Е. В. Ноздринова, Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, *Журнал СВМО*, 2017, том 19, номер 2, 91–97

DOI: 10.15507/2079-6900.19.201701.091-097

DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.091-097

УДК 519.17

Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей

© **Е. В. Ноздринова**[1]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов f, заданных на гладких ориентируемых замкнутых поверхностях M^2. Устанавливается, что для любого такого диффеоморфизма существует дуальная пара аттрактор-репеллер A_f, R_f, которые имеют топологическую размерность не больше 1, а пространство орбит в их дополнении V_f (характеристическое пространство) гомеоморфно двумерному тору. Непосредственным следствием этого результата является, например, одинаковый период всех седловыхсепаратрис диффеоморфизма $f \in G$. На возможности такого представления динамики системы в виде "источник-сток" основан целый ряд классификационных результатов для структурно устойчивых динамических систем с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа орбит — систем Морса-Смейла. Например, для систем в размерности три всегда существует связное характеристическое пространство, ассоциированное с выбором одномерной дуальной пары аттрактор-репеллер. В размерности два это не верно даже в градиентно-подобном случае, однако в настоящей работе показано, что существует одномерная дуальная пара, характеристическое пространство орбит которой является связным.

Ключевые слова: градиентно-подобный диффеоморфизм, аттрактор, репеллер.

1. Введение и формулировка результатов

Классический подход к изучению динамических систем состоит в представлении динамики системы в виде "источник-сток", то есть в выделении дуальной пары аттрактор-репеллер, которые являются $\omega - \alpha$ предельными множествами для всех остальных траекторий системы. На возможности такого представления основана "Фундаментальная теорема динамических систем" Ч. Конли [1], устанавливающая существование функции Ляпунова для произвольной динамической системы. С этой идеей связано понятие фильтрации, на которую опирается доказательство необходимых и достаточных условий Ω-устойчивости системы. Кроме того, выбор различных дуальных пар аттрактор-репеллер является источником нахождения различных топологических инвариантов динамической системы. Существует много примеров, когда разумный выбор дуальной пары приводит к полной топологической классификации динамических систем некоторого класса. На этом пути, в частности, получен целый ряд классификационных результатов для структурно устойчивых динамических систем с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа орбит — *систем Морса-Смейла*, см., например, [2], [3], [4], [5], [6].

В монографии [7] дополнение к дуальной паре аттрактор-репеллер для диффеоморфизма Морса-Смейла названо *характеристическим пространством* (см. раздел 2.2 монографии [7]). Там же показано, например, что для систем в размерности три всегда существует связное характеристическое пространство, ассоциированное с выбором одномерной

[1] **Ноздринова Елена Вячеславовна**, лаборант, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0001-5209-377X, maati@mail.ru

дуальной пары аттрактор-репеллер (см. Теорема 2.6 монографии [7]). В размерности два это не верно даже в градиентно-подобном случае (см. Рисунок 1.), однако, в настоящей работе будет показано, что существует одномерная дуальная пара, характеристическое пространство орбит которой является связным.

Напомним необходимые для формулировки результатов понятия.

1.1. Топологические понятия

Напомним, что топологическое пространство X называется *двумерным многообразием*, если его точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому двумерному диску $int\ \mathbb{D}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Заметим, что $int\ \mathbb{D}^2$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$, так что с равным успехом можно потребовать, чтобы каждая точка имела окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^2$.

Двумерным многообразием с краем называется топологическое пространство X, каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо $\mathbb{R}^2$, либо его подмножеству $\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1, x_2 \geq 0\}$. Множество всех точек X, имеющих окрестности, гомеоморфные $\mathbb{R}^2_+$, но не имеющих окрестностей, гомеоморфных $\mathbb{R}^2$, называется *краем многообразия* X.

Компактное многообразие без края называется *замкнутым многообразием.*

Из определения двумерного многообразия X следует, что у X есть открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ такое, что при каждом $j \in J$ существует отображение $\psi_j : U_j \to \mathbb{R}^2$, гомеоморфно отображающее U_j на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^2$. При этом мы называем (U_j, ψ_j) *картой или локальной системой координат* с областью определения U_j, координаты x_1, x_2 называются *локальными координатами* в точке x_0, множество $\Phi = \{(U_j, \psi_j), j \in J\}$ всех карт представляет собой *атлас.*

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение двумерных многообразий X. Если $p \in U$ и $f(U) \subset V$ для карты (U, ψ) многообразия X и карты (V, φ) многообразия Y, то определено отображение $f_p = \varphi f \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(V)$, которое называется *локальным представлением* f *в точке* p. Гладкость отображения f в точке p определяется гладкостью его локального представления в этой точке. Именно, локальное представление f_p отображения f в точке p можно представить как упорядоченный набор двух функций от двух переменных

$$f_p(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)).$$

Отображение f называется *гладким или дифференцируемым класса* C^r, $r \geq 1$ в точке p, если каждая функция f_k, $k = 1, 2$ имеет все непрерывные частные производные на $\psi(U)$ до порядка r включительно. В этом случае пишут $f \in C^r$. Если функции f_1, f_2 имеют непрерывные частные производные любого порядка на $\psi(U)$, то f называется *бесконечно гладким отображением* в точке p ($f \in C^\infty$).

Для гладкого в точке p отображения f матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

первых производных отображения f_p, вычисленных в точке $\psi(p)$ называется *матрицей Якоби* отображения f в точке p и обозначается $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_p$.

Гладкое многообразие X называется *ориентируемым*, если оно обладает атласом, в котором переходы от одних координат к другим имеют положительные якобианы. В противном случае многообразие называется неориентируемым.

Говорят, что подмножество A топологического пространства X имеет *нулевую топологическую размерность*, если для любой точки $x \in A$ и любой ее открытой окрестности U_x существует открытая окрестность V_x такая, что $x \in V_x \subset U_x$ и $Fr\ V_x \cap A = \emptyset$. Тогда, по индукции, множество $A \subset X$ имеет *топологическую размерность* $n \geq 1$, если для любой точки $x \in A$ и любой ее открытой окрестности U_x существует открытая окрестность V_x такая, что $x \in V_x \subset U_x$ и множество $Fr\ V_x \cap A$ имеет топологическую размерность $n-1$.

1.2. Динамические понятия

Пусть M^2 — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие и $f : M^2 \to M^2$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм.

Для диффеоморфизма f точка $x \in X$ называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f(U_x) \cap U_x = \emptyset$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Непосредственно из определения следует, что каждая точка окрестности U_x является блуждающей и, следовательно, множество блуждающих точек открыто, а множество неблуждающих точек – замкнуто.

Множество всех неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f.

Простейшими примерами гиперболических множеств являются прежде всего гиперболические неподвижные точки диффеоморфизма, которые можно классифицировать следующим образом. Пусть $f : X \to X$ — диффеоморфизм и $f(p) = p$. Точка p является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_p$ нет чисел, по модулю равных 1. Если при этом все собственные числа матрицы Якоби по модулю меньше 1, то p называется *притягивающей, стоковой точкой или стоком*; если все собственные числа по модулю больше 1, то p называется *отталкивающей, источниковой точкой или источником.* Притягивающая или отталкивающая точка называется *узловой.* Гиперболическая неподвижная точка не являющаяся *узловой*, называется *седловой точкой или седлом.*

Если точка p — периодическая точка f с периодом $per(p)$, то, применяя предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{per(p)}$, получаем классификацию гиперболических периодических точек, аналогичную классификации неподвижных гиперболических точек.

Гиперболическая структура периодической точки p приводит к существованию у нее *устойчивого* W^s_p и *неустойчивого* W^u_p многообразий, которые определяются следующим образом: $W^s_p = \{x \in M : d(f^{kper(p)}(x), p) \to 0$ при $k \to +\infty\}$, $W^u_p = \{x \in M : d(f^{-kper(p)}(x), p) \to 0$ при $k \to +\infty\}$.

Для гиперболической неподвижной или периодической точки p устойчивое или неустойчивое многообразие называется *инвариантным многообразием* этой точки, компонента связности множества $W^u_p \setminus p$ ($W^s_p \setminus p$) называется неустойчивой (устойчивой) *сепаратрисой.*

Замкнутое f-инвариантное множество $A \subset M^2$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\ U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей или изолирующей. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}. Аттрактор и репеллер называются *дуальными*, если дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность репеллера.

1.3. Формулировка результатов

Диффеоморфизм $f: M^2 \to M^2$ называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических периодических точек и инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются. Обозначим через G класс таких диффеоморфизмов.

Пусть $f \in G$ и A_f, R_f — дуальная пара аттрактор-репеллер. Положим $V_f = M^2 \setminus (A_f \cup R_f)$ и обозначим через $\hat{V}_f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_f. Множество V_f называется *характеристическим пространством* и множество $\hat{V}_f$ называется *характеристическим пространством орбит.*

Теорема 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует дуальная пара аттрактор-репеллер A_f, R_f такие, что их топологическая размерность не больше 1 и характеристическое пространство орбит $\hat{V}_f$ гомеоморфно двумерному тору.*

Следствие 1.1. *Все седловые сепаратрисы диффеоморфизма $f \in G$ имеют одинаковый период.*

Замечание 1.1. *Из связности характеристического пространства орбит $\hat{V}_f$ не следует в общем случае связность дуальных аттрактора и репеллера (см. пример на Рисунке 1.). Однако, если связным является само характеристическое пространство V_f, то A_f и R_f также связны, что следует, например, из Теоремы 2.6 монографии* [7].

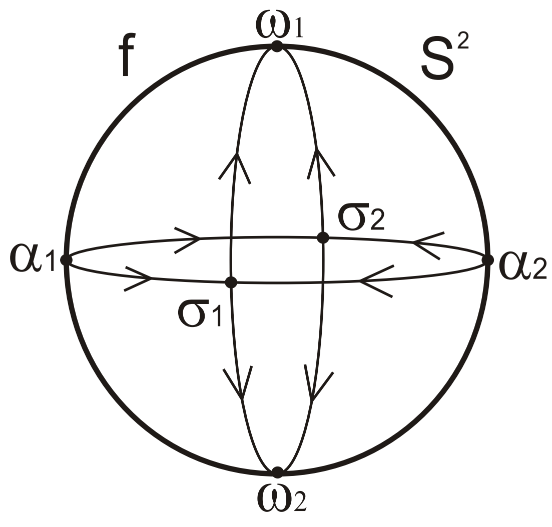

Рисунок **1.1**

На данном рисунке изображен фазовый портрет градиентно-подобного диффеоморфизма, заданного на двумерной сфере. В предположении, что σ_1, σ_2 и α_1, α_2 – периодические орбиты периода 2, получаем, что единственным связным характеристическим пространством орбит является пространство $\hat{V}_f$, соответствующее дуальной паре аттрактор-репеллер $A_f - R_f$ такой, что $A_f = \omega_1 \cup \omega_2 \cup W^u_{\sigma_1} \cup W^u_{\sigma_2}$, $R_f = \alpha_1 \cup \alpha_2$. При этом само характеристическое пространство V_f связным не является, также, как и репеллер R_f.

2. Доказательства основных результатов

Доказательство Теоремы 1.1.

Пусть $f \in G$. Если неблуждающее множество Ω_f не содержит седловых точек, то оно состоит в точности из одного источника и одного стока, а характеристическое пространство орбит является двумерным тором (см., например, Теорему 2.5 в монографии [7]). Таким образом, в этом случае теорема верна.

Везде далее мы предполагаем, что неблуждающее множество f содержит хотя бы одну седловую точку. Кроме того, не уменьшая общности, в рамках решаемой задачи, можно считать, что все неблуждающие точки диффеоморфизма f являются неподвижными (в противном случае можно перейти к подходящей степени диффеоморфизма f).

Перенумеруем седловые точки диффеоморфизма f: $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_f}$. Обозначим через A_0 множество всех стоковых точек, через R_{k_f+1} множество всех источников. Заметим, что $A_0 \neq \emptyset, R_{k_f+1} \neq \emptyset$. Для $i = 1, \dots, k_f$ положим $W^s_i = W^s_{\sigma_i}$, $W^u_i = W^u_{\sigma_i}$. Если A_0 состоит из одной точки, то положим $R_0 = R_{k_f+1} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{k_f} W^s_j$ и $V_0 = M^2 \setminus (A_0 \cup R_0)$. В силу Теоремы 2.6 из работы [7], $A_0 - R_0$ — дуальная пара аттрактор-репеллер и они оба являются связными, характеристическое пространство орбит является двумерным тором, следовательно, теорема верна.

Если A_0 состоит более, чем из одной точки, то для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим

$$A_i = A_0 \cup \bigcup_{j=1}^{i} W^u_j,\ R_i = R_{k_f+1} \cup \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W^s_j,\ V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i).$$

Согласно Теореме 1 работы [8], $A_i - R_i$ является дуальной парой аттрактор-репеллер и каждая компонента связности характеристического пространства орбит гомеоморфна двумерному тору.

Рассмотрим случай, когда множество A_0 состоит более, чем из одной точки. Обозначим через n число точек в множестве A_0 и перенумеруем эти точки: $\omega_1, \dots, \omega_n$. Положим $R_0 = R_{k_f+1} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{k_f} W^s_j$ и $V_0 = M^2 \setminus (A_0 \cup R_0)$. Тогда характеристическое пространство орбит $\hat{V}_0$ состоит из n двумерных торов $T_1, \dots, T_n$, являющихся пространствами орбит бассейнов соответствующих стоков. Поскольку несущая поверхность M^2 является связной, а характеристическое пространство V_0 содержит все неустойчивые сепаратрисы всех седловых точек, то найдется последовательность седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ таких, что неустойчивые сепаратрисы седловой точки σ_j принадлежат бассейнам стоков ω_j, ω_{j+1}. Тогда мы получим соответствующую последовательность характеристических пространств орбит: $\hat{V}_0, \dots, \hat{V}_{n-1}$. Согласно Теореме 1 работы [8], пространство орбит $\hat{V}_j$ состоит из $n - j$ компонент связности, каждая из которых является двумерным тором. Таким образом, пространство $\hat{V}_{n-1}$ связно, что и требовалось доказать.

Доказательство Следствия 1.1.

Пусть $A_f - R_f$ — дуальная пара аттрактор-репеллер, соответствующая связному характеристическому пространству $\hat{V}_f$. Тогда для любой седловой точки σ диффеоморфизма f либо устойчивые, либо неустойчивые сепаратрисы этой точки принадлежат характеристическому пространству V_f. Более того, их проекцией в характеристическом пространстве орбит являтся одна или две гомотопически нетривиальных окружности, в зависимости от типа ориентации седловой точки σ. Кроме того, период седловой точки σ однозначно определяется гомотопическим классом этих окружностей. Поскольку диффеоморфизм f

является градиентно-подобным, то сепаратрисы седловых точек попарно не пересекаются и, следовательно, в пространстве $\hat{V}_f$ им соответствуют непересекающиеся окружности. Согласно [9], все такие окружности лежат в одном гомотопическом классе, откуда следует равенство периодов всех седловых сепаратрис.

Благодарности. Автор благодарит О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа выполнена в рамках проекта 90 в 2017 году ЦФИ НИУ ВШЭ.

Список литературы

1. C. Conley, "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *CBMS Regional Conference Series in Math. vol. 38*, 1978, 89.
2. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds", *Topology*, 2004, 369-391.
3. Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka., "Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds", *World Scientific. Singapore.*, 2006, 121-147.
4. В. З. Гринес, "Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях", *Математические заметки*, **54(3)** (1993), 3-17.
5. В. З. Гринес., Е. Я. Гуревич.,В. С. Медведев, "О классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис", *Труды МИАН*, **270 (1)** (2010), 20-35.
6. V. Z. Grines., E. Y. Gurevich.,O. V. Pochinka., "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection", *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, 81-91.
7. V. Grines, T. Medvedev , O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.*, Springer International Publishing Switzerland., 2016, 364 p.
8. Т. М. Митрякова , О. В. Починка, А. Е. Шишенкова., "О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством", *СВМО*, **1** (2011), 63-70.
9. D. Rolfsen, "Knots and links.", *University of British Columbia, Math. Lecture*, **7** (1990).

Поступила 10.03.2017

MSC2010 05C15

The existence connected characteristic space at the gradient-like diffeomorphisms of surfaces

© **E. V. Nozdrinova**[2]

[2] **Elena V. Nozdrinova**, laboratory assistant, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0001-5209-377X, maati@mail.ru

Abstract. In this paper we consider the class G of orientation-preserving gradient-like diffeomorphisms f defined on a smooth oriented closed surfaces M^2. Author establishes that for every such diffeomorphism there is a dual pair attractor-repeller A_f, R_f that have topological dimension not greater than 1 and the orbit space in their supplement V_f is homeomorphic to the two-dimensional torus. The immediate consequence of this result is the same period of saddle separatrices of all diffeomorphisms $f \in G$. A lot of classification results for structurally stable dynamical systems with a non-wandering set consisting of a finite number of orbits (Morse-Smale systems) is based on the possibility of such representation for the system dynamics in the "source-sink" form. For example, for systems in dimension three there always exists a connected characteristic space associated with the choice of a one-dimensional dual attractor-repeller pair. In dimension two this is not true even in the gradient-like case. However, in this paper it is shown that there exists a one-dimensional dual pair with connected characteristic orbit space.
Key Words: gradient-like diffeomorphism, attractor, repeller.

References

1. C. Conley, "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *CBMS Regional Conference Series in Math. vol. 38*, 1978, 89.
2. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds", *Topology*, 2004, 369-391.
3. Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka., "Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds", *World Scientific. Singapore.*, 2006, 121-147.
4. V. Z. Grines, "Topological classification of diffeomorphisms of Morse-Smale with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces", *Mathematical Notes*, **54(3)** (1993), 3-17.
5. V. Z. Grines., E. Y. Gurevich.,V. S. Medvedev, "Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.*, **270 (1)** (2010), 20-35.
6. V. Z. Grines., E. Y. Gurevich.,O. V. Pochinka., "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection", *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, 81-91.
7. V. Grines, T. Medvedev , O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.*, Springer International Publishing Switzerland., 2016, 364 p.
8. T. M. Mitryakova , O. V. Pochinka, A. E. Shishenkova, "Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set", *SVMO*, **1** (2011), 63-70
9. D. Rolfsen, "Knots and links.", *University of British Columbia, Math. Lecture*, **7** (1990).

Submitted 10.03.2017