М. А. Осипова, А. Б. Талалаева, Г. Ш. Цициашвили, Кооперативные эффекты в замкнутых сетях массового обслуживания, *Дальневост. матем. журн.*, 2010, том 10, номер 1, 66–69

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 66–69
УДК 519.217
MSC2000 60J57

© М.А. Осипова, А.Б. Талалаева, Г.Ш. Цициашвили*

Кооперативные эффекты в замкнутых сетях массового обслуживания

В работе исследуются кооперативные эффекты в объединенной замкнутой сети массового обслуживания. Устанавливается связанный с кооперативными эффектами фазовый переход, аналогичный закону нуля и единицы в теории вероятностей.

Ключевые слова: *замкнутая сеть массового обслуживания, фазовый переход.*

В работе построена модель объединенной замкнутой сети. При этом n копий замкнутой сети с одноканальными узлами были объединены так, что один узел (узел с номером 0) построенной сети – n-канальная система массового обслуживания, а другие узлы – одноканальные системы с интенсивностями обслуживания, увеличенными в n раз.

Основной задачей работы является исследование предельной при $n \to \infty$ вероятности P_n нахождения элементов на всех приборах узла 0. На множестве параметров рассматриваемой сети для предельной вероятности P_n удалось обнаружить явление типа фазового перехода, построена граница между 0 и 1.

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания с узлами $0, 1, ..., m$, содержащими $r_0 = n,\ r_1 = 1, ..., r_m = 1$ каналов соответственно. В системе циркулирует постоянное число заявок $M = \alpha n$, и извне заявки не поступают, $\mu_0 = n\nu,\ \mu_1 = n\nu_1, ..., \mu_m = n\nu_m$ — интенсивности обслуживания заявок в узлах. Рассмотренную модель замкнутой сети можно интерпретировать как результат объединения n копий замкнутых сетей с параметрами $M = \alpha,\ r_0 = 1,\ r_1 = 1, ..., r_m = 1,\ \mu_0 = \nu,\ \mu_1 = \nu_1, ..., \mu_m = \nu_m$. При таком объединении n одноканальных узлов с номером 0 превращаются в n-канальный узел с тем же номером, а n одноканальных узлов с номером i и интенсивностями обслуживания ν_i превращаются в одноканальный узел с тем же номером и интенсивностью обслуживания $n\nu_i,\ 1 \le i \le m$.

Пусть перемещения заявок в сети описываются неразложимой маршрутной матрицей $\Theta = ||\theta_{ij}||_{i,j=0}^{m}$. Тогда для любого $\lambda_0 = \lambda > 0$ решение $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ системы

$$\Lambda = \Lambda\Theta \tag{1}$$

существует и единственно [1]. Число заявок в узлах объединенной сети описывается эргодическим [2, глава 2] дискретным марковским процессом $\boldsymbol{y}(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_m(t))$ с множеством состояний $Y = \{\boldsymbol{n} = (n_0, n_1, ..., n_m) :\ n_i \ge 0,\ i = 0, 1, ..., m, \sum_{i=0}^{m} n_i = M\}$, стационарное распределение которого [1, § 2] вычисляется по формуле

$$\Pi(\boldsymbol{n}) = C^{-1} \prod_{i=0}^{m} a_i(n_i),\ C = \sum_{\boldsymbol{n}\in Y} \prod_{i=0}^{m} a_i(n_i),\ \boldsymbol{n} \in Y, \tag{2}$$

[1]Дальневосточный государственный технический университет, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская 10; Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: mao1975@list.ru; guram@iam.dvo.ru

$$a_i(0) = 1,\ a_i(n_i) = \prod_{k=1}^{n_i} \frac{\lambda_i}{\min(k,\ r_i)\mu_i}\ ,\ 0 < n_i \le M.$$

Нашей задачей является изучение предельного при $n \to \infty$ распределения

$$P_n = \lim_{t\to\infty} P(y_0(t) \ge n). \tag{3}$$

Положим в системе (1) $\lambda = 1$ и обозначим в этом случае ее решение $\Lambda_1 = (1, \lambda_1, ..., \lambda_m)$. Тогда при $\lambda = n\nu$ решение системы (1) имеет вид

$$\Lambda_{n\nu} = (n\nu, n\nu\lambda_1, ..., n\nu\lambda_m).$$

Обозначим

$$\rho_1 = \frac{n\nu\lambda_1}{n\mu_1} = \frac{\nu\lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \rho_m = \frac{n\nu\lambda_m}{n\mu_m} = \frac{\nu\lambda_m}{\mu_m}.$$

Теорема 1. *Если*

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_m > 0, \tag{4}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \begin{cases} 0, & \rho_1 > 1, \\ 1, & \rho_1 < 1, \end{cases} \tag{5}$$

причем сходимость в соотношении (5) геометрическая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2), (3) $P_n = \sum_{k=n}^{\alpha n} \pi_n(k)$, где

$$\pi_n(k) = \sum_{\substack{n_1, ..., n_m \ge 0, \\ n_1 + ... + n_m = \alpha n - k}} \Pi((k, n_1, \ldots, n_m)) = C\psi_n(k) D_n(k),$$

$$\psi_n(k) = \begin{cases} n^n/n!, \ k > n, \\ n^k/k!, \ k \le n, \end{cases} \quad D_n(k) = \sum_{\substack{n_1, ..., n_m \ge 0, \\ n_1 + ... + n_m = \alpha n - k}} \prod_{i=1}^m \rho_i^{n_i}, \quad C^{-1} = \sum_{\substack{k, n_1, ..., n_m \ge 0, \\ k + n_1 + ... + n_m = \alpha n}} \psi_n(k) D_n(k).$$

В силу [3, теорема 1.31] выполняется равенство

$$D_n(k) = \sum_{j=1}^m c_j \rho_j^{\alpha n + m - k - 1},\ \ c_j = \prod_{k \ne j} \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_j}\right)^{-1},\ 1 \le j \le m. \tag{6}$$

Пусть $\rho_1 > 1$, построим оценку $\pi_n(k),\ k \ge n$, полагая

$$0 < \varepsilon < \min(\alpha - 1, 1 - 1/\rho_1).$$

Тогда очевидно, что ($[a]$ — целая часть вещественного числа a)

$$\pi_n(k) \le \frac{\pi_n(k)}{\pi_n([n(1-\varepsilon)])} = \frac{n^{n-[n(1-\varepsilon)]}[n(1-\varepsilon)]!\ D_n(k)}{n!\ D_n([n(1-\varepsilon)])},$$

где, в свою очередь,

$$D_n(k) \le c\rho_1^{\alpha n + m - k - 1},\ c = \sum_{j=1}^m |c_j|.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ можно выбрать $N = N(\varepsilon) :\ \forall n > N$

$$\left(\frac{\rho_j}{\rho_1}\right)^{\alpha n + m - [n(1-\varepsilon)] - 1} < \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$D_n([n(1-\varepsilon)]) > \rho_1^{\alpha n+m-[n(1-\varepsilon)]-1}(c_1 - c(m-1)\varepsilon).$$

Таким образом, при $k \geq n > N$

$$\pi_n(k) \leq \frac{n^{n-[n(1-\varepsilon)]} c \rho_1^{\alpha n+m-k-1}}{n(n-1)\dots([n(1-\varepsilon)]+1)\rho_1^{\alpha n+m-[n(1-\varepsilon)]-1}(c_1 - c(m-1)\varepsilon)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{n-[n(1-\varepsilon)]} \frac{c\rho_1^{[n(1-\varepsilon)]-k}}{c_1 - c(m-1)\varepsilon} \leq \left(\frac{1}{\rho_1(1-\varepsilon)}\right)^{n\varepsilon} \frac{c}{(1-\varepsilon)(c_1 - c(m-1)\varepsilon)}.$$

Тогда

$$P_n = \sum_{k=n}^{\alpha n} \pi_n(k) \leq \left(\frac{1}{\rho_1(1-\varepsilon)}\right)^{n\varepsilon} \frac{c(\alpha-1)n}{(1-\varepsilon)\,(c_1 - c(m-1)\varepsilon)} \to 0,\ n \to \infty.$$

Пусть теперь $\rho_1 < 1$, построим оценку $\pi_n(k),\ 0 \leq k < n$, полагая

$$0 < \varepsilon < \min(1, \alpha - 1, 1/\rho_1 - 1).$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем $N = N(\varepsilon):\ \forall n > N$

$$\left(\frac{\rho_j}{\rho_1}\right)^{\alpha n+m-[n(1+\varepsilon)]-1} < \varepsilon.$$

Следовательно, $D_n([n(1+\varepsilon)]) > \rho_1^{\alpha n+m-[n(1+\varepsilon)]+1}(c_1 - c(m-1)\varepsilon)$. Тогда

$$\pi_n(k) \leq \frac{\pi_n(k)}{\pi_n([n(1+\varepsilon)])} = \frac{n^k [n(1+\varepsilon)]!\, D_n(k)}{k! n^{[n(1+\varepsilon)]} D_n([n(1+\varepsilon)])} \leq$$

$$\leq \frac{n^k [n(1+\varepsilon)]! c\rho_1^{[n(1+\varepsilon)]-n}}{k! n^{[n(1+\varepsilon)]}(c_1 - c(m-1)\varepsilon)} \leq \frac{n^k n! [n(1+\varepsilon)]^{[n(1+\varepsilon)]-n} c\rho_1^{[n(1+\varepsilon)]-n}}{k! n^n n^{[n(1+\varepsilon)]-n}(c_1 - c(m-1)\varepsilon)} \leq$$

$$\leq \frac{[n(1+\varepsilon)]^{[n(1+\varepsilon)]-n} c\rho_1^{[n(1+\varepsilon)]-n}}{n^{[n(1+\varepsilon)]-n}(c_1 - c(m-1)\varepsilon)} \leq \frac{(n(1+\varepsilon))^{n\varepsilon} c\rho_1^{n\varepsilon}}{n^{n\varepsilon}(c_1 - c(m-1)\varepsilon)} = \frac{c(\rho_1(1+\varepsilon))^{n\varepsilon}}{c_1 - c(m-1)\delta}.$$

Таким образом,

$$1 - P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_n(k) \leq \frac{nc(\rho_1(1+\varepsilon))^{n\varepsilon}}{c_1 - c(m-1)\varepsilon} \to 0,\ n \to \infty.$$

Соотношение (5) доказано полностью.

Замечание 1. *В данной модели узел 0 может рассматриваться как совокупность рабочих мест, перед которыми выстраивается очередь из элементов, находящихся в ненагруженном резерве. Однако приведенные в теореме 1 результаты нетрудно перенести на случай, когда стоящие в очереди на рабочие места элементы находятся в нагруженном или недогруженном резерве.*

Замечание 2. *В силу [3, теорема 1.32] теорема 1 справедлива, если соотношение (4) заменить условиями*

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{m_1} = \rho^{(1)} > \rho_{m_1+1} = \ldots = \rho_{m_1+m_2} = \rho^{(2)} > \rho_{m_1+m_2+1} = \ldots >$$

$$\rho_{m_1+\ldots+m_{l-1}+1} = \ldots = \rho_{m_1+\ldots+m_l} = \rho^{(l)} > 0,\ m_1 + \ldots + m_l = m.$$

Замечание 3. *Теорема 1 остается верной и в случае $M = [\alpha n]$, где $0 < \alpha < \infty$.*

Список литературы

[1] Г. П. Башарин, А. Л. Толмачев, “Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем”, *Итоги науки и техники*, сер. Теория вероятностей, ВИНИТИ, М., 1983, 3–119.

[2] Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко, *Теория массового обслуживания*, Высш. школа, М., 1982.

[3] R. Serfozo, *Introduction to Stochastic Networks*, Springer Verlag, New York, 1999.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 6 октября 2009 г.

Osipova M.A., Talalaeva A.B., Tsitsiashvili G.Sh. Cooperative effects in closed queueing networks. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 66–69.

ABSTRACT

Cooperative effects are investigated in an aggregated closed queueing network. A phase transition connected with the cooperative effects and similar to the law of zero and one in the probability theory is established.

Key words: *a closed queueing network, a phase transition.*