А. Ю. Александров, А. А. Косов, Об устойчивости и стабилизации механических систем с нелинейными поглотителями энергии, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, 2011, выпуск 1, 106–115

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 531.36

А. Ю. Александров, А. А. Косов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПОГЛОТИТЕЛЯМИ ЭНЕРГИИ*)

1. Введение. За последнее десятилетие в работах многих авторов (см. обзор [1]) получил интенсивное развитие и продолжает совершенствоваться в настоящее время [2] подход к анализу и синтезу динамических свойств механических систем, основанный на явлении направленной перекачки энергии. Идея этого подхода заключается в следующем. В механической системе выделяется основная часть, первичная структура (Primary Structure – PS) и вспомогательная часть, нелинейный поглотитель энергии (Nonlinear Energy Sink – NES), взаимодействие между которыми осуществляется посредством нелинейных сил. Уравнения движения PS линеаризуются в окрестности изучаемого положения равновесия, тогда как уравнения для NES будут существенно нелинейными. Действующие на PS возмущения (гармонические, случайные и т. д.) приведут к возникновению вынужденных колебаний, которые через нелинейную взаимосвязь передаются в NES, где подавляются за счет рассеивания энергии на демпфирующих устройствах. Нелинейный характер взаимосвязи используется целенаправленно для того, чтобы гарантировать более интенсивную перекачку энергии колебаний в NES, что приведет в конечном итоге к уменьшению амплитуды вынужденных колебаний в PS. Как отмечается в [2], именно на этих принципах строятся системы защиты современных зданий от землетрясений.

Известно [3], что явление конвергенции, т. е. установление вынужденных колебаний, реализуется в системах с асимптотически устойчивым положением равновесия. Поэтому для успешного применения пассивного управления, основанного на перекачке энергии и использовании NES, требуется обосновать асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы. В [1, 2] рассматриваются механические

Александров Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 102. Научные направления: качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости. E-mail: alex@vrm.apmath.spbu.ru.

Косов Александр Аркадьевич – ведущий научный сотрудник Института динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН. Количество опубликованных работ: 65. Научные направления: теория управления, теория устойчивости. E-mail: aakosov@yandex.ru.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-08-92208ГФЕН_а).

системы, на которые действуют только диссипативные и потенциальные силы, поэтому асимптотическая устойчивость положения равновесия вытекает из третьей теоремы Томсона–Тэта–Четаева [4]. В общем случае, когда равновесие в PS неустойчиво или в силах взаимодействия с NES присутствуют и неконсервативные позиционные силы, задача об асимптотической устойчивости становится нетривиальной и возникают следующие вопросы:

А) При каких условиях из асимптотической устойчивости положений равновесия рассматриваемых изолированно PS и NES вытекает такое же свойство и в замкнутой системе?

Б) Если в PS нет демпфирования и положение равновесия лишь устойчиво, то можно ли (и при каких условиях) добиться асимптотической устойчивости в замкнутой системе за счет нелинейного взаимодействия с NES?

В) Если положение равновесия в PS неустойчиво и измеряются только некоторые обобщенные координаты, то можно ли (и при каких условиях) добиться асимптотической устойчивости в системе, замкнутой нелинейной обратной связью по измеряемым координатам?

Поставленные вопросы рассматриваются в данной статье.

В п. 2 с помощью метода декомпозиции получены условия асимптотической устойчивости, дающие решение задачи А). Используемый вариант этого метода базируется на разработанном в [5, 6] подходе к обоснованию прецессионной теории гироскопов.

В п. 3 указан способ построения нелинейного стабилизирующего управления в виде обратной связи по измеряемым координатам, решающий задачу В). В частном случае, когда квадратичная часть потенциала в PS положительно определена, построенная обратная связь с исключенным линейным слагаемым дает и решение задачи Б). Полученные результаты базируются на предложенном в [7] подходе к установлению асимптотической устойчивости систем с неполной диссипацией на основе теоремы Барбашина–Красовского.

Общее свойство результатов п. 2 и 3 заключается в существенной нелинейности взаимодействия основной части (PS) системы и управляющей части (NES), принципиальное же отличие – в том, что теоремы 1 и 2 о декомпозиции могут успешно применяться и к механическим системам с неконсервативными позиционными силами, тогда как в п. 3 присутствие указанных сил в изучаемой системе недопустимо.

Таким образом, механические системы, в которых асимптотическая устойчивость положения равновесия будет установлена с использованием теорем данной статьи, будут соответствовать основным предпосылкам пассивного управления и перекачки энергии [1, 2], поэтому можно ожидать, что кроме устойчивости будет обеспечено и подавление вынужденных колебаний, т. е. достаточно высокое качество регулирования. При этом теоремы о декомпозиции п. 2 могут существенно расширить класс систем, к которым применимы методы [1, 2], включив в него и системы с неконсервативными позиционными силами.

2. Декомпозиция системы с однородными позиционными силами взаимодействия. Пусть движение механической системы описывается уравнениями

$$A_1\ddot{q}_1 + B_1\dot{q}_1 + C_1 q_1 = Q_1(q), \tag{1}$$

$$A_2\ddot{q}_2 + B_2\dot{q}_2 = Q_2(q). \tag{2}$$

Здесь q_1 и $\dot{q}_1$ – n_1-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей PS; q_2 и $\dot{q}_2$ – n_2-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей NES;

$q = (q_1^T, q_2^T)^T$; A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 – постоянные матрицы, причем A_1, A_2 и B_2 неособые; правые части уравнений (1) и (2) являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка $\mu > 1$ и определяются силами взаимодействия. Таким образом, у исследуемой системы существует положение равновесия $q = \dot q = 0$.

Рассмотрим три изолированные подсистемы

$$A_1\ddot q_1 + B_1\dot q_1 + C_1 q_1 = 0, \tag{3}$$

$$A_2\dot r = -B_2 r, \tag{4}$$

$$B_2\dot s = Q_2(0, s). \tag{5}$$

Будем вместо системы (1), (2), состоящей из $n_1 + n_2$ нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, изучать вспомогательные подсистемы (3)–(5), первые две из которых линейны, а третья представляет собой систему с однородными правыми частями.

Теорема 1. *Если нулевые решения изолированных подсистем* (3)–(5) *асимптотически устойчивы, то положение равновесия* $q = \dot q = 0$ *уравнений* (1), (2) *также асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем замену переменных

$$\dot q_2 = r, \quad A_2\dot q_2 + B_2 q_2 = B_2 s.$$

Получим систему

$$\begin{aligned} A_1\ddot q_1 + B_1\dot q_1 + C_1 q_1 &= Q_1\left(q_1, s - B_2^{-1}A_2 r\right),\\ A_2\dot r &= -B_2 r + Q_2\left(q_1, s - B_2^{-1}A_2 r\right),\\ B_2\dot s &= Q_2(0,s) + \left(Q_2\left(q_1, s - B_2^{-1}A_2 r\right) - Q_2(0,s)\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Из асимптотической устойчивости нулевых решений изолированных подсистем (3)–(5) следует [8] существование квадратичных форм $V_1(q_1, \dot q_1)$, $V_2(r)$ и непрерывно дифференцируемой однородной порядка β функции $V_3(s)$, для которых при всех $q_1, \dot q_1 \in \mathbb{E}^{n_1}$, $r, s \in \mathbb{E}^{n_2}$ справедливы оценки

$$a_{11}\left(\|q_1\|^2 + \|\dot q_1\|^2\right) \leqslant V_1(q_1, \dot q_1) \leqslant a_{12}\left(\|q_1\|^2 + \|\dot q_1\|^2\right),$$

$$\left\|\frac{\partial V_1}{\partial q_1}\right\| + \left\|\frac{\partial V_1}{\partial \dot q_1}\right\| \leqslant a_{13}\left(\|q_1\| + \|\dot q_1\|\right), \quad \dot V_1\big|_{(3)} \leqslant -a_{14}\left(\|q_1\|^2 + \|\dot q_1\|^2\right),$$

$$a_{21}\|r\|^2 \leqslant V_2(r) \leqslant a_{22}\|r\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V_2}{\partial r}\right\| \leqslant a_{23}\|r\|, \quad \dot V_2\big|_{(4)} \leqslant -a_{24}\|r\|^2,$$

$$a_{31}\|s\|^\beta \leqslant V_3(s) \leqslant a_{32}\|s\|^\beta, \quad \left\|\frac{\partial V_3}{\partial s}\right\| \leqslant a_{33}\|s\|^{\beta-1}, \quad \dot V_3\big|_{(5)} \leqslant -a_{34}\|s\|^{\beta+\mu-1}.$$

Здесь a_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$, – положительные постоянные, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. При этом в качестве β можно выбирать любое рациональное число с четным числителем и нечетным знаменателем такое, что $\beta > 1$.

Рассмотрим функцию $V(q_1, \dot q_1, r, s) = V_1(q_1, \dot q_1) + V_2(r) + V_3(s)$. Дифференцируя ее в силу системы (6), получаем, что при всех $q_1, \dot q_1 \in \mathbb{E}^{n_1}$, $r, s \in \mathbb{E}^{n_2}$ справедливо неравенство

$$\dot V\big|_{(6)} \leqslant -a_{14}\left(\|q_1\|^2 + \|\dot q_1\|^2\right) - a_{24}\|r\|^2 - a_{34}\|s\|^{\beta+\mu-1} +$$

$$+\tilde a\Big((\|q_1\|+\|\dot q_1\|+\|r\|)\,(\|q_1\|^{\mu}+\|r\|^{\mu}+\|s\|^{\mu})+$$
$$+\|s\|^{\beta-1}(\|q_1\|+\|r\|)\left(\|q_1\|^{\mu-1}+\|r\|^{\mu-1}+\|s\|^{\mu-1}\right)\Big),$$

где $\tilde a = \text{const} > 0$.

Используя свойства обобщенно-однородных функций [9], нетрудно показать, что если $3-\mu<\beta<\mu+1$, то в достаточно малой окрестности точки $(q_1^T,\dot q_1^T,r^T,s^T)^T = (0^T,0^T,0^T,0^T)^T$ имеет место соотношение

$$\dot V\big|_{(6)} \leqslant -\frac{1}{2}\Big(a_{14}\left(\|q_1\|^2+\|\dot q_1\|^2\right)+a_{24}\|r\|^2+a_{34}\|s\|^{\beta+\mu-1}\Big).$$

Таким образом, функция $V(q_1,\dot q_1,r,s)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [4]. Значит, нулевое решение системы (6) асимптотически устойчиво. Но тогда асимптотически устойчиво и положение равновесия $q=\dot q=0$ уравнений (1), (2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В случаях, когда в уравнениях (1) при скоростных или гироскопических силах присутствует большой параметр, процесс декомпозиции изучаемой системы можно продолжить, применяя к изолированной подсистеме (3) теоремы В. И. Зубова и Д. Р. Меркина о декомпозиции линейных систем [5, 6].

Пусть уравнения (1) представимы в виде

$$A_1\ddot q_1 + hB_1\dot q_1 + C_1 q_1 = Q_1(q), \tag{1'}$$

где h – положительный параметр (система в форме Зубова [5]).

Следствие 1. *Если нулевые решения подсистем*

$$A_1\dot z = -B_1 z, \qquad B_1\dot p = -C_1 p$$

и подсистем (4), (5) *асимптотически устойчивы, то существует число* $h_0>0$ *такое, что при всех* $h\geqslant h_0$ *положение равновесия* $q=\dot q=0$ *уравнений* $(1')$, (2) *также асимптотически устойчиво.*

Таким образом, проблема исследования устойчивости системы $(1')$, (2), состоящей из n_1+n_2 нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, сводится к изучению устойчивости четырех изолированных подсистем первого порядка, три из которых линейны, а четвертая представляет собой систему с однородными правыми частями.

Аналогичное следствие можно сформулировать и в случае, когда изолированная подсистема (3) удовлетворяет требованиям теоремы Меркина [6].

Далее наряду с уравнениями (1), (2) рассмотрим возмущенные уравнения

$$A_1\ddot q_1 + B_1\dot q_1 + C_1 q_1 = Q_1(q) + R_1(t,q,\dot q), \tag{7}$$

$$A_2\ddot q_2 + B_2\dot q_2 = Q_2(q) + R_2(t,q,\dot q). \tag{8}$$

Будем считать, что векторные функции $R_1(t,q,\dot q)$ и $R_2(t,q,\dot q)$ заданы и непрерывны в области $t\geqslant 0$, $\|q\|<H$, $\|\dot q\|<H$ ($H=\text{const}>0$), причем в указанной области справедливы оценки

$$\|R_1(t,q,\dot q)\| \leqslant c_1\left(\|q_1\|^{\lambda}+\|\dot q_1\|^{\lambda}+\|q_2\|^{\nu}+\|\dot q_2\|^{\eta}\right),$$

$$\|R_2(t,q,\dot q)\| \leqslant c_2\left(\|q_1\|^\sigma + \|\dot q_1\|^\sigma + \|q_2\|^\rho + \|\dot q_2\|^\xi\right),$$

где $c_1, c_2, \lambda, \nu, \eta, \sigma, \rho, \xi$ – положительные постоянные. Значит, система (7), (8) также имеет положение равновесия $q = \dot q = 0$. Определим условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости этого положения равновесия.

Теорема 2. *Пусть нулевые решения изолированных подсистем* (3)–(5) *асимптотически устойчивы. Если выполнены неравенства*

$$\lambda \geqslant 1, \quad \nu \geqslant 1, \quad \eta \geqslant 1, \quad \rho \geqslant \mu, \quad \sigma \geqslant \max\{\mu/\nu; 1\}, \quad \xi \geqslant \max\{\mu/\nu; 1\},$$

то при достаточно малых значениях c_1 *и* c_2 *положение равновесия* $q = \dot q = 0$ *уравнений* (7), (8) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Предположим, что возмущенные уравнения имеют вид

$$A_1\ddot q_1 + B_1\dot q_1 + \varepsilon_1 B_{12}\dot q_2 + C_1 q_1 = Q_1(q), \tag{9}$$

$$A_2\ddot q_2 + \varepsilon_2 B_{21}\dot q_1 + B_2\dot q_2 = Q_2(q). \tag{10}$$

Здесь B_{12}, B_{21} – постоянные матрицы, ε_1 и ε_2 – положительные параметры.

Следствие 2. *Пусть нулевые решения изолированных подсистем* (3)–(5) *асимптотически устойчивы. Тогда при достаточно малых значениях* ε_1 *и* ε_2 *положение равновесия* $q = \dot q = 0$ *уравнений* (9), (10) *асимптотически устойчиво.*

3. Стабилизация систем с неполным измерением координат за счет нелинейной обратной связи. Пусть вектор обобщенных координат PS составной $q_1 = (x^T, y^T)^T$, $x \in \mathbb{E}^m$, $y \in \mathbb{E}^k$, $n_1 = m + k$, измеряются только компоненты вектора x, управлять можно только приложением сил в первых m уравнениях, а движение PS описывается уравнениями

$$A_{11}\ddot x + A_{12}\ddot y + C_{11}x + C_{12}y = u, \tag{11}$$

$$A_{12}^T\ddot x + A_{22}\ddot y + C_{12}^T x + C_{22}y = 0. \tag{12}$$

Здесь матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}$$

кинетической энергии $T = \frac{1}{2}\dot q_1^T A_1 \dot q_1$ PS симметрична и положительно определена, а относительно симметричной матрицы

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^T & C_{22} \end{pmatrix}$$

потенциальной энергии $\Pi(q_1) = \Pi(x,y) = \frac{1}{2}q_1^T C_1 q_1$ будем предполагать, что положительно определена матрица C_{22}, т. е. $\Pi(0,y)$ – положительно-определенная квадратичная форма измеряемых координат.

Поскольку в системе (11), (12) отсутствует диссипация, положение равновесия $q_1 = \dot q_1 = 0$ не может быть асимптотически устойчивым при отсутствии управления [4]. Потому рассмотрим задачу стабилизации за счет обратной связи по измеряемым координатам и дополнительным вспомогательным переменным, являющимся обобщенными координатами для присоединяемого NES. При этом в соответствии с концепцией пассивного управления и перекачки энергии с целью уменьшения амплитуд вынужденных колебаний будем конструировать обратную связь, т. е. взаимодействие между PS и NES, в классе нелинейных функций.

Далее будем считать, что число вспомогательных переменных равно числу измеряемых координат, и управление возьмем в потенциальном виде

$$u = -\frac{\partial\widetilde{\Pi}(x,w)}{\partial x}, \tag{13}$$

где вспомогательный потенциал выберем следующим образом:

$$\widetilde{\Pi}(x,w) = \lambda\Phi_1(x) + \gamma\Psi(x,w) + \Phi(w). \tag{14}$$

Здесь λ и γ – положительные числа; $\Phi_1(x) = \frac{1}{2}x^T\widetilde{C}_{11}x$, $\widetilde{C}_{11}$ – симметричная положительно-определенная матрица размером $m\times m$; $\Phi(w)$ – непрерывно дифференцируемая однородная порядка $\mu+1>2$ положительно-определенная функция; $\Psi(x,w)$ – дважды непрерывно дифференцируемая однородная порядка $\mu+1>2$ функция, причем такая, что при любых постоянных векторах $c^0, w^0 \in \mathbb{E}^m$ система уравнений

$$\frac{\partial\Psi(x,w^0)}{\partial w} = c^0$$

имеет только конечное число решений относительно вектора x.

Уравнения для вспомогательных переменных (уравнения NES) возьмем в виде

$$A_2\ddot{w} + B_2\dot{w} = -\frac{\partial\widetilde{\Pi}(x,w)}{\partial w}. \tag{15}$$

Здесь матрицы A_2 и B_2 – симметричные положительно-определенные.

Пусть $M = A_{22}^{-1}C_{22}$, $L = C_{12} - A_{12}A_{22}^{-1}C_{22}$.

Теорема 3. *Если матрица C_{22} положительно определена, а пара матриц (M,L) полностью наблюдаема, то, выбирая число $\lambda>0$ достаточно большим, а число $\gamma>0$ достаточно малым, можно стабилизировать положение равновесия $q_1=\dot{q}_1=0$, $w=\dot{w}=0$ замкнутой системы* (11)–(15) *до асимптотической устойчивости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в качестве функции Ляпунова полную энергию замкнутой системы

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}_1^TA_1\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{w}^TA_2\dot{w} + \Pi(x,y) + \widetilde{\Pi}(x,w).$$

При достаточно большом $\lambda>0$ и достаточно малом $\gamma>0$ эта функция будет положительно-определенной в некоторой окрестности исследуемого положения равновесия.

Вычисляя производную в силу замкнутой системы, получаем

$$\dot{V} = -\dot{w}^TB_2\dot{w} \leqslant 0.$$

Покажем, что множество нулей производной функции Ляпунова

$$E = \Big\{(q_1^T,\dot{q}_1^T,w^T,\dot{w}^T)^T:\ \dot{V}=0\Big\} = \Big\{(q_1^T,\dot{q}_1^T,w^T,\dot{w}^T)^T:\ \dot{w}=0\Big\}$$

состоит лишь из положений равновесия, причем положение равновесия в начале координат локально единственно.

Из тождества $\dot{w} \equiv 0$ следует, что $w \equiv w^0 \equiv \text{const}$. Тогда из (15) имеем $x \equiv x^0 \equiv \text{const}$. Выразим $\ddot{y}$ из уравнения (12) и подставим в (11). Получим

$$Ly \equiv \Big(A_{12}A_{22}^{-1}C_{12}^T - C_{11}\Big)x^0 \equiv c_1^0 \equiv \text{const}. \tag{16}$$

Дважды продифференцируем тождество (16) и заменим $\ddot{y}$ его выражением из (12). Имеем

$$LMy \equiv c_2^0 \equiv \text{const}. \tag{17}$$

Повторяя эту операцию над (17) и получаемыми далее тождествами $k-1$ раз, придем к системе

$$LM^i y \equiv c_{i+1}^0 \equiv \text{const}, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{18}$$

Заметим, что правые части системы (18) выражаются известным образом через x^0 и w^0.

Предположим, что пара матриц (M, L) полностью наблюдаема, т. е. матрица наблюдаемости

$$H = \begin{pmatrix} L \\ LM \\ \ldots \\ LM^{k-1} \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг ($\operatorname{rang} H = k$). Тогда система (18) при любых постоянных правых частях имеет единственное постоянное решение $y \equiv y^0 \equiv \text{const}$.

Из уравнений (11) и (12) на множестве E получаем равенства

$$\Big(C_{11} + \lambda\widetilde{C}_{11}\Big)\,x + C_{12}y = -\gamma\frac{\partial\Psi(x,w)}{\partial x}, \qquad C_{12}^T x + C_{22}y = 0. \tag{19}$$

Из равенств (19) на основании теоремы о неявной функции можно выразить x и y как функции w:

$$x = \varphi(w), \qquad y = \psi(w). \tag{20}$$

При этом $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ и в окрестности точки $w = 0$ порядок малости функций $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ не ниже первого.

Подставляя (20) в уравнения (15), находим

$$\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w} + \gamma\frac{\partial\Psi(\varphi(w),w)}{\partial w} = 0. \tag{21}$$

Умножая равенство (21) скалярно на w и используя уравнение Эйлера для однородных функций [8], имеем

$$(\mu+1)\Phi(w) + \gamma w^T\frac{\partial\Psi(\varphi(w),w)}{\partial w} = 0. \tag{22}$$

Функция $\Phi(w)$ положительно определена. Поэтому существует окрестность точки $w = 0$, в которой справедливы оценки

$$\Phi(w) \geqslant a_1\|w\|^{\mu+1}, \qquad \left|w^T\frac{\partial\Psi(\varphi(w),w)}{\partial w}\right| \leqslant a_2\|w\|^{\mu+1},$$

где a_1 и a_2 – положительные постоянные. Если $\gamma < a_1(\mu+1)/a_2$, то в рассматриваемой окрестности точки $w = 0$ равенство (22) может выполняться лишь в ней самой. Но тогда из (20) следует, что $x = 0$ и $y = 0$.

Таким образом, $x^0 \equiv 0$, $y^0 \equiv 0$, $w^0 \equiv 0$, т. е. равновесие в начале координат локально единственно и потому на основании теоремы Барбашина–Красовского асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда во вспомогательном потенциале (14) первое слагаемое остается прежним, а в качестве второго и третьего слагаемых используются следующие функции:

$$\Phi(w) = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i^{\mu_i+1}, \qquad d_i > 0, \tag{23}$$

$$\gamma\Psi(x, w) = \sum_{i=1}^{m} (a_i x_i + b_i w_i)^{\mu_i+1}, \qquad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad \gamma = 1. \tag{24}$$

Здесь $\mu_i > 1$ – рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями. Заметим, что именно такие компоненты потенциала характерны для механических систем, содержащих нелинейные пружины [1, 2]. Принципиальное отличие этого случая от предыдущего заключается в отсутствии малого параметра, поскольку $\gamma = 1$.

Теорема 4. *Если матрица C_{22} положительно определена, а пара матриц (M, L) полностью наблюдаема, то, выбирая достаточно большое число $\lambda > 0$ и второе и третье слагаемые потенциала* (14) *в соответствии с* (23) *и* (24)*, можно стабилизировать положение равновесия $q_1 = \dot{q}_1 = 0$, $w = \dot{w} = 0$ замкнутой системы* (11)–(15) *до асимптотической устойчивости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем ту же функцию Ляпунова и, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 3, получаем, что множество

$$E = \left\{ (q_1^T, \dot{q}_1^T, w^T, \dot{w}^T)^T : \ \dot{V} = 0 \right\}$$

состоит лишь из положений равновесия $x \equiv x^0 \equiv \text{const}$, $y \equiv y^0 \equiv \text{const}$, $w \equiv w^0 \equiv \text{const}$.

На этом множестве справедливы равенства

$$\left(C_{11} + \lambda \widetilde{C}_{11} \right) x + C_{12} y = u, \quad u_i = -a_i(\mu_i + 1)(a_i x_i + b_i w_i)^{\mu_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{25}$$

$$C_{12}^T x + C_{22} y = 0, \tag{26}$$

$$d_i(\mu_i + 1) w_i^{\mu_i} + b_i(\mu_i + 1)(a_i x_i + b_i w_i)^{\mu_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{27}$$

Выражая из (26) и (27) переменные y и w линейным образом через x и подставляя в (25), получим систему

$$\left(C_{11} + \lambda \widetilde{C}_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{12}^T \right) x = Z(x), \tag{28}$$

в которой $Z(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция с порядком малости выше первого.

При достаточно большом $\lambda > 0$ матрица-коэффициент в левой части (28) будет положительно определена, поэтому найдется окрестность точки $x = 0$, в которой система (28) не имеет решений, за исключением самой этой точки. Но тогда из (26), (27) следует, что $y = 0$ и $w = 0$.

Таким образом, равновесие в начале координат локально единственно и на основании теоремы Барбашина–Красовского асимптотически устойчиво.

З а м е ч а н и е 2. Точно так же рассматривается случай, когда во вспомогательном потенциале (14) первое слагаемое остается прежним, а в качестве второго и третьего слагаемых используются следующие функции:

$$\Phi(w) = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i^{\mu_i+1}, \qquad d_i > 0,$$

$$\gamma\Psi(x,w) = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i x_i^{\mu_i}, \qquad a_i \neq 0, \quad \gamma = 1.$$

Здесь $\mu_i > 1$ – рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями.

З а м е ч а н и е 3. Если исходный потенциал PS $\Pi(x,y)$ положительно определен, то в управлении можно положить $\lambda = 0$, т. е. использовать линейное слагаемое в обратной связи нет необходимости. Утверждения теорем 3 и 4 с соответствующими изменениями при этом останутся справедливыми.

4. Стабилизация положения равновесия трехмассовой системы при неполном измерении координат. Рассмотрим три расположенных на горизонтальной прямой груза с массами m_1, m_2, m_3, которые соединены друг с другом линейными пружинами, а крайние грузы с помощью линейных пружин прикреплены к стенам. Пусть положение равновесия всей системы соответствует недеформированному состоянию пружин, а отклонения грузов от их равновесных положений характеризуются координатами x_1, x_2, x_3, отсчитываемыми вдоль прямой в одну сторону. Будем считать, что измерению в каждый момент времени доступна только координата крайнего справа третьего груза $x_3(t)$ и к нему же можно применять управляющее воздействие.

Уравнения движения имеют вид [10]

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) &= 0,\\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) &= 0,\\ m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) + k_4x_3 &= u. \end{aligned} \tag{29}$$

При отсутствии управления ($u \equiv 0$) положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ будет устойчивым, но не притягивающим, поскольку демпфирование в системе отсутствует. Требуется выбрать управление u по принципу неполной обратной связи с использованием только измеряемой координаты так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия.

Уравнение для скалярной вспомогательной переменной возьмем в виде

$$m\ddot{w} + b\dot{w} + c_1(w - x_3)^3 + c_2w^3 = 0, \tag{30}$$

а управление выберем следующим образом:

$$u = -c_1(w - x_3)^3. \tag{31}$$

Здесь m, b, c_1, c_2 – положительные параметры.

Согласно теореме 4, положение равновесия $x_i = \dot{x}_i = w = \dot{w} = 0$, $i = 1, 2, 3$, замкнутой системы (29)–(31) асимптотически устойчиво при любых положительных значениях входящих в систему параметров. Таким образом, задача упрочнения устойчивости до асимптотической устойчивости в данном примере решается за счет присоединения к звену, координата которого доступна измерению, нелинейного звена с демпфированием, что полностью соответствует присоединению NES в терминологии [1, 2].

Отметим, что задача гашения колебаний трех грузов, соединенных линейными пружинами, при измерении координаты одного крайнего груза решалась в [10] на основе другого подхода. В отличие от [10], предложенный нами подход гарантирует асимптотическую устойчивость и в том случае, когда пружины в исходной системе (29) так же, как и в NES (30), являются нелинейными [11].

Литература

1. *Lee Y. S., Vakakis A. F., Bergman L. A.* et al. Passive non-linear targeted energy transfer and its applications to vibration absorption: a review // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Pt K. J. of Multi-body Dynamics. 2008. Vol. 222, N 2. P. 77–134.
2. *Pham T. T., Lamarque C.-H., Savadkoohi A. T.* Passive control of a 2 dof system under two different harmonic excitations // IV European Conference on Computational Mechanics. Palais des Congres. Paris, France, May 16–21, 2010. URL: http://www.eccm2010. org/complet/fullpaper_1369.pdf.
3. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судостроение, 1962. 632 с.
4. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1976. 320 с.
5. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 320 с.
6. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
7. *Пожарицкий Г. К.* Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 4. С. 657–667.
8. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973. 272 с.
9. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судостроение, 1959. 324 с.
10. *Skruch P.* Stabilization of second-order systems by non-linear feedback // Intern. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2004. N 4. P. 455–460.
11. *Александров А. Ю., Косов А. А.* О стабилизации механических систем с однородными потенциальными силами // Качественные свойства, асимптотика и стабилизация нелинейных динамических систем: межвуз. сб. науч. трудов / отв. ред. В. Н. Щенников, О. В. Дружинина. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2010. С. 59–73.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья принята к печати 14 октября 2010 г.