A. M. Letov, К теории качества нелинейных регулируемых систем,
Avtomat. i Telemekh., 1953, Volume 14, Issue 5, 588–596

https://www.mathnet.ru/eng/at13689

1953

К ТЕОРИИ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. М. ЛЕТОВ

(Москва)

Поставлена задача о качестве регулирования для одного класса нелинейных регулируемых систем в смысле минимального времени условного затухания ее колебаний. Решение задачи сведено аналогично тому, как это сделано Н. Г. Четаевым [1] для линейных систем, к отысканию экстремальных значений некоторой определенно положительной квадратичной формы на замкнутой поверхности.

1. Рассмотрим класс нелинейных регулируемых систем, описываемых уравнениями вида [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_k &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi \qquad (k=1,\ldots,n) \\ \dot{\xi} &= f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha - \xi. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь η_k — координаты, $b_{k\alpha}$ — постоянные параметры объекта регулирования, ξ — координата, n_k — постоянные параметры регулирующего органа, p_α — параметры регулятора, $f(\sigma)$ — ограниченная, однозначная, непрерывная всюду (за исключением, может быть, точки $\sigma = 0$) функция аргумента σ, обладающая свойствами $f(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$ при $|\sigma| > 0$.

Для сокращения функции $f(\sigma)$, определенные таким образом, назовем функциями класса (A).

В некоторых случаях имеет смысл говорить о таких функциях $f(\sigma)$, которые, в дополнение к сказанному, обладают свойствами

$$\left[\frac{df(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=0} \geqslant h > 0, \quad \sigma\varphi(\sigma) > 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0,$$

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) - h\sigma.$$

Будем говорить, что они образуют подкласс (A′) функций $f(\sigma)$ в классе (A). Выделение подкласса (A′) функций $f(\sigma)$ преследует цель отобрать среди возможных исполнительных органов регуляторов, характеризуемых функциями класса (A), те, которые обладают значительной быстротой реагирования на поступающие сигналы σ.

Для функций подкласса (A′) будем рассматривать и другое положение $H\sigma$ луча, ограничивающего функции $f(\sigma)$ сверху при $\sigma = 0$ (рис. 1).

Следовательно, все функции подкласса (A′) изображаются кривыми, целиком расположенными между лучами $y = h\sigma$, $y = H\sigma$, где $H > h$ — фиксированные числа; если окажется, что кривая $f(\sigma)$ имеет пересечение с каким-либо лучом при $\sigma = \sigma_*$, то будем говорить о диапазоне регулирования системы по σ, равном $2|\sigma_*|$.

К функциям подкласса (A′) мы относим также ⌠-образную функцию $f(\sigma) = Q \operatorname{sign} \sigma$, имеющую одну точку разрыва при $\sigma = 0$; для такой функции следует принять $H = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$, а h—некоторое фиксированное число. В частном случае, когда $Q = \infty$, а $\sigma_* = 0$, регулятор называется идеальным и его уравнение имеет вид: $\sigma = 0$.

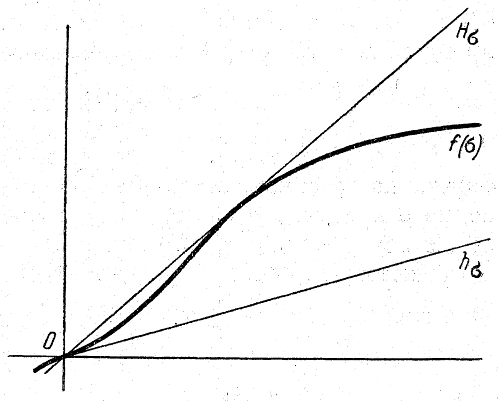

Рис. 1

Определенный выше класс функций $f(\sigma)$ охватывает характеристики подавляющего числа исполнительных органов. В пользу описания этих характеристик единым классом функций говорит одно весьма важное обстоятельство. Дело в том, что обычно определение $f(\sigma)$ проводится экспериментально, путем графической записи скорости хода исполнительного органа в так называемом статическом режиме, когда σ принимает фиксированные, дискретные значения. При этой записи получается, вообще говоря, семейство функций $f(\sigma)$, зависящее от приложенной к исполнительному органу фиксированной нагрузки.

Однако фактические условия работы регулятора включают в себя непрерывное изменение действующей нагрузки. Ее действие сводится к значительному искажению функции $f(\sigma)$, записанной в статическом режиме. Это искажение не может быть учтено в процессе регулирования. С другой стороны, особенно сильные искажения функции $f(\sigma)$ происходят от колебания уровня энергии внешнего источника питания регулятора.

Следовательно, в каждой частной задаче невозможно строго фиксировать функцию $f(\sigma)$, тем более проводить ее корректную линеаризацию, строго фиксируя коэффициент линейного приближения. Приведенные рассуждения показывают, что в подобных задачах теории автоматического регулирования всегда можно определить функцию $f(\sigma)$ лишь с точностью до ее принадлежности к классу (A) или подклассу (A′).

Этого определения вполне достаточно, если основные задачи теории автоматического регулирования — задачи устойчивости и качества — решать на базе прямого метода Ляпунова.

Обозначим через R множество параметров p_α регуляторов, для которых очевидное решение (2)

$$\eta_1^* = 0, \ldots, \quad \eta_n^* = 0, \quad \xi^* = 0 \tag{2}$$

уравнений (1) устойчиво при любых возмущениях и любой функции $f(\sigma)$ класса (A) или подкласса (A′), т. е абсолютно устойчиво.

Требуется определить в R подмножество R', на котором время условного затухания переходного процесса минимально [1,4].

2. В работах [3,4] было дано линейное неособое преобразование уравнений (1) к канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= -r_s x_s + \sigma \qquad (s = 1, \ldots, n), \\ \dot{\sigma} &= \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha x_\alpha - \rho\sigma - f(\sigma). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь r_s — простые корни уравнения

$$D(r) = | b_{\alpha\beta} + n_\alpha p_\beta + r\delta_{\alpha\beta} | = 0, \tag{4}$$

а β_α, ρ — известные постоянные, определяемые по ходу выполнения преобразования.

Таким образом, вопрос о сходимости переходного процесса в системе (1) к положению равновесия сведен к вопросу о сходимости переходного процесса в системе (3) к положению равновесия

$$x_1^* = 0, \ldots, x_n^* = 0, \sigma^* = 0. \tag{5}$$

Мы совершим еще одно преобразование уравнений (3) к такой форме, из рассмотрения которой решение вопроса о сходимости переходного процесса в системе будет следовать прямо. Допустим, что r_s — вещественные числа; тогда переменные x_s — вещественные.

Рассмотрим систему $n+2$ переменных, определенных равенствами

$$\begin{gathered} V^2 = F^2 + S\sigma^2, \\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k}{V\sqrt{a_{ii}}} = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\sqrt{S}\sigma}{V} = \zeta, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$F^2 = \sum_{\alpha\beta}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \qquad S > 0. \tag{7}$$

Форма F^2 является знакоопределенной и всюду положительной. Ее коэффициенты подчиняются лишь неравенствам Сильвестра

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{k1}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

а в остальном остаются произвольными.

По своему геометрическому смыслу величина V^2 может быть принята в качестве эвклидовой метрики пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$, σ и является длиной вектора, проведенного из начала координат к изображающей точке $M(x_1, \ldots, x_n, \sigma)$, а ζ_i, ζ — его направляющие косинусы.

В случае $a_{ik} = \delta_{ik}$, $S = 1$ преобразованием (6) пользовался В. С. Ведров при изучении вопросов устойчивости движения по Ляпунову в так называемых особых случаях [5].

Преобразование (6) является взаимно однозначным и в силу предположения (8) может быть разрешено относительно старых переменных. Действительно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = V\sqrt{a_{ii}}\,\zeta_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Рассмотрим определители

$$\nabla_r = V \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1r-1}, \sqrt{a_{11}}\,\zeta_1, a_{1r+1}, \ldots, a_{1n}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}, \ldots, a_{nr-1}, \sqrt{a_{nn}}\,\zeta_n, a_{nr+1}, \ldots, a_{nn}) \end{vmatrix}$$

и пусть Δ_{rs} — алгебраические дополнения элементов с номером s

столбца с номером r. Находим

$$x_r = \frac{V}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} \Delta_{sr} \sqrt{a_{ss}}\, \zeta_s \qquad (r = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Найдем уравнения для новых переменных. Имеем

$$2V\dot{V} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(r_\alpha + r_\beta) x_\alpha x_\beta + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\left[S\beta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\right] x_\alpha \sigma -$$
$$- 2(\rho + h) S\sigma^2 - 2\, S\sigma\varphi(\sigma).$$

Пользуясь равенствами (10), придадим этому уравнению вид:

$$2V\dot{V} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(r_\alpha + r_\beta)\left(\frac{V}{\Delta}\right)^2 \sum_{r,s=1}^{n} \Delta_{s\alpha}\Delta_{r\beta}\sqrt{a_{ss}a_{rr}}\, \zeta_r\zeta_s +$$
$$+ 2\sum_{\alpha=1}^{n}\left(S\beta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\right)\frac{V^2}{\Delta\sqrt{S}} \sum_{s=1}^{n} \Delta_{s\alpha}\sqrt{a_{ss}}\, \zeta_s\zeta -$$
$$- 2V^2(\rho + h)\zeta^2 - 2V\sqrt{S}\,\zeta\varphi(V\zeta).$$

Если обозначить через W вещественную квадратичную форму :

$$W = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{s,r=1}^{n}\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\frac{r_\alpha + r_\beta}{2}\Delta_{s\alpha}\Delta_{r\beta}\sqrt{a_{ss}a_{rr}}\right]\zeta_s\zeta_r -$$
$$- \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(S\beta_\alpha + \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}\right)\frac{\Delta_{s\alpha}\sqrt{a_{ss}}}{\Delta\sqrt{S}}\right]\zeta_s\zeta + (\rho + h)\zeta^2, \tag{11}$$

то получим уравнение

$$\dot{V} = -WV - \frac{\sqrt{S}\zeta}{V}\varphi(V\zeta). \tag{12}$$

Далее, дифференцируя ζ_k, ζ (6) и пользуясь уравнениями (10), (12), находим

$$\dot{\zeta}_i = -\frac{1}{\Delta\sqrt{a_{ii}}}\sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{sk} r_k \sqrt{a_{ss}}\right]\zeta_s + \frac{\Sigma a_{ik}}{\sqrt{Sa_{ii}}}\zeta +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}\left[W + \frac{\sqrt{S}\zeta}{V}\varphi(V\zeta)\right]\zeta_i,$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\sqrt{S}}{\Delta}\left(\sum_{sr}\Delta_{sr}\beta_r\sqrt{a_{ss}}\right)\zeta_s - \frac{\rho}{\sqrt{S}}\zeta - \frac{\sqrt{S}}{V} f(V\zeta). \tag{13}$$

Совокупные уравнения (12), (13) имеют первый интеграл, значение которого для формулированной здесь задачи выяснится ниже. Этот интеграл представляет собой известное соотношение между направляющими косинусами. Он получается из первого соотношения (6) при подстановке туда величин (10). Выполнив операцию подстановки, находим этот интеграл:

$$\sum_{s,r=1}^{n} A_{rs}\zeta_r\zeta_s + \zeta^2 = \Delta^2, \tag{14}$$

где

$$A_{rs} = \sqrt{a_{rr}a_{ss}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\Delta_{s\alpha}\Delta_{r\beta}. \tag{15}$$

3. Переходя к вопросу об устойчивости решения (5), замечаем, что в силу очевидного геометрического значения новых переменных этот вопрос однозначно разрешается поведением лишь одной функции V, определяемой уравнением (12); при этом исследование поведения функций ζ_k, ζ может быть опущено.

Поскольку преобразование (6) сохраняет свойства (2) функции $f(\sigma)$, то для решения интересующего нас вопроса достаточно рассмотреть лишь укороченное уравнение (12), имеющее вид:

$$\dot{V} = -WV.$$

Откуда находим

$$V < V(0)\, e^{-\int W dt}. \tag{16}$$

Устойчивости решения (5) отвечает любая знакоположительная функция W.

Составим для функции W неравенства Сильвестра. Имеем

$$\begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{k1}, & \ldots, & b_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1n}, & Q_1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}, & \ldots, & b_{nn}, & Q_n \\ Q_1, & \ldots, & Q_n, & \rho + h \end{vmatrix} > 0, \tag{17}$$

где для краткости обозначено

$$b_{rs} = \frac{\sqrt{a_{ss}a_{rr}}}{\Delta^2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{r_\alpha + r_\beta}{2} a_{\alpha,\beta}\Delta_{s\alpha}\Delta_{r\beta} \quad (r, s, k = 1, \ldots, n),$$

$$Q_k = -\frac{\sqrt{a_{kk}}}{2\Delta\sqrt{S}} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(S_{\beta\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\right)\Delta_{k\alpha}. \tag{18}$$

Таким образом доказана теорема: если параметры регулятора выбираются согласно неравенствам (17), то регулируемая система (1), характеризуемая простыми и вещественными $r_1, \ldots, r_n$, абсолютно устойчива, какова бы ни была вещественная, знакоопределенная и всюду положительная форма F^2 (7).

4. Переходя к вопросу качества регулируемых систем, рассмотрим неравенство (16). Очевидно, интенсивность затухания переходного процесса при выполнении неравенств (17) определяется значениям функции W, которые она принимает на замкнутой поверхности (14). Следовательно, аналогично тому, как это сделано Н. Г. Четаевым [1] для линейных систем, решение задачи качества регулярных систем данного класса сведено к отысканию экстремальных значений функции W (11), на поверхности (14).

Как известно [6], эти значения функции W равны значениям корней уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda A_{11}, \ldots, b_{1n}-\lambda A_{1n}, Q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}-\lambda A_{n1}, \ldots, b_{nn}-\lambda A_{nn}, Q_n \\ Q_1, \ldots, Q_n, \quad \rho+h-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Причем при выполнении неравенств (17) эти корни всегда вещественны и положительны.

Пусть эти корни будут $\lambda_1, \ldots \lambda_n$; они расположены в порядке возрастания.

Следовательно, переходный процесс затухает не медленнее, чем убывает функция $e^{\lambda_1 t}$, и не быстрее, чем убывает функция $e^{\lambda_n t}$, т. е.

$$V(0)\, e^{\lambda_1 t} < V < V(0)\, e^{\lambda_n t}. \tag{20}$$

Развернем уравнение (19) в строку:

$$B_0\lambda^{n+1} + B_1\lambda^n + \ldots + B_n\lambda + B_{n+1} = 0. \tag{21}$$

Его коэффициенты зависят от параметров регулируемой системы (1) и коэффициентов формы (6). Допустим, что эти коэффициенты как либо выбраны и зафиксированы. Тогда искомое подмножество R' определится теми значениями параметров p_α регулятора в R, для которых наименьший вещественный и положительный корень λ_1 уравнения (21) является наибольшим.

Итак, доказана теорема: параметры регулятора p_α, для которых регулируемая система (1) обладает наилучшим качеством, образуют подмножество R', на котором наименьший вещественный корень уравнения (21) является наибольшим.

5. Все сказанное выше можно повторить и в том случае, если среди чисел $r_1, \ldots, r_n$ имеются комплексные сопряженные.

Для этого следовало бы пользоваться эрмитовой метрикой унитарного пространства переменных, определяющих квадрат длины вектора изображающей точки M до начала координат.

Однако на излагаемом ниже примере показывается, каким образом можно избежать этих рассуждений и свести задачу к рассмотренному случаю.

6. Рассмотрим пример системы, описываемой уравнениями

$$T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + k\psi + \mu = 0,$$
$$\dot{\mu} = f^*(\sigma), \qquad \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{l}\mu, \tag{22}$$

где T^2, U, k — постоянные объекта регулирования, G, E, a, l — постоянные регулятора.

Для системы (22) числа r_1, r_2, β_1, β_2 определяются равенствами

$$r_1 + r_2 = \frac{U+lE}{\sqrt{l(T^2+lG^2)}}, \qquad r_1 r_2 = \frac{k+al}{l};$$
$$\beta_1 = \frac{1}{r_2-r_1}(\overline{p}_1 - r_1\overline{p}_2), \qquad \beta_2 = \frac{1}{r_2-r_1}(-\overline{p}_1 + r_2\overline{p}_2); \tag{23}$$
$$\overline{p}_1 = -\frac{(k+al)(E-pG^2)}{\sqrt{l(T^2+lG^2)}}, \qquad \overline{p}_2 = a - qG^2 - \frac{(U+lE)(E-pG^2)}{T^2+lG^2}.$$

Неравенства (8) имеют вид:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \qquad \Delta = \Delta_2 = a_{11}a_{12} - a_{12}^2 > 0. \tag{24}$$

Далее, равенства (10) имеют вид:

$$x_1 = \frac{V}{\Delta}\,[a_{22}\sqrt{a_{11}}\,\zeta_1 - a_{21}\sqrt{a_{22}}\,\zeta_2], \tag{25}$$
$$x_2 = \frac{V}{\Delta}[-a_{12}\sqrt{a_{11}}\,\zeta_1 + a_{11}\sqrt{a_{22}}\,\zeta_2].$$

По формулам (14) находим

$$A_{11} = A_{22} = a_{11}a_{22}\Delta, \qquad A_{12} = A_{21} = a_{12}\sqrt{a_{11}a_{22}}\,\Delta \tag{26}$$

и, следовательно, уравнение поверхности (14) имеет вид:

$$A_{11}\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \frac{2a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\zeta_1\zeta_2\right) + \zeta^2 = \Delta^2. \tag{27}$$

Нетрудно установить, что (27) есть уравнение трехосного эллипсоида. Далее, по формулам (18) имеем

$$b_{11} = \frac{r_1}{\Delta^2}A_{11}, \quad b_{22} = \frac{r_2}{\Delta^2}A_{22}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{r_1 + r_2}{2\Delta^2}A_{12},$$
$$Q_1 = -\frac{1}{2\Delta}\sqrt{\frac{a_{11}}{S}}\,[S(\beta_1 a_{22} - \beta_2 a_{12}) + \Delta], \tag{28}$$
$$Q_2 = -\frac{1}{2\Delta}\sqrt{\frac{a_{22}}{S}}\,[S(\beta_2 a_{11} - \beta_1 a_{21}) + \Delta].$$

Пользуясь формулами (26), (28), напишем неравенства (17)

$$b_{11} = \frac{r_1}{\Delta}a_{11}a_{22} > 0,$$
$$N = \frac{a_{11}a_{22}}{\Delta^2}\left[r_1 r_2 a_{11}a_{22} - \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 a_{12}^2\right] > 0, \tag{29}$$
$$N(\rho + h) > \frac{a_{11}a_{22}}{\Delta}\left[r_2 Q_1^2 + r_1 Q_2^2 + (r_1 + r_2)\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}Q_1 Q_2\right].$$

Выполнение неравенств (29) гарантирует устойчивость системы (22). Рассмотрим эти неравенства. Очевидно, первое из них выполняется всегда, при любой форме F, отвечающей условиям (24).

Второе неравенство налагает известное ограничение на выбор коэффициентов формы F.

Если $r_1 r_2 > 0$, то это неравенство при вещественных $r_1 r_2$ можно записать как

$$\frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}^2} > \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 \frac{1}{r_1 r_2} > 1. \tag{30}$$

Очевидно, это неравенство также не является существенным.

Наконец, для третьего неравенства получаем (31)

$$(\rho + h)\left[r_1 r_2 a_{11}a_{12} - \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 a_{12}^2\right] > \Delta\left[r_2 Q_1^2 + r_1 Q_2^2 + \frac{(r_1 + r_2)\,a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{12}}}Q_1 Q_2\right].$$

Множество R параметров p_α регулятора, определяемых неравенством (31), гарантирует устойчивость системы при любых возмущениях.

В частном случае, когда форма F выбирается согласно условию $a_{12}=0$, неравенство (31) принимает более простой вид:

$$r_1 r_2 (\rho + h) > [r_2 Q_1^2 + r_1 Q_2^2]. \tag{32}$$

Наконец, напишем уравнение (21). Имеем в случае $a_{12}=0$

$$\lambda^3 - \left(\rho + h + \frac{r_1 + r_2}{\Delta^2}\right)\lambda^2 + \left[\frac{r_1 r_2}{\Delta^2} + (\rho + h)\frac{r_1 + r_2}{\Delta^2} - \frac{Q_1^2}{A_{11}} - \frac{Q_2^2}{A_{22}}\right]\lambda - \\ - \frac{r_1 r_2 (\rho + h)}{\Delta^4} = 0. \tag{33}$$

Теперь допустим, что r_1, r_2 — комплексные сопряженные числа, $r_1 = p + qi$, $r_2 = p - qi$. Обозначим $x_1 = u + iv$, $x_2 = u - iv$, $\beta_1 = a + ib$, $\beta_2 = a - ib$. Тогда уравнениям (22) можно придать вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -pu + qv + \sigma, \\ \dot{v} &= -pv - qu, \\ \dot{\sigma} &= 2au - 2bv - \rho\sigma - f(\sigma). \end{aligned} \tag{34}$$

По отношению к вещественным переменным u, v, σ мы можем воспользоваться попрежнему вещественной метрикой V^2, положив

$$V^2 = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + S\sigma^2$$

и подчинив вещественные величины a_{11}, a_{12}, a_{22} условиям (24). Тогда, повторив предыдущие рассуждения, находим

$$\begin{gathered} b_{11} = \frac{a_{11}}{\Delta}(pa_{22} + qa_{12}), \qquad b_{22} = \frac{a_{22}}{\Delta}(pa_{11} - qa_{12}), \\ b_{12} = -\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{2\Delta}(2a_{12}p - a_{22}q + a_{11}q), \\ Q_1 = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{2\Delta S}[\Delta + 2S^2(a_{22}a + a_{12}b)], \quad Q_2 = \frac{S}{\Delta}\sqrt{a_{22}}(a_{12}a + a_{11}b). \end{gathered} \tag{35}$$

Условиями устойчивости системы будут неравенства

$$\begin{gathered} pa_{22} + qa_{12} > 0, \\ N(a_{11}a_{22})\frac{(pa_{22} + qa_{12})(pa_{11} - qa_{12})}{\Delta^2} > \frac{(2a_{12}p + qa_{11} - qa_{22})}{\Delta^2 4} > 0, \\ N(\rho + h) > b_{11}Q_2^2 + b_{22}Q_1^2 - 2b_{12}Q_1Q_2. \end{gathered} \tag{36}$$

В частном случае, когда $a_{12}=0$ и $a_{11}=a_{22}$, имеем лишь последнее неравенство

$$p(\rho + h) > (Q_1^2 + Q_2^2). \tag{37}$$

В этом же случае легко находим уравнение для экстремальных значений формы V. Оно имеет вид:

$$(p - \lambda)^2(\rho + h - \lambda) - (p - \lambda)(Q_1^2 + Q_2^2) = 0. \tag{38}$$

Подмножество R' параметров регулятора $[R' \in R]$, на котором наименьший корень уравнения (33) или уравнения (38) принимает наибольшее значение, дает решение поставленной задачи о качестве.

Поступила в редакцию
6 июня 1953 г.

Цитированная литература

1. Четаев Н. Г. О времени переходного процесса в линейных системах. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
2. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГТТИЛ, 1950.
3. Летов А. М. Собственно неустойчивые регулируемые системы. ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.
4. Летов А. М. Граничные значения наименьшего характеристического числа одного класса регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.
5. Ведров В. С. Об устойчивости движения. Труды ЦАГИ, вып. 327, 1937.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 1. ГИТТЛ, 1951.