambda^{-\frac{1}{2}}} = \mathrm{Ad}\, v$, так как по построению $\bar{\alpha}_s(v) = v^*$ для всех $s \in \mathbf{R}_+^*$. В силу [38, лемма 1.6] отсюда следует существование унитарного $w \in R_\lambda$ такого, что $v^* = w \bar{\alpha}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(w^*)$. Тогда $\gamma = \mathrm{Ad}\, w \circ \bar{\alpha}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}$ является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом R_λ с $\mathrm{mod}(\gamma) = \sqrt{\lambda}$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

Остается лишь случай W^*-факторов типа III_0. В этом случае еще нет полной классификации инволютивных $*$-антиавтоморфизмов. Отметим лишь, что с помощью теоремы 4.4 можно показать, что для любого n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, существует инъективный W^*-фактор типа III_0, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве, и имеющий ровно n классов сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов (см. [38, п. 6.6] и [40, предложение 3.4.7]).

Замечание. При изложении результатов разделов 4.1 и 4.2 мы придерживались диссертации Джиордано [38] (см. также [37, 39, 40]). Случай W^*-факторов типа II_1 (теорема 4.2 (i)) исследован Джиордано совместно с Джонсом [41] и независимо другими методами Штёрмером [63]. Обобщение теоремы 4.6 для σ-конечных W^*-факторов типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, не обязательно инъективных, получено в работе [58]. Полное описание инволютивных $*$-антиавтоморфизмов W^*-алгебр (но без классификации с точностью до сопряженности) приведено в [61].

4.3. Переформулируем полученные выше результаты в терминах JW-факторов. До конца параграфа A означает JW-фактор не типа I, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры. Для простоты будем предполагать, что A действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Корректность следующего определения показывается так же, как и в определении 3.

Определение 5. JW-фактор A назовем инъективным, если его обертывающая W^*-алгебра $\mathfrak{A}(A)$ является инъективным W^*-фактором.

Из теоремы 3.5 и результатов [30] вытекает следующее описание инъективных JW-факторов (см. [8]).

Теорема 4.7. С точностью до изоморфизма:

(i) существует в точности один инъективный JW-фактор типа II_1;

(ii) существует в точности один инъективный JW-фактор типа II_∞;

(iii) существуют в точности два неизоморфных инъективных JW-фактора типа III_λ, $0<\lambda<1$;

(iv) существует в точности один инъективный JW-фактор типа III_1, порождающий фактор Араки-Вудса типа III_1.

Отметим, что в примерах 3 и 4 с учетом теоремы 3.5 содержится конструкция всех перечисленных инъективных JW-факторов.

Что касается инъективных JW-факторов типа III_0, то как уже отмечалось в 4.2, можно построить счетное число попарно неизоморфных инъективных JW-факторов типа III_0, у которых обертывающие W^*-алгебры изоморфны.

В связи с определением 5 отметим, что было бы интересно дать внутреннее определение инъективности JW-фактора A, не использующее понятие обертывающей W^*-алгебры $\mathfrak{A}(A)$ (ср. с проблемой 1). В этом направлении имеется следующий результат.

Предложение 4.8. Рассмотрим следующие условия: а) JW-фактор A аппроксимативно конечномерен, т. е. существует возрастающая последовательность конечномерных чисто вещественных JW-подалгебр $\{A_n\}$ в A, содержащих единицу, и таких, что $\bigcup A_n$ слабо плотно в A (см. [63]);

б) JW-фактор A инъективен;

в) существует проекция P из $B(H)_{SA}$ на A такая, что $\|P\|=1$ и $P(1)=1$.

Тогда имеют место импликации а)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$в). Если A имеет тип тип II_1, то б)$\Rightarrow$а).

Доказательство. Известно [30], что для W^*-факторов аналоги всех этих утверждений эквивалентны. Если выполнено а), то последовательность W^*-алгебр $\{\mathfrak{A}(A_n)\}$ возрастает и $\bigcup\limits_n \mathfrak{A}(A_n)$ слабо плотно в $\mathfrak{A}(A)$. Следовательно, $\mathfrak{A}(A)$ является аппроксимативно конечномерным (а, значит, инъективным) W^*-

фактором, т. е. A-инъективный JW-фактор Пусть выполнено б), т. е. $\mathfrak{A}(A)$ — инъективный W^*-фактор. Тогда существует проекция P_0 из $B(H)$ на $\mathfrak{A}(A)$. $\|P_0\|=1$, $P_0(1)=1$. Если α — инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathfrak{A}(A)$, такой, что $A=$ $=(x\in\mathfrak{A}(A)_{SA}:\alpha(x)=x\}$, то отображение $\Psi(x)={}^1/_2(x+\alpha(x))$, $x\in\mathfrak{A}(A)_{SA}$, является очевидно проекцией из $\mathfrak{A}(A)_{SA}$ на A, причем $\|\Psi\|=1$, $\Psi(1)=1$ (см. [35]). Поэтому отображение $P=$ $=\Psi\circ P_1$, где $P_1=P_{0|B(H)_{SA}}$, является проекцией из $B(H)_{SA}$ на A, причем $\|P\|=1$ и $P(1)=1$, т. е. имеет место в). Пусть, наконец, A имеет тип II_1. Если выполнено б), то $\mathfrak{A}(A)$ является аппроксимативно конечномерным W^*-фактором и в силу теоремы 2.4 $\mathfrak{A}(A)$ имеет тип II_1. Из теоремы 2.9 в [63] следует, что A является аппроксимативно конечномерным JW-фактором. Предложение доказано.

Проблема 3. (i) Верна ли импликация в)$\Rightarrow$а), т. е. эквивалентны ли все утверждения а), б), в)? В частности: (ii) верна ли импликация в)$\Rightarrow$б), т. е. можно ли в) принять за определение инъективности JW-фактора A? (iii) Верна ли импликация б)$\Rightarrow$а) в общем случае, т. е. являются ли все JW-факторы в теореме 4.7 аппроксимативно конечномерными?

§ 5. ТЕОРИЯ ТОМИТЫ — ТАКЕСАКИ ДЛЯ JBW-АЛГЕБР

5.1. При попытке построения какого-либо аналога теории Томиты—Такесаки для JBW-алгебр сразу возникает ряд принципиальных трудностей. Во-первых, отсутствует ГНС-представление, так что нет гильбертова пространства, на котором действуют операторы Томиты—Такесаки. Во-вторых, если $\mathfrak{U}$ — W^*-алгебра, φ — точное нормальное состояние на $\mathfrak{U}$, то невозможно различить группы модулярных автоморфизмов σ_t и σ_{-t} [64] в терминах йорданова произведения $x\circ y={}^1/_2(xy+yx)$. В самом деле, если вычислить группу модулярных автоморфизмов для φ как состояния на W^*-алгебре $\mathfrak{U}_0$ — противоположной для $\mathfrak{U}$ (см. пример 2 § 2), то получим σ_{-t} вместо σ_t. Поэтому при рассмотрении аналога этой теории можно переносить только те понятия и результаты, которые могут быть выражены в терминах йорданова произведения. Одним из таких объектов является однопараметрическое семейство $\rho_t={}^1/_2(\sigma_t+\sigma_{-t})$. Известно, что условие Кубо-Мартина-Швингера (КМШ) дает очень важную характеризацию группы σ_t. Хотя для семейства ρ_t нет аналога условия КМШ, тем не менее, оказывается, можно дать характеризацию ρ_t, которая не использует структурную теорию W^*-алгебр. В этом разделе, следуя [42], мы покажем, что аналог семейства ρ_t может быть определен для произвольных JBW-алгебр с точным нормальным состоянием. В частности, когда JBW-алгебра является эрмитовой частью W^*-алгебры, получается характеризация семейства ρ_t.

Определение 6. Пусть A—JBW-алгебра с нормальным состоянием φ. Самополярная форма, ассоциированная с φ — это симметрическая, положительно полуопределенная билинейная форма s на A, удовлетворяющая условиям

(i) $s(a, b)\geqslant 0$ для всех a, $b\in A^+$;

(ii) $s(1, a)=\varphi(a)$ для всех $a\in A^+$;

(iii) если $0\leqslant\psi\leqslant\varphi$, то существует $b\in A$, $0\leqslant b\leqslant 1$, такой, что $\psi(a)=s(a, b)$ для всех $a\in A$.

Для любого нормального состояния φ существует ровно одна самополярная форма, ассоциированная с φ [42].

Определение 7. Однопараметрическое семейство $\{v_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ линейных операторов на векторном пространстве L называется косинусным семейством, если $v_0=I$ — единичный оператор, и выполнено тождество $2v_sv_t=v_{s+t}+v_{s-t}$, s, $t\in\mathbf{R}$.

Легко видеть, что если $\{u_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ — однопараметрическая группа линейных операторов на L, то $^1/_2(u_t+u_{-t})$ является косинусным семейством. В частном случае верно и обратное: как доказано в [48], если $\{v_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ слабо непрерывное косинусное семейство ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H, то существует единственный положительный оператор d на H такой, что $v_t=\cos(td)$, $t\in\mathbf{R}$.

Теперь сформулируем основной результат о существовании в JBW-алгебрах аналога семейства ρ_t.

Теорема 5.1. Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным состоянием φ. Существует единственное косинусное семейство ρ_t положительных линейных отображений A в себя, сохраняющих единицу, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(i) отображение $t\to\rho_t(a)$ слабо непрерывно для любого $a\in A$;

(ii) $\varphi(\rho_t(a)\cdot b)=\varphi(a\cdot\rho_t(b))$ для всех a, $b\in A$;

(iii) $s(a, b)=\int\varphi(a\cdot\rho_t(b))\cosh(\pi t)^{-1}dt$ определяет самополярную форму, ассоциированную с φ.

Доказательство. Единственность. Легко видеть, что билинейная форма $\langle a|b\rangle=\varphi(a\circ b)$, ($a$, $b\in A$) является скалярным произведением на A. Пусть гильбертово пространство H является пополнением A по норме $\|a\|_2=\varphi(a^2)^{1/2}$, $a\in A$. Продолжим операторы ρ_t до самосопряженных операторов v_t на H (см. (ii)), причем $\|v_t\|\leqslant 1$. В силу упомянутого результата [48], существует положительный оператор d на H такой, что $v_t=\cos(td)$. Из (iii), применяя свойства преобразований Фурье, получим для a, $b\in A$:

$$s(a, b)=\langle a|\int v_t(b)\cosh(\pi t)^{-1}dt\rangle=\langle a|\cosh(d/2)^{-1}b\rangle.$$

Единственность самополярной формы, ассоциированной с φ, влечет единственность оператора d и, следовательно, единственность косинусного семейства ρ_t.

Существование. В силу 1.3 и предложений 2.1 и 2.2 можно предположить, что либо (а)—A имеет прямые слагаемые только типа I_n $(n\leqslant 3)$, либо (б) — существуют W^*-алгебра $\mathfrak{U}$ и ее инволютивный *-антиавтоморфизм α такие, что $A=\{x\in \in\mathfrak{U}_{sA}:\alpha(x)=x\}$.

В случае (а) A является модулярной JBW-алгеброй и, следовательно, обладает разделяющим семейством нормальных конечных следов (следствие 1 теоремы 2.4). Разбивая при необходимости A на прямые слагаемые, можно считать, что существуют положительный обратимый элемент $h\in A$ и след $\tau(\tau(1)=1)$ такие, что $\varphi(a)=\tau(a\circ h)$, $a\in A$. Теперь достаточно положить

$$\rho_t(a)=\{h^{it}ah^{it}\}\overset{\text{def}}{=}\{\cos(t\log h)\,a\cos(t\log h)\}+$$
$$+\{\sin(t\log h)\,a\sin(t\log h)\},$$

где $\{abc\}=a\circ(b\circ c)+c\circ(a\circ b)-b\circ(a\circ c)$ — тройное йорданово произведение, которое в специальных йордановых алгебрах совпадает с $^1/_2(abc+cba)$. Построенное семейство и будет искомым (подробнее см. [42]).

В случае (б) продолжим φ до α-инвариантного состояния φ_0 на $\mathfrak{U}$ (см. 2.3). Из теории Томиты-Такесаки для W^*-алгебр имеем, что $\alpha\circ\sigma_t=\sigma_{-t}\circ\alpha$. Нетрудно проверить, что искомым косинусным семейством является $\rho_t={}^1/_2(\sigma_t+\sigma_{-t})\,|_A$. Теорема доказана.

В связи с рассмотренным результатом отметим следующую проблему.

Проблема 4. Получить аналог теоремы 5.1 для случая полуконечного веса φ.

5.2. Следуя [36], можно попытаться получить для JBW-алгебр аналог той части теории Томиты-Такесаки, которая устанавливает антиизоморфизм между W^*-алгебрами $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$, когда $\mathfrak{U}$ обладает циклическим разделяющим вектором.

Пусть A — JBW-алгебра с сопряженным A^* и предсопряженным A_*. Для состояния f на A положим

$$V_f=\{g\in A^*:-tf\leqslant g\leqslant tf,\ \text{при некотором } t\in\mathbb{R}_+\}.$$

Тогда V_f является порядковым идеалом в A^*; если f нормально, то V_f плотно в A_* в том и только в том случае, когда f — точно.

Рассмотрим частный случай, когда A является эрмитовой частью W^*-алгебры $\mathfrak{U}$. Пусть f — состояние на $\mathfrak{U}$, (H,π,Ω) — ГНС-представление $\mathfrak{U}$, ассоциированное с f, $W=\pi(\mathfrak{U})_{sA}'$ — эрмитова часть коммутанта $\pi(\mathfrak{U})$ в $B(H)$. Тогда существует положительная биекция μ из V_f на W такая, что

$$g(a)=(\mu(g)\pi(a)\Omega,\ \Omega),\quad g\in V_f,\ a\in A.$$

Если f — точное нормальное состояние, то W^*-алгебра $\pi(\mathfrak{U})$ изоморфна $\mathfrak{U}$ и теория Томиты-Такесаки устанавливает, в частности, существование антиизоморфизма ν между $\pi(\mathfrak{U})$ и $\pi(\mathfrak{U})'$.

Сужая π на $A=\mathfrak{U}_{SA}$, мы получим, что существует порядковый изоморфизм

$$\lambda=\mu^{-1}\circ\nu\circ\pi \text{ из } A \text{ на } V_f$$

такой, что $\lambda(1)=f$. В связи с этим возникает следующая задача, которая может быть рассмотрена в качестве одного из аналогов той части теории Томиты-Такесаки, которая устанавливает антиизоморфизм между $\pi(\mathfrak{U})$ и $\pi(\mathfrak{U})'$.

Проблема 5. Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным состоянием f. Существует ли порядковый изоморфизм λ между A и V_f такой, что $\lambda(1)=f$?

Рассмотренный выше пример дает утвердительный ответ в случае, когда A изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры. В [36] получен положительный ответ в двух случаях: а) A является атомической JBW-алгеброй, т. е. всякий идемпотент в A является точной верхней гранью ортогонального семейства минимальных идемпотентов; б) A обладает точным нормальным конечным следом.

§ 6. ТЕОРЕМЫ РАДОНА-НИКОДИМА

6.1. Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Положим

$$A_\tau^+=\{x\in A^+:\tau(x)<+\infty\},$$

$$A_\tau=A_\tau^+-A_\tau^+=\{x-y,\ x,y\in A_\tau^+\}.$$

Тогда A_τ является йордановым идеалом в A, и $\|x\|_1=\tau(|x|)$ является нормой на A_τ, которую назовем L_1-нормой. Пусть $L_1(A,\tau)$ — пополнение A_τ по L_1-норме. Тогда $L_1(A,\tau)$ изометрически изоморфно A_* — предсопряженному к A, т. е. пространству всех нормальных линейных функционалов на A; более того, $L_1(A,\tau)$ может быть отождествленно с подмножеством интегрируемых по τ спектральных семейств из A (см. 1.4), т. е.

$$L_1(A,\tau)=\left\{h=\{e_\lambda\}\in\mathscr{A}(A):\int|\lambda|\,d\tau(e_\lambda)<+\infty\right\}$$

(см. [4, 11, 43]).

Для элемента $h\in A^+$ определим функцию $\tau(h\cdot)$ на A^+, положив $\tau(hx)=\tau(U_{h^{1/2}}x)$, $x\in A^+$. Легко видеть, что $\tau(h\cdot)$ является нормальным полуконечным весом на A. По аналогии со случаем W^*-алгебр [50], рассмотрим веса, порожденные неограниченными спектральными семействами.

Для $h\in\mathscr{A}^+(A)$ (см. 1.4), $h=\{e_\lambda\}$, $\varepsilon>0$, положим $h_\varepsilon=h(1+\varepsilon h)^{-1}$, т. е. $h_\varepsilon = f_\varepsilon(h)$, где $f_\varepsilon(t) = t(1+\varepsilon t)^{-1}$ $(t \in \mathbf{R}_+)$ — строго монотонная функция и $f_\varepsilon(0) = 0$. Поскольку $f_\varepsilon(t)$ ограничена $(0 \leqslant f_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon^{-1})$, то $h_\varepsilon \in A$ для любого $\varepsilon > 0$. Для элементов h, $k \in \mathscr{A}^+(A)$ будем писать $h \leqslant k$, если $h_\varepsilon \leqslant k_\varepsilon$ для некоторого (а значит и для всех) $\varepsilon > 0$. Сеть $\{h_\alpha\}$ в $\mathscr{A}^+(A)$ назовем монотонно возрастающей к $h \in \mathscr{A}^+(A)$ и писать $h_\alpha \uparrow h$, если $h_{\alpha\varepsilon} \uparrow h_\varepsilon$ в A.

Определим для $h \in \mathscr{A}^+(A)$ функцию $\tau(h\cdot)$ на A^+ как предел возрастающей сети нормальных полуконечных весов $\tau(h_\varepsilon\cdot)$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Предложение 6.1. Отображение $h \to \tau(h\cdot)$ является сохраняющим порядок нормальным отображением из $\mathscr{A}^+(A)$ в множество нормальных полуконечных весов на A.

Ниже мы покажем, что при этом получается отображение «на».

В случае нормальных положительных функционалов (т. е. ограниченных весов) из упомянутого выше изоморфизма между A_* и $L_1(A, \tau)$ вытекает следующий вариант теоремы Радона-Никодима.

Предложение 6.2. Для любого нормального ограниченного веса φ существует элемент $h \in L_1(A, \tau) \subset \mathscr{A}^+(A)$ такой, что $\varphi = \tau(h\cdot)$. Обратно, для любого $h \in L_1(A, \tau)$ функция $\tau(h\cdot)$ является нормальным ограниченным весом на A.

Теперь сформулируем результат в общем случае.

Теорема 6.3 (теорема Радона-Никодима). Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Если φ — нормальный полуконечный вес на A, то существует единственный элемент $h \in \mathscr{A}^+(A)$ такой, что $\varphi = \tau(h\cdot)$.

Доказательство. Как и в теореме 5.1, достаточно рассмотреть отдельно два случая:

(а) A—JBW-алгебра типа I_n $(n \leqslant 3)$;

(б) $A = \{x \in \mathfrak{U}_{sa} : \alpha(x) = x\}$, где $\mathfrak{U}$ — некоторая W^*-алгебра, α — ее инволютивный *-антиавтоморфизм.

В случае (а) JBW-алгебра разлагается в прямую сумму JBW-подалгебр, на каждой из которых вес φ является ограниченным; поэтому утверждение вытекает из предложения 6.2.

В случае (б) продолжим след τ и вес φ, как в теореме 2.3, соответственно до следа τ_0 и веса φ_0 на W^*-алгебре $\mathfrak{U}$, положив $\tau_0(x) = \tau(\Psi(x))$, $\varphi_0(x) = \varphi(\Psi(x))$, $x \in \mathfrak{U}^+$, где $\Psi(x) = {}^1/_2(x + \alpha(x))$. По теореме 5.12 из [50] существует положительный самосопряженный оператор h, присоединенный к $\mathfrak{U}$, такой, что $\varphi_0 = \tau_0(h\cdot)$. Поэтому достаточно доказать, что все спектральные проекторы h принадлежат A. Так как φ_0—нормальный вес, то он является пределом возрастающей сети нормальных положительных линейных функционалов $\{\varphi_0^\alpha\}$ на $\mathfrak{U}$. Положим $\varphi^\alpha = \varphi_0^\alpha|_A$ и, используя предложение 6.2, построим возрастающую сеть $\{h_\alpha\}$ положительных элементов из $L_1(A, \tau) \subset \mathscr{A}(A)$ таких, что $\varphi^\alpha = \tau(h_\alpha\cdot)$ для всех α. Теперь, если $\omega_\alpha = \tau(h_\alpha\cdot)$, то сеть $\{\omega_\alpha\}$ нормальных положительных линейных функционалов на $\mathfrak{U}$ возрастает к φ_0. В самом деле, если $x\in\mathfrak{U}^+$, то, так как $h_{\alpha\varepsilon}\in A$, имеем

$$\omega_\alpha(x)=\tau_0(h_\alpha x)=\lim_{\varepsilon\to0}\tau_0(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}xh_{\alpha\varepsilon}^{1/2})=\lim_{\varepsilon\to0}(\tau\Psi(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}xh_{\alpha\varepsilon}^{1/2}))=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\tau(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}\Psi(x)h_{\alpha\varepsilon}^{1/2})=\tau(h_\alpha\Psi(x))=\varphi^\alpha(\Psi(x))\uparrow\varphi(\Psi(x))=\varphi_0(x).$$

Поэтому $\tau_0(h_\alpha x)\uparrow\tau_0(hx)$ для всех $x\in\mathfrak{U}^+$. Из [50] вытекает, что $h_\alpha\uparrow h$, т. е. $h_{\alpha\varepsilon}\uparrow h_\varepsilon$ для всех $\varepsilon>0$. Так как A слабо замкнуто в $\mathfrak{U}$ и $h_{\alpha\varepsilon}\in A$ для α, $\varepsilon>0$, то $h_\varepsilon\in A$ для всех $\varepsilon>0$. Следовательно, все спектральные проекторы оператора h лежат в A. Теорема доказана.

Отметим следствие из этой теоремы, которое уточняет ее содержание. Условимся называть элемент $h=\{e_\lambda\}\in\mathscr{A}(A)$ центральным, если все идемпотенты e_λ лежат в центре A. Очевидно, если h — ограниченное спектральное семейство, т. е. $h\in A$, то это определение совпадает с определением центрального элемента в JBW-алгебрах [25, § 4].

Следствие. В условиях теоремы 6.3:

а) элемент $h\in\mathscr{A}^+(A)$ ограничен, т. е. $h\in A^+$ тогда и только тогда, когда $\varphi\leqslant\lambda\tau$ при некотором $\lambda\in\mathbf{R}_+$;

б) вес φ ограничен тогда и только тогда, когда $h\in L_1(A,\tau)$;

в) вес φ является следом тогда и только тогда, когда h — центральный элемент в $\mathscr{A}(A)$.

Замечание. Теорема 6.3 получена автором совместно с Р. З. Абдуллаевым. Частный случай этой теоремы, когда $\varphi\leqslant\leqslant\lambda\tau$ $(\lambda\in\mathbf{R}_+)$, был доказан Кингом [47].

6.2. Было бы интересно получить аналог теоремы 6.3 для случая, когда τ является весом или состоянием. Как доказали Педерсен и Такесаки [50], в случае W^*-алгебр аналоги предложения 6.1 и теоремы 6.3 верны для точного нормального полуконечного веса τ, при условии, что оператор h и вес φ инвариантны относительно группы модулярных автоморфизмов, ассоциированной с τ. В связи с этим возникает следующая задача, решение которой, возможно, связано с проблемой 4:

Проблема 6. Получить для JBW-алгебр аналог теоремы Педерсена-Такесаки [50, теорема 5.12]. Более обозримой является задача в случае, когда φ и τ ограниченные веса. В связи с этим представляет интерес следующий результат.

Теорема 6.4. Пусть φ,ψ — нормальные положительные линейные функционалы на JBW-алгебре A, причем $\varphi\leqslant\psi$. Тогда существует положительный элемент $h_0\in A$, $0\leqslant h_0\leqslant 1$, такой, что $\varphi(x)=\psi(h_0\circ x)$ для всех $x\in A$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае W^*-алгебр [53, предложение 1.24.4].

Однако, с точки зрения решения проблемы 6, было более интересно получить другой вариант теоремы 6.4:

Проблема 7. Доказать, что в условиях теоремы 6.4 существует $t\in A$, $0\leqslant t\leqslant 1$, такой, что $\varphi(x)=\psi(U_t x)$, $x\in A$.

Заметим, что в частном случае, когда A совпадает с эрмитовой частью W^*-алгебры, проблема 7 имеет положительное решение [53, теорема 1.24.3].

§ 7. МЕРЫ НА ПРОЕКТОРАХ JBW-АЛГЕБР

7.1 Пусть A—JBW-алгебра, $\mathcal{P}_A$ — решетка идемпотентов (проекторов) из A.

Определение 8. Функция $\mu:\mathcal{P}_A\to\mathbf{R}_+$ такая, что $\mu(0)=0$, называется конечно-аддитивной мерой, если $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{m} e_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{m}\mu(e_n)$ для любого конечного набора $\{e_n\}_{n=1}^{m}$ попарно ортогональных идемпотентов из A. Если $\mu\left(\sum e_i\right)=\sum\mu(e_i)$ для любого ортогонального семейства $\{e_i\}\subset\mathcal{P}_A$, то μ называется вполне аддитивной мерой или просто мерой на $\mathcal{P}_A$. Если $\mu(1)=1$, то μ называется вероятностной мерой.

Если ρ—некоторое состояние на A, то его сужение $\rho|_{\mathcal{P}_A}=\mu$ является, очевидно, конечно-аддитивной мерой. Из [17, гл. III, § 3] следует, что при этом μ является мерой в том и только в том случае, когда состояние ρ нормально. Обратно, пусть на $\mathcal{P}_A$ задана некоторая вероятностная мера μ. В самой общей постановке проблема существования нормального состояния ρ на A, сужением которого является μ, имеет отрицательное решение: на спин-факторе легко построить примеры вероятностных мер, которые не продолжаются до состояний. Однако, если рассмотреть JBW-алгебры без прямых слагаемых типа I_2, то как и в случае W^*-алгебр, проблема имеет положительное решение.

Теорема 7.1. Пусть A—JBW-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякую вероятностную меру на идемпотентах A можно единственным образом продолжить до состояния на A.

Нормальность состояния, продолжающего меру, вытекает, как мы уже отмечали, из [17, гл. III, § 3]. Единственность продолжения следует из того, что произвольный элемент из A равномерно аппроксимируется линейными комбинациями идемпотентов (теорема 1.2), и непрерывности состояния в равномерной топологии. Более сложным является доказательство существования продолжения. Основные моменты доказательства мы приведем в разделе 7.2. Здесь мы отметим ряд следствий из теоремы 7.1.

Для $x\in A$ через $A(x)$ обозначается (см. теорему 1.2) ассоциативная JBW-подалгебра, порожденная элементами x и 1.

Определение 9. Квазисостоянием на JBW-алгебре A назовем функцию $\rho:A\to\mathbf{R}$ такую, что (i) $\rho(1)=1$; (ii) сужение ρ на JBW-подалгебру $A(x)$ является состоянием для любого $x \in A$, т. е. *линейно*.

Как и в случае W^*-алгебр [20, стр. 607], легко установить взаимно однозначное соответствие между конечно-аддитивными мерами и квазисостояниями на JBW-алгебрах. Именно, каждой конечно-аддитивной вероятностной мере μ соответствует квазисостояние $\dot{\mu}$, определенное как

$$\dot{\mu}(a) = \int \lambda d\mu(e_\lambda),$$

где $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента $a \in A$; при этом очевидно, что $\dot{\mu}|_{\mathscr{P}_A} = \mu$

Так как всякая ассоциативная JBW-алгебра изоморфна эрмитовой части абелевой W^*-алгебры, то всякое квазисостояние на ассоциативной JBW-алгебре линейно, т. е. является состоянием [19, теорема 1]. Если сужение квазисостояния ρ на $\mathscr{P}_A$ является вполне аддитивной мерой, то ρ будем называть нормальным квазисостоянием.

Из теоремы 7.1 вытекает

Следствие 1. Всякое нормальное квазисостояние на JBW-алгебре без прямых слагаемых типа I_2 линейно, т. е. является состоянием.

Пусть теперь A—JW-алгебра. Если на решетке проекторов A задана вероятностная мера μ, то естественно возникает вопрос о возможности продолжения μ до вероятностной меры на проекторах $\mathscr{P}_{\mathfrak{U}}$ обертывающей W^*-алгебры $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}(A)$ (ср. 2.3). В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. В самом деле, пусть A — бесконечномерный спин-фактор такой, что $\mathfrak{U}$ является фактором непрерывного типа (см. замечание к теореме 2.4). Тогда всякую вероятностную меру на проекторах $\mathfrak{U}$ можно продолжить до нормального состояния на $\mathfrak{U}$ (см. [13, 15, 28]). В то же время на A есть меры, которые не продолжаются до состояний. Следовательно, эти меры не продолжаются до мер на проекторах $\mathfrak{U}$.

Однако если рассмотреть JW-алгебру A без прямых слагаемых типа I_2, то в силу результатов 2.3 вопрос о продолжении вероятностной меры с $\mathscr{P}_A$ на $\mathscr{P}_{\mathfrak{U}}$ эквивалентен вопросу о продолжении меры с $\mathscr{P}_A$ до состояния на A, если учесть, что в этом случае $\mathfrak{U}$ также не содержит прямых слагаемых типа I_2 и, поэтому, меры на $\mathscr{P}_{\mathfrak{U}}$ всегда продолжаются до состояний на $\mathfrak{U}$.

Следствие 2. Пусть A—JW-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякая вероятностная мера на проекторах A продолжается до вероятностной меры на проекторах $\mathfrak{U}$.

Пусть теперь A—JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Тогда из теоремы 7.1 и предложения 6.2 вытекает следующее описание вероятностных мер на $\mathscr{P}_A$.

Следствие 3. Пусть A—JBW-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда для любой вероятностной меры μ на решетке $\mathcal{P}_A$ существует положительный элемент $a_\mu \in L_1(A, \tau)$, $\tau(a_\mu) = 1$, такой, что $\mu(e) = \tau(a_\mu \circ e)$ для всех $e \in \mathcal{P}_A$. Обратно, для любого положительного элемента $a \in L_1(A, \tau)$, $\tau(a) = 1$, функция $\tau(a \circ e)$, $e \in \mathcal{P}_A$, является вероятностной мерой.

Замечания. а) В частном случае, когда JBW-алгебра A совпадает с эрмитовой частью W^*-алгебры, теорема 7.1 вытекает из результатов работ [13, 15, 28].

б) Результаты этого параграфа получены автором совместно с А. А. Адизовым. В случае, когда A является непрерывным аппроксимативно конечномерным JW-фактором типа II_1, теорема 7.1 доказана М. С. Матвейчуком [14].

7.2 Доказательство теоремы 7.1 проведем отдельно для JBW-алгебр типа I и JBW-алгебр непрерывного типа (т. е. II и III).

Начнем с JBW-аглебр типа I.

Предложение 7.2. Пусть A—JW-фактор типа I_n $(n \geqslant 3)$. Тогда всякая вероятностная мера на проекторах A продолжается до нормального состояния.

Доказательство. В силу теоремы 3.2 $A = B(H_{\mathbf{K}})_{SA}$, где $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$. Поэтому утверждение вытекает из обобщенной теоремы Глисона для $B(H_{\mathbf{K}})$, доказанной в [32].

Предложение 7.3. Пусть A—JBW-аглебра типа I_{fin} без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякая вероятностная мера на проекторах A продолжается до нормального состояния.

Доказательство. Так как μ вполне аддитивна, то можно сразу предположить, что A имеет тип $I_n (n \geqslant 3)$. В силу [56, теорема 3] A разлагается в прямую сумму JBW-подалгебр вида $C(X, M)$, где X — *гиперстоуновский компакт*, $M = B(H_{\mathbf{K}})_{SA}$, $H_{\mathbf{K}}$—гильбертово пространство над $\mathbf{K}$ размерности $\geqslant 3$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$), либо $M = M_3^8$ (при $n = 3$). На слагаемых вида $C(X, B(H_{\mathbf{K}})_{SA}$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, мера μ продолжается до состояния с использованием предложения 7.2 аналогично [67, лемма 20]. В случае $C(X, M_3^8)$ достаточно показать, что линейно квазисостояние $\dot{\mu}$, построенное по мере μ. Линейность $\dot{\mu}$ достаточно проверить на двупорожденных JBW-подалгебрах A, которые, в силу [42, лемма 2.3] являются JW-алгебрами, и могут быть вложены в подалгебры $C(X, M_3^8)$, изоморфные алгебрам вида $C(X, M_3(\mathbf{K})_{SA})$. Поэтому случай JBW-алгебры $C(X, M_3^8)$ сводится к уже рассмотренному случаю $C(X, B(H_{\mathbf{K}})_{SA})$, когда $\dim H_{\mathbf{K}} = 3$. Предложение доказано.

С использованием предложения 7.3 следующая теорема доказывается аналогично случаю W^*-алгебр [67].

Теорема 7.4. Пусть A—JBW-алгебра типа I без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякая вероятностная мера на проекторах A продолжается до нормального состояния.

Теперь рассмотрим случай JBW-аглебр непрерывного типа. В силу 1.3 это в точности JW-алгебры типа II_1, II_∞ и III.

Пусть A—JW-алгебра, p, q—проекторы из A, $A(p, q)$—JW-подалгебра в A, порожденная элементами p, q и $\mathbf{1}$. Если через $\mathfrak{R}(p, q)$ обозначим слабо замкнутую вещественную ассоциативную *-алгебру, порожденную p, q и $\mathbf{1}$, то нетрудно видеть, что $A(p, q)=\mathfrak{R}(p, q)_{sA}$, и обертывающая W^*-алгебра $\mathfrak{A}(A(p, q))$ совпадает с $\mathfrak{R}(p, q)+i\mathfrak{R}(p, q)=\mathfrak{U}(p, q)$—$W^*$-алгеброй, порожденной проекторами p, q, 1 (см. [66, стр. 306]). В частности, JW-алгебра $A(p, q)$ обратима.

Предложение 7.5. Пусть μ—вероятностная мера на проекторах JW-алгебры A непрерывного типа. Тогда для любых проекторов $p, q \in A$ сужение μ на решетку проекторов JW-алгебры $A(p, q)$ продолжается до нормального состояния на $A(p, q)$.

Доказательство. Так как $A(p, q)$—обратимая JW-алгебра, и ее обертывающая W^*-алгебра $\mathfrak{U}(p, q)$ имеет тип I [66, теорема 1.41], то в силу теоремы 2.4 JW-алгебра $A(p, q)$ имеет тип I. Если $A(p, q)$ не содержит прямых слагаемых типа I_2, то утверждение следует из теоремы 7.4. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $A_0=A(p, q)$ имеет тип I_2.

Предположим сначала, что A_0—JW-фактор типа I_2. Тогда в A_0 существуют два ортогональных проектора e и f и симметрия t такие, что $e=tft$ (см. [68]). Так как A—непрерывная JW-алгебра, то в силу [25, теорема 6.9] существуют ортогональные проекторы r_1 и r_2 в A такие, что $r_1+r_2=e$ и $sr_1s=r_2$ для некоторой симметрии $s \in A$. Положим $q_1=tr_1t$, $q_2=tr_2t$. Тогда симметрии s, t и проектор r_1 порождают JW-фактор типа I_4, содержащий A_0 и лежащий в A. Поэтому утверждение в этом случае следует из предложения 7.2.

Пусть теперь A_0—JW-алгебра типа I_2. В силу [57] A_0 является прямой суммой JW-алгебр вида $L^\infty(\Omega, \nu, V)$, где ν—мера Радона на локально компактном пространстве Ω, V—спин фактор. Поэтому утверждение достаточно доказать для JW-алгебр этого вида. Из [27, предложение 7.3] следует что $L^\infty(\Omega, \nu, V)$ изоморфна прямому интегралу $\int^{\oplus} \underset{\sim}{A}(\lambda)\, d\nu(\lambda)$, где $A(\lambda)$—JW-факторы типа I_2, изоморфные спин-фактору V. Теперь как и в случае W^*-алгебр [12], вопрос о продолжении меры μ до состояния на A_0 сводится к уже рассмотренному случаю JW-факторов типа I_2, являющихся «слоями» A_0. Предложение доказано.

Следствие. Пусть $\dot{\mu}$—квазисостояние, построенное по мере μ на проекторах JW-алгебры A непрерывного типа. Тогда $\dot{\mu}$ аддитивно на проекторах A, т. е. $\dot{\mu}(e+f)=\dot{\mu}(e)+\dot{\mu}(f)$ для всех $e, f \in \mathcal{P}_A$.

Теперь, если использовать этот результат, то доказательство следующей теоремы проходит почти аналогично случаю W^*-алгебр [70].

Теорема 7. 6. Всякую вероятностную меру на проекторах JW-алгебры типа II_1 можно продолжить до нормального состояния.

Остался случай JW-алгебр типа II_∞ и III. Если A является эрмитовой частью W^*-алгебры и имеет тип II_∞ или III, то наше утверждение вытекает из результатов [28]. Поэтому достаточно, в силу предложения 2.1, рассмотреть случай чисто вещественных JW-алгебр.

Теорема 7.7. Пусть JW-алгебра A типа II_∞ или III является эрмитовой частью вещественной W^*-алгебры $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(A)$. Тогда всякая вероятностная мера на проекторах A продолжается до нормального состояния на $\mathfrak{R}$.

Доказательство теоремы полностью следует методу доказательства теоремы 4.1 в [28], если воспользоваться предложением 7.5 и следующим результатом.

Предложение 7.8. Пусть $\mathfrak{R}$ — вещественная W^*-алгебра, такая, что $A=\mathfrak{R}_{SA}$ является собственно немодулярной JW-алгеброй. Тогда в A существует проектор e такой, что $e\sim(1-e)\sim 1$ в $\mathfrak{R}$.

Здесь для проекторов $e, f\in A=\mathfrak{R}_{SA}$ эквивалентность понимается в смысле W^*-алгебр, т. е. $e\sim f$ в $\mathfrak{R}$ означает, что существует частичная изометрия $u\in\mathfrak{R}$ такая, что $uu^*=e$, $u^*u=f$. Доказательство предложения 7.8 следует доказательству предложений 1.34 и 1.36 из [66, гл. V].

Таким образом, из теорем 7.4, 7.6 и 7.7 вытекает основная теорема 7.1.

Замечание. Близкий, отличающийся в деталях, подход к доказательству теоремы 7.7 был предложен в замечании к работе [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аюпов Ш. А.,* Статистические эргодические теоремы в йордановых алгебрах. Успехи мат. наук, 1981, *36,* № 6, 201—202 (РЖМат, 1982, 4Б921)
2. —, О конструкции йордановых алгебр самосопряженных операторов. Докл. АН СССР, 1982, *267,* № 3, 521—524 (РЖМат, 1983, 4Б938)
3. —, Модулярные йордановы алгебры самосопряженных операторов. Теор. и мат. физ., 1982, *53,* № 1, 77—82 (РЖМат, 1983, 2Б933)
4. —, Интегрирование на йордановых алгебрах. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1983, *47,* № 1, 3—25 (РЖМат, 1983, 7Б808)
5. —, Типы йордановых алгебр самосопряженных операторов и их обертывающих алгебр фон Неймана. Функц. анализ и его прил., 1983, *17,* № 1, 65—66 (РЖМат, 1983, 7Б760)
6. —, Классификация, представления и вероятностные аспекты упорядоченных йордановых алгебр. Автореферат докт. диссертации. Ташкент, 1983, 35 с.
7. —, Локально измеримые операторы для JW-алгебр и представление упорядоченных йордановых алгебр. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, *48,* № 2, 211—236 (РЖМат, 1984, 8Б1041)

8. —, Классификация инъективных JW-факторов. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 3, 67—68 (РЖМат, 1984, 12Б1159)
9. —, О существовании йордановых алгебр самосопряженных операторов заданного типа. Сиб. мат. журнал, 1984, *25*, № 5, 3—8 (РЖМат, 1985, 2Б1031)
10. —, JW-факторы и антиавтоморфизмы алгебр фон Неймана. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, *49*, № 1, 211—220
11. *Бердикулов М. А.*, Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW-алгебр. Докл. АН УзССР, 1982, № 6, 3—4 (РЖМат, 1983, 2Б918)
12. *Лодкин А. А.*, Всякая мера на проекторах W^*-алгебры продолжается до состояния. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 4, 54—58 (РЖМат, 1975, 4Б883)
13. *Матвейчук М. С.*, Описание конечных мер в полуконечных алгебрах. Функц. анализ и его прил., 1981, *15*, № 3, 41—53 (РЖМат, 1982, 3Б842)
14. —, Одна теорема о состояниях на квантовых логиках. Состояния в алгебрах Йордана. Теор. и мат. физ., 1983, *57*, № 3, 465—468 (РЖМат, 1984, 4В281)
15. —, *Нессонов Н. И.* Описание мер в факторах Неймана типа III. Изв. вузов. Мат., 1984, № 2, 68—71 (РЖМат, 1984, 9Б693)
16. *Сарымсаков Т. А.*, *Аюпов Ш. А.*, Частично упорядоченные йордановы алгебры. Докл. АН СССР, 1979, *249*, № 4, 789—792 (РЖМат, 1980, 3Б767)
17. —, —, *Хаджиев Дж*, *Чилин В. И.*, Упорядоченные алгебры. Ташкент, Фан, 1983, 304 с. (РЖМат, 1984, 5А268 К)
18. *Фон Нейман Дж.*, Обобщение математического аппарата квантовой механики методами абстрактной алгебры, Ч. I. Мат. сб., 1936, *1*, № 4, 415—484
19. *Aarnes J. F.*, Physical states on a C^*-algebra. Acta Math., 1969, *122*, № 3—4, 161—172 (РЖМат. 1970, 1Б640)
20. —, Quasi-states on C^*-algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, *149*, № 2, 601—625 (РЖМат. 1971, 5Б848)
21. *Ajupov Sh. A.*, Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Math. Z., 1982, *181*, 253—268
22. *Alfsen E. M.*, *Hanche-Olsen H.*, *Shultz F. W.*, State spaces of C^*-algebras. Acta Math., 1980, *144*, № 3—4, 267—305 (РЖМат, 1981, 1Б972)
23. —, *Shultz F. W.*, State spaces of Jordan algebras. Acta Math. 1978, *140*, № 3—4, 155—190 (РЖМат, 1979, 1Б590)
24. —, —, On non commutative spectral theory and Jordan algebras. Proc. London Math. Soc., 1979, *38*, № 3, 497—516 (РЖМат, 1979, 12Б796)
25. —, —, *Stormer E.*, A Gelfand — Neumark theorem for Jordan algebras. Adv. Math., 1978, *28*, № 1, 11—56 (РЖМат, 1978, 10Б905)
26. *Araki H.*, On the characterisation of the state space of quantum mechanics. Commun. Math. Phys., 1980, *75*, № 3, 1—25 (РЖФиз, 1980, 12Б30)
27. *Bellissard J.*, *Iochum B.*, Homogeneous selfdual cones versus Jordan algebras. The theory revisited. Ann. Inst. Fourier, 1978, *28*, № 1, 27—67 (РЖМат, 1979, 1Б591)
28. *Christensen E.*, Measures on projections and physical states. Commun. Math. Phys., 1982, *86*, № 4, 529—538 (РЖМат, 1983, 3В340)
29. *Connes A.*, Une classification des facteurs de type III. Ann. scient. Ecole norm. super, 1973, *6*, № 2, 133—252 (РЖМат, 1974, 3Б768)
30. —, Classification of injective factors. Ann. Math., 1976, *104*, № 1, 73—115 (РЖМат, 1977, 2Б903)
31. —, *Takesaki M.*, The flow of weights on factors of type III. Tôhoku Math. J., 2 ser., 1977, *29*, № 4, 473—575 (РЖМат, 1978, 8Б754)
32. *Drisch T.*, Generalization of Gleason's theorem. Internat. J. Theor. Phys., 1979, *18*, № 4, 239—243 (РЖМат, 1980, 8Б757)
33. *Edwards C. M.*, On the centres of hereditary JBW-subalgebras of JBW-algebras. Math. Proc., Cambridge Phil. Soc., 1975, *85*, № 2, 317—324 (РЖМат, 1979, 10Б902)

34. *Effros E., Stormer E.*, Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1967, *127*, № 2, 313—316 (РЖМат, 1968, 12Б685)
35. —, —, Positive projections and Jordan structure in operator algebras. Math. scand. 1979, *45*, № 1, 127—138 (РЖМат, 1980, 11Б896)
36. *Emch G. G., King W. P. C.*, Faithful normal states on *JBW*-algebras. «Oper. Algebras and Appl. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Kingstone, 1980», 1982, *38*, Part 2, 305—307 (РЖМат, 1983, 8Б936)
37. *Giordano T.*, Antiautomorphismes involutifs des facteurs injectifs. C. r. Acad. sci. Paris, 1980, *AB 291*, № 10—17, A583—A585 (РЖМат, 1981, 6Б954)
38. —, Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs. Thèse, Univ. de Neuchatel 1981, 1—106
39. —, Antiautomorprismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs. J. Oper. Theory, 1983, *10*, № 2, 252—287 (РЖМат, 1984, 7Б830)
40. —, Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs, II. J. Funct. Anal., 1983, *51*, № 3, 326—360 (РЖМат, 1983, 12Б1041)
41. —, *Jones V.*, Antiautomorphismes involutifs du facteur hyperfini de type II. C. r. Acad. sci. Paris, 1980, *AB 290*, № 1—7, A29—A31 (РЖМат, 1980, 8Б739)
42. *Haagerup U., Hanche-Olsen H.*, A Tomita-Takesaki theory for *JBW*-algebras. Preprint Odense Universitet, 1982, 1—35 (РЖМат, 1984, 12Б1152)
43. *Iochum B.*, Cones autopolaires et Algebres de Jordan. Lect. Notes Math., 1984, № 1049, 247 pp.
44. —, *Shultz F. W.*, Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras. J. Funct. Anal., 1983, *50*, № 3, 317—328 (РЖМат, 1983, 8Б974)
45. *Jacobson N.*, Structure and Representations of Jordan algebras. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 39, Providence R. I., 1968, X+453 pp. (РЖМат, 1970, 8A235)
46. *Jordan P., von Neumann J., Wigner E.*, On an algebrais generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. Math., 1934, *35*, 29—64
47. *King W. P. C.*, Semifinite traces on *JBW*-algebras. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1983, *93*, № 3, 503—509 (РЖМат, 1984, 2Б1103)
48. *Kurepa S.*, A cosine functional equation in Hilbert space. Canad. J. Math., 1960, *12*, № 1, 45—50 (РЖМат, 1960, 13082)
49. *Pedersen G. K., Stormer E.*, Traces on Jordan algebras. Canad. J. Math., 1982, *34*, № 2, 370—373 (РЖМат, 1983, 1A303)
50. —, *Takesaki M.*, The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. *Acta Math., 1973, 130, № 1—2, 53—87 (РЖМат, 1973, 6Б761)*
51. *Robertson A. G.*, Automorphisms of spin factors and the decomposition of positive maps. Quart. J. Math., 1983, *34*, № 133, 87—96 (РЖМат, 1983, 7Б758)
52. —, *Youngson M. A.*, Positive projection with contractive complements on Jordan algebras. J. London Math. Soc., 1982, *25*, № 2, 365—374 (РЖМат, 1982, 9Б771)
53. *Sakai S.*, C^*-algebras and W^*-algebras. Berlin e. a., Springer, 1971, IX+ +256 pp. (РЖМат, 1971, 11Б876)
54. —, On automorphism groups of II_1-factors. Tohoku Math. J., 1974, *26*, № 3, 423—430 (РЖМат, 1975, 3Б737)
55. *Shultz F. W.*, On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Funct. Anal., 1979, *31*, № 3, 360—376 (РЖМат, 1979, 10Б903)
56. *Stacey P. J.*, The structure of type I *JBW*-algebras. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1981, *90*, № 3, 477—482 (РЖМат, 1982, 3Б829)
57. —, Type I_2 *JBW*-algebras. Quart. J. Math., 1982, *33*, № 129, 115—127 (РЖМат, 1982, 8Б755)
58. —, Real structure in σ-finite factors of type III_λ, where $0<\lambda<1$. Proc. London. Math. Soc., 1983, *47*, № 2, 275—284 (РЖМат, 1984, 1Б1054)
59. *Stormer E.*, On the Jordan structure of C^*-algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, *120*, № 12, 438—447 (РЖМат, 1966, 10Б589)
60. —, Jordan algebras of type I. Acta Math., 1966, *115*, № 3—4, 165—184 (РЖМат, 1967, 6Б645)

61. —, On anti-automorphisms of von Neumann algebras. Pacif J. Math., 1967, *21*, № 2, 349—370 (РЖМат, 1969, 1Б652)
62. —, Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, *130*, № 1, 153—166 (РЖМат, 1969, 4Б527)
63. —, Real structure in the hyperfinite factor. Duke Math. J., 1980, *47*, № 1, 145—153 (РЖМат, 1980, 11Б924)
64. *Stratila S.*, Modular theory in operator algebras. Bucuresti: Ed. Academiei, Tunbridge Wells: Abacus Press, 1981, 492 pp. (РЖМат, 1982, 6Б903 К)
65. —, *Zsido L.*, Lectures on von Neumann algebras. Bucuresti: Ed. Academiei, Tunbridge Wells: Abacus Press, 1979
66. *Takesaki M.*, Theory of operator algebras I. New York e. a., Springer, 1979, VIII+415 pp. (РЖМат, 1980, 7Б601 К)
67. *Tischer J.*, Gleason's theorem for type I von Neumann algebras. Pacif. J. Math., 1982, *100*, № 2, 473—488 (РЖМат, 1983, 2Б931)
68. *Topping D.*, Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc., 1965, № 53, 1—48 (РЖМат, 1969, 2Б666)
69. —, An isomorphism invariant for spin factors. J. Math. Mech., 1966, *15*, № 6, 1055—1064
70. *Yeadon F. J.*, Measures on projections in W^*-algebras of type II_1. Bull. London Math. Soc., 1983, *15*, № 2, 139—145 (РЖМат, 1983, 7Б816)