Л. В. Канторович, В. И. Жиянов, А. Г. Хованский, Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики,
Сиб. матем. журн., 1978, том 19, номер 5, 1053–1064

https://www.mathnet.ru/smj6317

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIX, № 5 Сентябрь — Октябрь 1978

УДК 51 : 330.115

Л. В. КАНТОРОВИЧ, В. И. ЖИЯНОВ, А. Г. ХОВАНСКИЙ

ПРИНЦИП ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕНЕНИИ К ОДНОПРОДУКТОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

В статье обсуждается общая формулировка принципа дифференциальной оптимизации. Рассматривается экономическая модель, в которой динамика подчинена этому принципу. Система уравнений модели представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, в которой запаздывание не задано, а само определяется из дифференциального уравнения. Уравнений достаточно, чтобы по состоянию экономической системы в настоящем определить ее дальнейшее развитие. Рассматриваются некоторые частные случаи, интересные с экономической точки зрения. В одном из них система уравнений распадается и поддается полному решению. В других случаях удаётся найти характерные экспоненциальные решения.

Несколько слов об экономическом содержании: рассматриваемая модель — однопродуктовая, динамическая, с фондами, дифференцированными по моментам их создания. Научно-технический прогресс и рост фондовооруженности приводят к непрерывному увеличению производительности труда на вновь создаваемых фондах. Наименее эффективные фонды выводятся из производства (и в дальнейшем не используются), а высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на вновь создаваемые фонды. В модели этот процесс подчинен критерию дифференциальной оптимизации, согласно которому политика вывода морально устаревших фондов является оптимальной, если она обеспечивает в каждый момент максимальный темп роста национального дохода.

Принцип дифференциальной оптимизации. Рассмотрим некоторое множество A векторнозначных функций γ переменной t, $\gamma(t)=\{\gamma_0(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\}$. Вектор-функция $\gamma(t)$ из множества A называется *траекторией*, каждая траектория описывает один из возможных вариантов развития системы. Будем предполагать, что все траектории $\gamma(t)$ — гладкие функции с конечным числом точек разрыва. В точке t_0 разрыва траектории $\gamma(t)$ будем рассматривать два вектора

$$\gamma^+(t_0)=\lim_{t\to t_0^+}\gamma(t) \text{ и } \gamma^-(t_0)=\lim_{t\to t_0^-}\gamma(t).$$

Компонента $\gamma_0(t)$ траектории $\gamma(t)$ играет особую роль. Предполагается, что $\gamma_0(t)$ — непрерывная функция, причем $\gamma_0(t)\leqslant t$. Отрезок $[\gamma_0(t), t]$ будем называть «*отрезком влияния*» траектории $\gamma(t)$ в момент времени t.

Пусть на траекториях задан целевой функционал $F_\gamma(t)$, зависящий от траектории γ и времени t. Относительно функционала F предполагаются выполненными следующие условия:

а) если траектория $\tilde{\gamma}$ совпадает с траекторией γ на ее отрезке влияния $[\gamma_0(t), t]$ в момент времени t, то $F_{\tilde{\gamma}}(t) = F_{\gamma}(t)$. Условие а) означает, что функционал F не зависит от будущего развития системы; и вполне определяется ее предысторией.

б) для любой траектории γ функция времени $F_{\gamma}(t)$ имеет правую производную $F_{\gamma}'^{+}(t)$.

Определение 1. Траектория γ называется *дифференциально оптимальной в точке* t_0 относительно функционала F, если для любой другой траектории $\tilde{\gamma}$ такой, что $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)$ при $\gamma(t_0) \leqslant t \leqslant t_0$, выполнено условие:

$$F_{\gamma}'^{+}(t_0) \geqslant F_{\tilde{\gamma}}'^{+}(t).$$

Определение 2. Траектория $\gamma(t)$ называется *дифференциально-оптимальной на отрезке* $[a, b]$ относительно функционала F, если она дифференциально оптимальна в каждой точке этого отрезка $[a, b]$. Будем говорить, что дифференциально оптимальные траектории удовлетворяют критерию дифференциальной оптимизации.

Образно говоря, дифференциально оптимальная траектория все время движется в сторону наибольшего роста функционала F. Приведем теперь один наглядный геометрический пример.

Пример. В качестве траектории $\gamma(t)$ рассмотрим траектории с отрезком влиянии нулевой длины ($\gamma_0(t) = t$), которые задают непрерывное кусочно-гладкое движение точки $x(t)$ в n-мерном пространстве R^n, $\gamma(t) = (t, x(t))$, $x(t) = x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, со скоростью, не превосходящей единицы, т. е.

$$\|x'(t)\| = \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \ldots + x_n'^2(t)} \leqslant 1.$$

Пусть целевой функционал $F_{\gamma}(t)$ есть значение гладкой функции $G(x)$ в точке $x(t)$. Траектория $\gamma(t) = \{t, x(t)\}$ будет в этом примере дифференциально оптимальной, если точка $x(t)$ «поднимается по градиенту» функции G со скоростью 1, т. е. если

$$x'(t) = \frac{\operatorname{grad} G(t)}{\|\operatorname{grad} G(t)\|}.$$

Действительно, имеем $F_{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt} G(x(t)) = \langle \operatorname{grad} G, x' \rangle$. Для траектории $x(t)$ выполнено $\|x'(t)\| \leqslant 1$, поэтому скалярное произведение $\langle \operatorname{grad} G, x' \rangle$ будет наибольшим, если вектор $x'(t)$ коллинеарен вектору $\operatorname{grad} G$ и равен по длине единице.

Помимо дифференциально оптимальных траекторий движения системы можно рассматривать и такие траектории, на которых достигается максимум целевого функционала в концах временных интервалов фиксированной длины a (a — длина периода планирования). Так, скажем, что траектория $\gamma(t)$ оптимальна с плановым периодом длины a (и началом отсчета t_0), если для любого натурального n и любой траектории $\tilde{\gamma}(t)$ такой, что $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + (n-1)a$, выполнено неравенство $F(\gamma(t), t_0, na) \geqslant F(\tilde{\gamma}(t), t_0, na)$. Естественно ожидать, что при длине периода a, стремящейся к нулю, оптимальная траектория с плановым периодом a будет стремиться к дифференциально оптимальной. Так, в рамках геометрического примера нужно сделать лишь незначительные ограничения на целевую функцию G, чтобы это утверждение стало справедливым. Условия дифференциальной оптимальности часто оказываются значительно более простыми и естественными, чем условия оптимальности с плановым периодом конечной длины.

Описание модели. В экономической системе, производящей один продукт (односекторная модель), выделяются два главных производственных фактора — производственные фонды (овеществленный капитал), дифференцированные по моментам их создания и измеряемые в единицах продукта, и трудовые ресурсы, измеряемые количеством трудовых единиц.

Пусть $T(t)$ — ресурсы труда в момент времени t (заданная функция). Предполагается, что в любой момент времени t эффективность производства характеризуется производственной функцией $U(x, y, \tau)$, которая выражает количество чистого продукта, создаваемого трудом y (в единицу времени) при использовании производственных фондов (созданных в момент τ) объема x единиц продукта ($\tau \leqslant t$). Предполагается монотонное возрастание функции U по аргументу τ, что отражает увеличение эффективности более новых фондов под действием технического прогресса. Такой учет технического прогресса в моделях получил название «овеществленный технический прогресс» ([1-4]). Предполагается, что функция U положительно однородная и выпуклая по первым двум аргументам. Первое предположение отражает отсутствие эффекта масштаба производства, а второе — тот факт, что функция U базируется на оптимальных способах производства.

Капиталовложения, идущие на увеличение фондов и замену выбывающих фондов, задаются через интенсивность их ввода $\varkappa(t)$, т. е. предполагается, что объем фондов, введенных в производство во временном интервале $[t, t+dt]$, равен $\varkappa(t)dt$. Относительно функции $\varkappa(t)$ в различных модификациях (вариантах) модели делаются различные предположения: функция $\varkappa(t)$ либо предполагается экзогенной переменной модели, т. е. заданной априори, либо предполагается, что она составляет постоянную часть производимого в момент t чистого продукта (более общим образом можно предполагать, что функция $\varkappa(t)$ определяется предыдущим развитием экономики).

Количество трудовых ресурсов, занятых на вновь открывающихся фондах, определяется интенсивностью их ввода $\varphi(t)$, т. е. предполагается, что трудовые ресурсы, введенные во временном интервале $[t, t+dt]$, равняются $\varphi(t)dt$ единицам. Функция $\varphi(t)$ в модели подлежит нахождению (эндогенная переменная модели).

В модели предполагается, что технический прогресс и рост фондовооруженности приводят к непрерывному увеличению производительности труда на вновь создаваемых фондах. В результате наименее эффективные фонды непрерывно выводятся из производства (и в дальнейшем не используются), а высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на вновь создаваемые фонды. В предположении монотонного возрастания производительности труда в первую очередь из производства будут выводиться наиболее старые фонды (имеющие самый ранний период создания среди фондов, участвующих в процессе производства на момент t), поэтому политика вывода фондов в модели характеризуется функцией $m(t)$, выражающей момент создания фондов, выводимых из производства в момент времени t ($m(t) < t$). Функцию $m(t)$ надо найти.

Количество чистого продукта, производимого на фондах, участвующих в производстве в момент времени t (в единицу времени),— национальный доход — в модели подсчитывается по следующей формуле

$$P(t) = \int_{m(t)}^{t} U(\varkappa(\tau), \varphi(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Выпишем балансовые уравнения, которым подчинены переменные модели.

Уравнение баланса трудовых ресурсов: $\int\limits_{m(t)}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau = T(t)$. В условиях полной занятости количество трудовых единиц $\int\limits_{m(t)}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau$, занятых на фондах, имеющихся в момент t, равно численности трудоспособного населения $T(t)$. Это соотношение можно записать в дифференциальной форме

$$\varphi(t) = T'(t) + \varphi(m(t))\,m'(t), \tag{2}$$

в которой это уравнение тоже имеет простой экономический смысл: трудовые ресурсы, связанные с вновь созданными в интервале $[t, t+dt]$ фондами, складываются из естественного прироста трудовых ресурсов — $dT(t)$ и трудовых единиц, снятых с выводимых в интервале $[m(t), m(t+dt)]$ фондов — $\varphi[m(t)]dm(t)$ единиц.

Уравнение баланса по фондам. Это уравнение возникает в варианте модели, в котором $\varkappa(t)$ равна постоянной части национального дохода $\varkappa(t) = \gamma P(t)$ $(0<\gamma<1$ — постоянная норма накопления). Пользуясь формулой (1), получаем

$$\varkappa(t) = \gamma \int\limits_{m(t)}^{t} U[\varkappa(\tau),\ \varphi(\tau),\ \tau]\,d\tau. \tag{3}$$

Кроме балансовых уравнений, переменные модели подчинены уравнению дифференциальной оптимизации. Это уравнение отражает принятый в модели критерий оптимизации, согласно которому политика вывода морально устаревших фондов является оптимальной, если она обеспечивает максимальный темп роста национального дохода. Этот критерий состоит в максимизации некоторого функционала (национального дохода) на бесконечно малом (инфинитезимальном) интервале. В предыдущем пункте мы рассмотрели математическую задачу отыскания дифференциально-оптимальных траекторий развития системы (принцип дифференциальной оптимизации) и теперь, пользуясь введенными в этом пункте понятиями, приведем вывод уравнения дифференциальной оптимизации для рассматриваемой экономической модели.

В рассматриваемой экономической модели траекториями являются пары функций $\gamma(t) = \{m(t), \varphi(t)\}$, подчиненные уравнению (2) (для варианта модели, в котором функция $\varkappa(t)$ является экзогенной переменной), и тройки функций $\gamma(t) = \{m(t), \varphi(t), \varkappa(t)\}$, подчиненные уравнениям (2), (3) (для варианта модели, в котором функция $\varkappa(t)$ равна постоянной части национального дохода). Такие траектории задают сбалансированное (по трудовым ресурсам и фондам) развитие экономики. Отрезком влияния для рассматриваемых траекторий развития экономической системы будет временной отрезок $[m(t), t]$ — фонды, созданные в этом периоде, участвуют в производстве в момент t. Функция $\varphi(t)$ предполагается разрывной кусочно-гладкой функцией, а функции $m(t)$ и $\varkappa(t)$ предполагаются непрерывными кусочно-гладкими функциями. На траекториях рассматривается функционал $P_\gamma(t)$, вычисляемый по формуле (1) — формула для исчисления в модели национального дохода в момент времени t.

Посмотрим, к какому уравнению приводит принцип дифференциальной оптимизации с функционалом $P_\gamma(t)$. Разберем сначала вариант модели, в котором функция $\varkappa(t)$ задана экзогенно. Вычислим правую производную $P_\gamma'^+(t)$ для траектории $\gamma(t)=\{m(t), \varphi(t)\}$ в произвольной точке t_0:

$$P_\gamma'^+(t_0)=U[\varkappa(t_0), \varphi(t_0), t_0]-U[\varkappa(m(t_0)), \varphi(m(t_0)), m(t_0)]\,m'(t_0).$$

Если траектории совпадают до момента t_0, то для них величины $\varkappa(m(t_0))$, $\varphi(m(t_0))$ и $m(t_0)$ одинаковы. Для функций $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$ это вытекает из того, что $m(t_0)<t_0$, а для функции $m(t)$ — из ее непрерывности. Баланс по трудовым ресурсам (уравнение (2)) связывает $\varphi^+(t_0)$ и $m'^+(t_0)$. Воспользовавшись этой связью, $P_\gamma'^+(t_0)$ можно считать функцией единственности аргумента m'^+:

$$P_\gamma'^+(t_0)=U[\varkappa(t_0), T'(t_0)+\varphi(m(t_0))\,m'^+(t_0)]-$$
$$-U[\varkappa(m(t_0)), \varphi(m(t_0)), m(t_0)]\,m'(t_0). \tag{4}$$

Из равенства (4) видим, что функция $P_\gamma'^+$ выпукла по m'^+. Поэтому максимум функции $P_\gamma'^+$ достигается в точке, в которой производная обращается в нуль. Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\,(P_\gamma'^+)}{dm'^+}=\frac{\partial U(\varkappa(t), \varphi^+(t), t)}{\partial\varphi}\,\varphi(m(t))-U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]=0.$$

Итак, **уравнение дифференциональной оптимизации** имеет вид:

$$\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi^+(t), t]}{\partial\varphi}=\frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi[m(t)]}. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем интересоваться только непрерывными решениями. Для таких решений $\varphi^+(t)=\varphi(t)$ и знак перехода к правому пределу можно опустить. Для производственной функции типа Кобба — Дугласа $U(\varkappa(t), \varphi(t), t)=f(t)\varkappa^\alpha(t)\varphi^\beta(t)$, $\alpha+\beta=1$ (здесь экзогенно заданная функция $f(t)$ моделирует технический прогресс, воплощенный в фондах периода t) уравнение дифференциальной оптимизации имеет следующий вид:

$$\beta f(t)\varkappa^\alpha(t)\varphi^{-\alpha}(t)=f(m(t))\varkappa^\alpha(m(t))\varphi^{-\alpha}(m(t)).$$

В варианте модели с эндогенно заданной функцией $\varkappa$ ($\varkappa(t)=\gamma P(t)$) принцип дифференциальной оптимизации приводит также к уравнению (5). Действительно, в рассматриваемом случае величина $P_\gamma'^+$ на траектории $\gamma(t)=\{\varkappa(t), \varphi(t), m(t)\}$ будет задаваться формулой:

$$P_\gamma'^+=U[\varkappa^+(t), \varphi^+(t), t]-U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]\,m'^+(t).$$

Функция $\varkappa$ непрерывно зависит от времени, как это видно из уравнения (3). Следовательно, число $\varkappa^+(t_0)=\varkappa(t_0)$ одинаково для всех траекторий, совпадающих при $t<t_0$, и не может варьироваться. Мы приходим к той же экстремальной задаче и к прежнему уравнению дифференциальной оптимизации.

Обратимся к экономическому смыслу уравнения дифференциальной оптимизации. В левой части равенства (5) стоит предельная производительность труда в момент времени $m(t)$ или, другими словами, норма эффективности по одному из производственных факторов — трудовым ресурсам. Правая часть равенства (5) есть производительность труда на фондах, созданных в момент времени t. При дифференциально оптимальном развитии экономики эти величины должны быть равны в силу следующих качественных соображений. Рассмотрим, как влияет на производство продукции перевод малого количества единиц труда (обозначим его через ΔT) с фондов, созданных в момент времени $m(t)$ (выбывающих из производства в момент времени t), на фонды, созданные в момент времени t. На фондах времени t будет произведено дополнительно $\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi}\Delta T$ единиц продукта, и при этом на фондах, созданных в момент $m(t)$, производство уменьшится на $\frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi[m(t)]}\Delta T$ единиц продукта. Если потери превысят дополнительное производство, т. е. $\frac{(\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi}\Delta T < \frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi[m(t)]}\Delta T$, то перевод трудовых ресурсов на более современные фонды экономически необоснован. Если же перевод малого количества трудовых ресурсов на более современные фонды позволяет увеличить суммарное производство продукции в момент времени t, т. е. $\frac{(\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial\varphi}\Delta T < \frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi[m(t)]}\Delta T$, то рассматриваемая политика закрытия морально устаревших фондов не является дифференциально оптимальной. Следовательно, дифференциально оптимальное развитие экономики требует равенства предельной производительности труда на вновь создаваемых фондах и на морально устаревших (наименее экономичных) к этому моменту фондах. Соответствующее уравнение и есть уравнение (5), выведенное математически из принципа дифференциальной оптимизации.

О системе уравнений модели. Пусть в момент времени t_0 нам известны все параметры модели. Задача заключается в вычислении ее дальнейшего поведения. Остановимся сначала на более сложном варианте модели, в котором плотность ввода капиталовложений составляет постоянную часть национального дохода.

В момент времени t_0 в производстве участвуют фонды, созданные в течение временного интервала $m(t_0) \leqslant t \leqslant t_0$. Поэтому информация о начальном состоянии экономики подразумевает наличие следующих данных:

а) чисел t_0 и $m(t_0)$ (причем $m(t_0) < t_0$);

б) функций $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$, заданных на отрезке $m(t_0) \leqslant t \leqslant t_0$.

При этом для начальных данных должно выполняться условие согласования:

$$\text{в)}\quad \frac{U[\varkappa(m(t_0)), \varphi(m(t_0)), m(t_0)]}{\varphi(m(t_0))} = \frac{\partial U[\varkappa(t_0), \varphi(t_0), t_0]}{\partial\varphi(t_0)},$$

которое означает, что уравнение дифференциальной оптимизации выполняется в начальный момент времени t_0.

Уравнения модели в дифференциальной форме имеют вид:

$$\varphi(t) - \varphi(m(t)) = T'(t), \tag{i}$$

$$\varkappa'(t) = \gamma[U(\varkappa(t), \varphi(t), t)] - U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]m'(t), \tag{ii}$$

$$\frac{U(\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t))}{\varphi(m(t))} = \frac{\partial U(\varkappa(t), \varphi(t), t)}{\partial\varphi(t)}. \tag{iii}$$

Рассмотрим более общую систему

$$m'(t)=\Phi_1[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varphi(t),\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))],\tag{6}$$

$$\varkappa'(t)=\Phi_2[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varphi(t),\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))],\tag{7}$$

$$\varphi(t)=\Phi_3[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))],\tag{8}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 — известные функции. Чтобы исходную систему привести к такому виду, нужно уравнение (i) разрешить оптимально $m'(t)$ и подставить найденное выражение для $m'(t)$ в правую часть уравнения (ii). Затем надо разрешить уравнение (iii) относительно $\varphi(t)$. Рассмотрим решение системы уравнений (6) — (8) со следующими начальными данными:

1) даны числа t_0 и $m(t_0)$ (причем $m(t_0)<t_0$);

2) даны функции $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$, заданные на отрезке $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$.

При этом будем предполагать выполненными условия согласования

3) $\varphi(t_0)=\Phi_3[\varkappa(t_0),\ m(t_0),\ t_0,\ \varkappa(m(t_0)),\ \varphi(m(t_0))]$.

Систему уравнений (6) — (8) с начальными данными 1)—3) можно решать следующим образом: подставим выражение для $\varphi(t)$ из уравнения (8) в правые части уравнений (6), (7). Получим уравнения вида

$$m'(t)=G_1[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))],\tag{9}$$

$$\varkappa'(t)=G_2[\varkappa(t),\ m(t),\ t,\ \varkappa(m(t)),\ \varphi(m(t))].\tag{10}$$

Если значения функции $m(t)$ заключены на отрезке $[m(t_0),\ t_0]$, т. е. если $m(t_0)\leqslant m(t)\leqslant t_0$, то функции $\varkappa(m(t))$ и $\varphi(m(t))$ известны из начальных данных. Поэтому система (9) — (10) в этих предположениях является системой обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $m(t)$ и $\varkappa(t)$ (с начальными данными $m(t_0)$ и $\varkappa(t_0)$). Будем предполагать, что для решения системы (9) — (10) функция $m(t)$ монотонно возрастает (такая предпосылка была сделана при моделировании). До тех пор, пока $m(t)$ будет оставаться меньше t_0, определены правые части системы (9) — (10). Эту систему можно решать на ЭВМ (приближенными методами) до критического момента t_1, при котором $m(t_1)=t_0$. После этого нам станут известны функции $m(t)$ и $\varkappa(t)$ на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Уравнение (8) даст теперь возможность найти функцию $\varphi(t)$ на этом отрезке. Итак, функции $\varkappa(t)$ и $\varphi(t)$ теперь уже известны на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Подставляя их в правые части системы (9) — (10), получим новую систему дифференциальных уравнений для $m(t)$, $\varkappa(t)$ на участке $t_0\leqslant m(t)\leqslant t_1$. Она будет определена до критического момента t_2, для которого $m(t_2)=t_1$. Повторяя эту конструкцию, мы будем последовательно вычислять неизвестные функции на отрезке $[t_2,\ t_3]$, где $m(t_3)=t_2$, и на отрезке $[t_3,\ t_4]$, где $m(t_4)=t_3$, и так далее.

Вариант модели, для которого функция $\varkappa(t)$ задана экзогенно, приводит к аналогичной, но более простой системе уравнений. Начальными данными здесь служат:

а) числа t_0 и $m(t_0)$ (причем $m(t_0)<t_0$);

б) функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[m(t_0),\ t_0]$.

Для начальных данных также должно быть выполнено условие согласования 3).

Приведенных соображений достаточно для решения системы уравнений на ЭВМ. Отметим, что этим способом можно решать и аналогичную систему уравнений для вектор-функций $\varkappa(t)$, $\varphi(t)$, т. е. систему, в которой $\vec{\varkappa}(t)=\varkappa_1(t),\ \ldots,\ \varkappa_k(t)$ есть k-мерная вектор-функция, $\vec{\varphi}(t)=\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ — n-мерная вектор-функция и уравнения (7), (8) тоже векторные:

$$\vec{\varkappa}'(t)=\vec{\Phi}_2(\vec{\varkappa}(t), \vec{m}(t), \ldots),$$
$$\vec{\varphi}(t)=\vec{\Phi}_3(\vec{\varkappa}(t), \vec{m}(t), \ldots).$$

Более общим образом можно рассмотреть систему, в которой $\vec{m}(t)=m_1(t), \ldots, m_N(t)$ тоже вектор-функция. Правые части уравнений при этом можно рассматривать зависящими от значений $\vec{\varkappa}(t)$, $\vec{\varphi}(t)$ в точках t, $m_1(t)$, ..., $m_N(t)$.

Исследование подобных систем достаточно трудно. Отметим, что теория уравнений с отклоняющимся аргументом рассматривает подобные системы, но в ней функции отклонения $m_1(t), \ldots, m_N(t)$ предполагаются заданными (а не находятся из уравнений, как в рассматриваемой нами системе). Рассмотренный метод решения аналогичен методу шагов в теории уравнений с отклоняющимся аргументом. По-видимому, системы с неизвестным отклонением ранее не рассматривались.

Вариант экзогенных капиталовложений и постоянных трудовых ресурсов. В данном пункте будет получено явное решение системы уравнений модели при следующих предположениях:

1) производственная функция $U(\varkappa, \varphi, t)$ является функцией Кобба — Дугласа, т. е. $U(\varkappa, \varphi, t)=f(t)\varkappa^\alpha\varphi^\beta$, $\alpha+\beta=1$;

2) трудовые ресурсы не меняются со временем, $T(t)=\mathrm{const}=T_0$;

3) функция $\varkappa(t)$ задана на полуоси $[t_0, \infty\rangle$ (она предполагается положительной и непрерывной).

Нам будет удобно пользоваться функцией $\Pi(t)$ равной производительности труда на фондах, созданных в момент t. Для $\Pi(t)$, очевидно, справедлива формула $\Pi(t)=\frac{U(\varkappa(t), \varphi(t), t)}{\varphi(t)}$. При сделанных предположениях эта формула принимает вид $\Pi(t)=f(t)\varkappa^\alpha(t)\varphi^{-\alpha}(t)$. Перепишем систему уравнений (2), (5) для рассматриваемого в этом пункте варианта модели:

$$\varphi(t)=\varphi(m(t))m'(t), \tag{11}$$

$$f(m(t))\varkappa^\alpha(m(t))\varphi^{-\alpha}(m(t))=\beta f(t)\varkappa^\alpha(t)\varphi^{-\alpha}(t). \tag{12}$$

В наших обозначениях уравнение (12) можно записать в виде

$$\Pi(m(t))=\beta\Pi(t). \tag{13}$$

Начальными данными в рассматриваемом варианте модели служат: начальный отрезок $[m(t_0), t_0]$ («отрезок влияния») и функция $\varphi(t)$, заданная на этом начальном отрезке.

Утверждение. *Пусть начальные данные таковы, что функция $\Pi(t)$ непрерывна и монотонно возрастает на начальном отрезке $[m(t_0), t_0]$. Пусть для начальных данных выполнено условие согласования $\Pi(m(t_0))=\beta\Pi(t_0)$. При таких начальных данных существует единственное решение системы уравнений (11), (12). Это решение определено на луче $[t_0, \infty\rangle$. Для этого решения функция $\Pi(t)$ монотонно возрастает и функция $\varphi(t)$ положительная. Функция $m(t)$ монотонно возрастает и при любом t остается меньшей t $(m(t)<t)$. Функция $m(t)$ может быть найдена из уравнения*

$$\int_{m(t_0)}^{m(t)} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau=\beta^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_0}^{t} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Допустим, что функции $\varphi(t)$, $m(t)$ удовлетворяют системе (11, (12) и начальным условиям.Возведя обе части уравнения (12) в степень $1/\alpha$, получим

$$f^{1/\alpha}(m(t))\varkappa(m(t))\varphi^{-1}(m(t))=\beta^{1/\alpha}f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)\varphi^{-1}(t).$$

Умножив это уравнение на уравнение (11), получим

$$f^{1/\alpha}(m(t))\varkappa(m(t))m'(t)=\beta^{1/\alpha}f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t). \tag{14}$$

Уравнение (14) — дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для определения $m(t)$. Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\int\limits_{m(t_0)}^{m(t)} f^{1/\alpha}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau=\beta^{1/\alpha}\int\limits_{t_0}^{t} f^{1/\alpha}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Несложно видеть, что уравнение (15) имеет монотонно возрастающее решение $m(t)$, определенное на полуоси $[t_0, \infty\rangle$. Из положительности функции $f^{1/\alpha}(\tau)\varkappa(\tau)$ и из неравенства $0<\beta<1$ автоматически вытекает неравенство $m(t)<t$.

Пусть $m(t)$ — решение уравнения (15). Для нахождения функций $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$ остаются уравнения (11) и (13). Покажем, что эти уравнения дают возможность однозначно определить функции $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$. Действительно, рассмотрим временной отрезок $[t_0, T]$ (T — произвольное число, большее t_0). Как показано выше, функция $t-m(t)$ положительна, поэтому на отрезке $[t_0, T]$ она превосходит некоторую положительную константу ε. Критические точки $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ определяются рекуррентно равенствами $m(t_1)=t_0, \ldots, m(t_k)=t_{k-1}, \ldots$. Так как функция $t-m(t)>\varepsilon$, то критические точки $t_1, t_2, \ldots$ не накапливаются на отрезке $[t_0, T]$ и, значит, при некотором N будет выполнено неравенство $t_{N+1}>T$. Обозначим через I_k отрезок $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$ и через I_0 — начальный отрезок $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$. Видно, что если $t\in I_k$, то $m(t)\in I_{k-1}$, и если $t\in I_1$, то $m(t)\in I_0$. Поэтому уравнения (11) и (12) дают возможность рекуррентно определить функции $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$ сначала на отрезке I_1, затем на I_2 и т. д. Так как на начальном отрезке I_0 по условию функция $\varphi(t)$ положительна и функция $\Pi(t)$ монотонно возрастает, то рекуррентно определенные функции $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$ обладают, очевидно, теми же свойствами. Утверждение доказано.

В разобранном варианте естественные предпосылки моделирования (монотонный рост производительности труда на фондах периода t, неравенство $\varphi(t)>0$, монотонный рост функции $m(t)$ и неравенство $m(t)<t$) автоматически выполняются для решения, если они выполнены на начальном интервале. Далее, бросается в глаза устойчивость функции $m(t)$ относительно изменения начальных данных. В частности, функция $m(t)$ в рассматриваемом варианте вообще не зависит от распределения трудовых ресурсов по фондам различных моментов создания на начальном интервале (от функции $\varphi(t)$ при $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$). При быстро растущей функции $f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)$ функция $m(t)$ быстро выходит на режим, не зависящий от длительности начального периода. В самом деле, уравнение для $m(t)$ (при больших t) можно записать в виде

$$\int\limits_{m(t_0)}^{t_0} f^{1/\alpha}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{m(t)} f^{1/\alpha}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau=$$

$$=\beta^{1/\alpha}\int\limits_{t_0}^{t} f^{1/\alpha}(\tau)\,d\tau.$$

От начального данного $m(t_0)$, которое задает длительность «отрезка влияния» $[m(t_0),\ t_0]$, зависит только первый член $\int\limits_{m(t_0)}^{t_0} f^{1/\alpha}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau$, который при больших t мал по сравнению с остальными.

Отметим, что устойчивость функции $m(t)$ относительно смены начальных данных сначала была обнаружена в численных экспериментах (приближенное решение системы уравнений модели на ЭВМ для различных вариантов). Эти эксперименты указывают на высокую устойчивость функции $m(t)$ и в других вариантах модели (в случае экспоненциального роста трудовых ресурсов и в случае эндогенного характера функции $\varkappa(t)$).

Остановимся теперь на асимптотическом поведении решений модели при $t\to\infty$. Как уже отмечалось, асимптотическое поведение функции $m(t)$ зависит прежде всего от поведения функции $f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)$ при $t\to\infty$. Можно показать, что если функция $f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)$ имеет степенной рост, то функция $m(t)$ будет приближаться к линейной: $m(t)\approx at+b$, $a<1$. Более интересен случай функции $f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)$ экспоненциального вида, т. е. случай $f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)=Ce^{\rho t}$. Остановимся на нем подробнее. В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\int\limits_{m(t_0)}^{m(t)} Ce^{\rho\tau}\,d\tau = \beta^{1/\alpha}\int\limits_{t_0}^{t} Ce^{\rho\tau}\,d\tau$$

или

$$e^{\rho m(t)} - e^{\rho m(t_0)} = \beta^{1/\alpha}\left(e^{\rho t} - e^{\rho t_0}\right), \tag{16}$$

откуда

$$m(t) = \frac{1}{\rho\alpha}\ln\beta + \frac{1}{\rho}\ln\left[e^{\rho t} + \beta^{-1/\alpha}e^{\rho m(t_0)} - e^{\rho t_0}\right].$$

Положим $A=-\frac{1}{\rho\alpha}\ln\beta$ (число A положительно, так как $\ln\beta<0$) и $B=\beta^{-1/\alpha}e^{\rho m(t_0)}-e^{\rho t_0}$. Тогда $m(t)=\frac{1}{\rho}\ln[e^{\rho t}+B]-A$. Особенно простой вид функции $m(t)$ будет иметь, если $B=\beta^{-1/\alpha}e^{\rho m(t_0)}-e^{\rho t_0}$ равно нулю. В этом случае $m(t)=t-A$. Для функции $\varphi(t)$ получаем уравнение $\varphi(t)=\varphi(t-A)$, которое просто показывает, что функция $\varphi(t)$ продолжается с начального отрезка I_0 как периодическая функция. Покажем, что и при $B\neq0$ система имеет аналогичное поведение при $t\to\infty$. Перепишем формулу для $m(t)$ в виде $m(t)=t-A+\frac{1}{\rho}\ln[1+Be^{-\rho t}]$. С ростом t слагаемое $Be^{-\rho t}$ становится малым и функция $m(t)$ быстро выходит на стационарный режим

$$m(t)\approx t-A,\ A=-\frac{1}{\rho\alpha}\ln\beta.$$

Посмотрим теперь поведение функции $\varphi(t)$. При больших t уравнение $\varphi(t)=\varphi(m(t))m'(t)$ все точнее и точнее совпадает с уравнением $\varphi(t)=\varphi(t-A)$, поэтому естественно ожидать, что функция $\varphi(t)$ с течением времени выходит на периодический режим (периода A).

Проведем выкладку, доказывающую это утверждение и позволяющую вычислить предельную периодическую функцию через первоначально заданную $\varphi(t)$ при $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$. Функция $m(t)$ отображает отрезок

I_k в I_{k-1}, в частности, I_1 в I_0. Обратная функция $t(m)$ будет осуществлять обратное отображение, а ее k-я итерация $\underbrace{t(t(\ldots(t(m))\ldots))}_{k \text{ раз}}=t_{(k)}(m)$ будет, в частности, осуществлять интересующее нас отображение начального отрезка I_0 в k-ый отрезок I_k.

Из равенства (16), рассматривая t как функцию m, получаем $e^{\rho t(m)}=$ $=qe^{\rho m}+p$, где $q=\beta^{-1/\alpha}$ и $p=q\,(e^{\rho t_0}-e^{\rho m(t_0)})$. Подставляя в это равенство вместо m функцию $t(m)$, получим

$$e^{\rho t_{(2)}(m)}=e^{\rho t(t(m))}=qe^{\rho t(m)}+p=q^2e^{\rho m}+qp+p.$$

Проведя такую подстановку k раз, получим

$$e^{\rho t_{(k)}(m)}=q^ke^{\rho m}+\left(q^{k-1}+q^{k-2}+\ldots+1\right)p=q^k\left(e^{\rho m}+\frac{1-1/q^k}{1-q}\,p\right).$$

Отсюда мы имеем явную формулу для k-й итерации функции $t(m)$:

$$t_{(k)}(m)=kA+\frac{1}{\rho}\ln\left[e^{\rho m}+\frac{1-1/q^k}{1-q}\,p\right].$$

При больших k получим $t_{(k)}(m)\approx kA+\dfrac{1}{\rho}\ln\left[e^{\rho m}+\dfrac{p}{1-q}\right]$. Далее, обращая равенства $\varphi(t)=\varphi(m(t))m'(t)$ и $\beta\Pi(t)=\Pi(m(t))$ и делая k итераций, приходим к равенствам

$$\begin{cases}\varphi\left(t_{(k)}(m)\right)\cdot t'_{(k)}(m)=\varphi(m),\\ \beta^k\Pi\left(t_{(k)}(m)\right)=\Pi(m).\end{cases}$$

Эти формулы вместе с явной и асимптотической формулой для $t_{(k)}(m)$ дают возможность получить явные и асимптотические формулы для $\varphi(t_{(k)}(m))$ и $\Pi(t_{(k)}(m))$. Из асимптотической формулы несложно видеть, что функция $\varphi(t)$ при больших t действительно выходит на периодический режим, который можно указать явно.

Экспоненциальные решения. В предыдущем пункте трудовые ресурсы предполагались постоянными. Более реалистическим является предположение об экспоненциальном росте трудовых ресурсов. Пусть $T(t)=T_0e^{pt}$ и $f^{1/\alpha}(t)\varkappa(t)=Ge^{\rho t}$ (здесь T_0, p, G и ρ — заданные константы). В этом варианте уравнения модели не поддаются такому же полному исследованию, однако характерные экспоненциальные решения можно найти и здесь. Именно: несложно проверить, что системе уравнений модели удовлетворяют функции: $\varphi(t)=\varphi_0e^{pt}$ и $m(t)=t-A$, где

$$\varphi_0=\frac{pT_0}{1-e^{-A\beta}} \text{ и } A=-\frac{\ln\beta}{\rho-p}.$$

Обратимся теперь к варианту модели, в котором капиталовложения составляют постоянную часть национального дохода, т. е. в котором $\varkappa(t)=\gamma\int\limits_{m(t)}^{t}U(\varkappa(\tau),\ \varphi(\tau),\ \tau)\,d\tau$. Будем считать, что $U(\varkappa,\ \varphi,\ \tau)$ — производственная функция Кобба — Дугласа $U(\varkappa(t),\ \varphi(t),\ t)=e^{\delta t}\varkappa^\alpha(t)\varphi^\beta(t)$ и что $T(t)=T_0e^{pt}$. Характерные экспоненциальные решения есть и в этом варианте. Существует (единственный) набор параметров φ_0, l, $\varkappa_0$, μ и A такой, что функции $\varphi(t)=\varphi_0e^{lt}$, $\varkappa(t)=\varkappa_0e^{\mu t}$ и $m(t)=t-A$ удовлетворяют системе уравнений модели. В этом наборе $l=p$, а вид функции $m(t)=t-A$ следует из экспоненциального вида функций $\varphi(t)$ и $\varkappa(t)$. Выпишем найденное экспоненциальное решение:

$$m(t)=t-A,\qquad A=\frac{-\beta\ln\beta}{\delta};$$

$$\varphi(t)=\varphi_0 e^{pt},\qquad \varphi_0=\frac{pT_0}{1-\beta^{p\beta/\delta}};$$

$$\varkappa(t)=\varkappa_0 e^{(p+\delta/\beta)t},\qquad \varkappa_0=\gamma^{1/\beta}\varphi_0\left[\frac{1-\beta^{1+p\beta/\delta}}{p+\delta/\beta}\right]^{1/\beta}.$$

Для этого решения величина A показывает срок морального износа фондов, который не зависит от момента создания фондов и обратно пропорционален коэффициенту δ (коэффициент, характеризующий темп научно-технического прогресса).

Найденное экспоненциальное решение позволяет получить аналитические выражения (в рамках рассматриваемой модификации экономической модели) для важнейших макроэкономических характеристик: национального дохода, норматива эффективности капиталовложений. Формулы, которые получаются для исчисления названных экономических характеристик, дают возможность оценить влияние технического прогресса и других параметров модели на эти экономические характеристики.

Поступила в редакцию
2 марта 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Горьков Л. И.* Функциональные уравнения однопродуктовой модели.— Докл. АН СССР, 1959, 129, № 4, с. 732.
2. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая структуру фондов при наличии технического прогресса.— Докл. АН СССР, 1973, 211, № 6, с. 1280.
3. *Solow R.* Investment and Technical Progress.— In: Mathematical Methods in the Social Scienses. Ed. by Arrow K. J. et al. Standford, 1960, p. 89.
4. *Johansen L.* Substitution versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Crowth: A Synthesis.— Econometrica, 1959, 27, p. 157.