

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. M. Postnikov, Magic Squares,
Math. Ed., 1997, Issue 2, 54–82

<https://www.mathnet.ru/eng/mo241>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

June 16, 2025, 09:54:31



Магические квадраты нечетного порядка*

ВВЕДЕНИЕ

О СРАВНЕНИЯХ

1. Сравнения и действия над ними

Пусть n — произвольное положительное целое число. Целые (не обязательно положительные) числа a и b называются *сравнимыми по модулю n* , если они отличаются друг от друга на число, кратное числу n , т. е. если существует такое целое число t , что

$$a = b + nt. \quad (1)$$

В этом случае пишут

$$a \equiv b \pmod{n}. \quad (2)$$

Согласно этому определению число a тогда и только тогда делится на n , когда

$$a \equiv 0 \pmod{n}.$$

Свойства сравнений (2) во многом аналогичны свойствам равенств. Например, аналогично отношению равенства отношение сравнения рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.

$$a \equiv a \pmod{n};$$

$$\text{если } a \equiv b \pmod{n}, \text{ то } b \equiv a \pmod{n};$$

$$\text{если } a \equiv b \pmod{n} \text{ и } b \equiv c \pmod{n}, \text{ то } a \equiv c \pmod{n}.$$

Первые два свойства очевидны. Для доказательства третьего достаточно заметить, что из равенств $a = b + nt$, $b = c + ns$ вытекает равенство $a = c + n(t + s)$.

Далее, аналогично равенствам сравнения можно почленно складывать, вычитать и перемножать. Другими словами, если имеют место сравнения

$$a \equiv b \pmod{n}, \quad c \equiv d \pmod{n},$$

то имеют место и сравнения

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n},$$

$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$

*Введение и первые две главы книги "Магические квадраты", М. Наука, 1964.

Действительно, если

$$a = b + nt, \quad c = d + ns,$$

то

$$a \pm c = b \pm d + n(t \pm s),$$

$$ac = bd + n(td + bs + nts).$$

В частности, если $a \equiv b \pmod{n}$, то для любого k

$$a \pm k \equiv b \pm k \pmod{n},$$

$$ak \equiv bk \pmod{n}.$$

Аналогия между сравнениями и равенствами нарушается только для деления. В то время как из равенства $ka = kb$, где $k \neq 0$, всегда вытекает равенство $a = b$, из аналогичного сравнения

$$ak \equiv bk \pmod{n} \tag{3}$$

сравнение

$$a \equiv b \pmod{n}, \tag{4}$$

вообще говоря, не вытекает. Однако

если число k взаимно просто с модулем n , то из сравнения (3) вытекает сравнение (4).

Другими словами,

сравнения можно сокращать на числа, взаимно простые с модулем.

Для доказательства достаточно заметить, что сравнение (3) равносильно делимости на n разности $ka - kb = k(a - b)$, и учесть, что при k взаимно простом с n число $k(a - b)$ тогда и только тогда делится на n , когда на n делится число $a - b$, т. е. когда имеет место сравнение (4).

Пусть теперь числа n и k не взаимно просты, и пусть (n, k) — их наибольший общий делитель. (Символ (n, k) для наибольшего общего делителя общепринят в научной литературе, и мы будем им впредь пользоваться без каких-либо оговорок.) Оказывается, что из сравнения (3) вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod{m},$$

где $m = n/(n, k)$. Действительно, если число $k(a - b)$ делится на n , то число $a - b$ делится на m .

При $k = (n, k)$ мы получаем отсюда, что
из сравнения

$$ka \equiv kb \pmod{km} \tag{5}$$

вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod{m}. \tag{6}$$

Ясно, что и, наоборот, из сравнения (6) вытекает сравнение (5).

2. Вычеты, полные системы вычетов

Из двух сравнимых по модулю n чисел каждое по отношению к другому называется его *вычетом*. Таким образом, каждое число имеет бесконечно много вычетов, отличающихся друг от друга на числа, кратные модулю. Среди всех вычетов данного числа a особое значение имеет вычет r , для которого

$$0 \leq r < n.$$

Этот вычет называется *наименьшим неотрицательным вычетом* числа a по модулю n . Он совпадает с остатком от деления числа a на модуль и поэтому всегда существует и определяется (по данному числу a) единственным образом.

Легко видеть, что два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n , когда их наименьшие неотрицательные вычеты совпадают (в одну сторону это следует из транзитивности отношения сравнимости, а в другую — из того, что наименьшие неотрицательные вычеты совпадают с остатками от деления на n). Другими словами, два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n , когда при делении на n они приводят к одинаковым остаткам. Ввиду этого сравнимые между собой числа иногда называют также *равноостаточными*.

Система целых чисел называется *полной системой вычетов по модулю n* , если выполнены следующие два условия:

1°. Любое целое число сравнимо по модулю n с одним из чисел этой системы.

2°. Различные числа этой системы не сравнимы друг с другом по модулю n .

Условие 2° обеспечивает то, что с каждым целым числом сравнимо только одно число рассматриваемой системы.

Примером полной системы вычетов по модулю n может служить система

$$0, 1, \dots, n - 1.$$

Эта система называется *полной системой наименьших неотрицательных вычетов*.

Очевидно, что любые две полные системы вычетов состоят из одного и того же числа элементов (ибо каждое число одной системы сравнимо с одним и только одним числом второй). Поскольку система наименьших неотрицательных вычетов состоит из n чисел, отсюда вытекает, что

любая полная система вычетов по модулю n состоит из n чисел.

Оказывается, что это свойство вместе со свойством 2° полностью характеризует полные системы вычетов, т.е.

любая система n целых чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \tag{1}$$

не содержащая различных сравнимых между собой чисел, является полной системой вычетов по модулю n .

Действительно, наименьшие неотрицательные вычеты чисел системы (1) исчерпывают всю систему наименьших неотрицательных вычетов (их n и все они различны). Поэтому для каждого целого числа a в системе (1) найдется число a_i ,

имеющее тот же наименьший неотрицательный вычет, что и число a , и потому сравнимое с a . Таким образом, система (1) обладает свойством 1° и потому является полной системой вычетов.

Из доказанного утверждения немедленно вытекает, что для любого целого числа b , наряду с системой (1), полной системой является так же и система

$$a_1 + b, \quad a_2 + b, \quad \dots, \quad a_n + b. \quad (2)$$

В самом деле, все числа системы (2) не сравнимы друг с другом по модулю n (если $a_i + b \equiv a_j + b$, то $a_i \equiv a_j$ и потому $a_i = a_j$) и их ровно n .

Аналогично, если число a взаимно просто с n , то, наряду с системой (1), полной системой вычетов является и система

$$aa_1, \quad aa_2, \quad \dots, \quad aa_n.$$

Действительно, если $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$, то $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ и потому $a_i = a_j$, а значит и $aa_i = aa_j$.

Последние два утверждения можно объединить в одно: если число a взаимно просто с n , то для любого числа b , наряду с системой (1), полной системой вычетов является также и система

$$aa_1 + b, \quad aaa_2 + b, \quad \dots, \quad aa_n + b.$$

3. Вычеты значений линейной функции

Доказанное в конце предыдущего пункта утверждение можно сформулировать также следующим образом:

если коэффициент a линейной функции $ax + b$ взаимно прост с n , то при x , пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n , соответствующие значения функции $ax + b$ также пробегают полную систему вычетов по модулю n , (уже, конечно, другую).

Фиксируя внимание лишь на полной системе наименьших неотрицательных вычетов, это предложение можно сформулировать еще и так:

если коэффициент a линейной функции $ax + b$ взаимно прост с n , то при $x = 0, 1, \dots, n-1$ остатки от деления на n соответствующих значений функции $ax + b$ пробегают (в некотором порядке) полную систему наименьших неотрицательных вычетов.

Рассмотрим теперь общий случай, когда числа a и n не обязательно взаимно просты. Пусть

$$d = (a, n)$$

— наибольший общий делитель чисел a и n . Рассматривая для определенности полную систему

$$0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

наименьших неотрицательных вычетов, найдем, для каких чисел x_1, x_2 этой системы имеет место сравнение

$$ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod{n}. \quad (2)$$

Сравнение (2) равносильно сравнению

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{n},$$

которое в свою очередь равносильно сравнению

$$x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{d}}.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы по одному разу получить все возможные вычеты значений функции $ax + b$ (при x , пробегающем систему (1)), достаточно выбрать в системе (1) полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, например полную систему

$$0, 1, \dots, \frac{n}{d} - 1 \quad (3)$$

наименьших неотрицательных вычетов, и заставить x пробегать эту систему. Кроме того, поскольку в системе (1) имеется точно d чисел, сравнимых с некоторым произвольно взятым числом x системы (3) (эти числа имеют вид $x, x + \frac{n}{d}, x + 2\frac{n}{d}, \dots, x + (d-1)\frac{n}{d}$), отсюда также вытекает, что, когда x пробегает систему (1), каждый вычет значений, принимаемых функцией $ax + b$, повторяется ровно d раз.

Далее, разделим (с остатком) число b на d :

$$b = qd + \rho, \quad 0 \leq \rho < d.$$

Так как числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{n}{d}$ взаимно просты, то вместе с x полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$ пробегает и выражение $\frac{a}{d}x + q$. Поскольку

$$ax + b = d \left(\frac{a}{d}x + q \right) + \rho,$$

отсюда вытекает, что вычеты значений функций $ax + b$ и $dx + \rho$ при x , пробегающем систему (3), с точностью до порядка совпадают.

Сопоставляя все доказанные утверждения, мы окончательно получаем, что при x , пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n , скажем систему (1), каждый вычет значений функции $ax + b$ повторяется точно d раз; чтобы получить эти вычеты по одному разу, надо в функции $dx + \rho$ заставить переменную x пробежать некоторую полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, скажем систему (3).

Систему (3) брать особенно удобно, так как соответствующие значения

$$\rho, d + \rho, 2d + \rho, \dots, n - d + \rho \quad (4)$$

функции $dx + \rho$ уже сами являются наименьшими неотрицательными вычетами по модулю n . Таким образом,

числа (4) исчерпывают все наименьшие неотрицательные вычеты значений линейной функции $ax + b$; когда x пробегает полную систему вычетов, каждый из вычетов системы (4) повторяется ровно d раз.

Сумма всех чисел (4) равна, как легко видеть, $\frac{n}{d} \left(\rho + \frac{n-d}{2} \right)$. Следовательно, сумма всех наименьших неотрицательных вычетов значений линейной функции $ax + b$ при x , пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n , равна

$$n \left(\rho + \frac{n-d}{2} \right), \quad (5)$$

где $d = (a, n)$, а ρ представляет собой остаток от деления на d свободного члена b .

4. Сравнения и неопределенные уравнения первой степени

Общее сравнение первой степени по модулю n относительно неизвестной x имеет вид

$$ax + b \equiv 0 \pmod{n}. \quad (1)$$

Ясно, что если некоторое число x_0 удовлетворяет этому сравнению (т. е. если $ax_0 + b \equiv 0 \pmod{n}$), то и каждое число x , сравнимое с x_0 , т. е. имеющее вид

$$x = x_0 + nt,$$

где t — произвольное целое число, также удовлетворяет сравнению (1). Поэтому, чтобы описать все решения сравнения (1), достаточно найти все его решения, содержащиеся в некоторой полной системе вычетов, например в полной системе $0, 1, \dots, n-1$ наименьших неотрицательных вычетов.

Пусть сначала $(a, n) = 1$. Тогда при x , пробегающем полную систему вычетов, значения функции $ax + b$ также будут пробегать полную систему вычетов, так что вычет 0 получится один и только один раз. Тем самым доказано, что если a взаимно просто с n , то сравнение

$$ax + b \equiv 0 \pmod{n}$$

имеет в любой полной системе вычетов одно и только одно решение. Если x_0 — это решение, то любое другое решение сравнения имеет вид

$$x = x_0 + nt,$$

где t — произвольное целое число.

В случае, когда $d = (a, n)$ больше единицы, сравнение (1) либо вообще не имеет решений (если b не делится на d), либо имеет их ровно d (попарно не сравнимых между собой).

В дальнейшем нам также придется решать также системы сравнений первой степени. Для простоты мы рассмотрим случай двух сравнений с двумя неизвестными:

$$a_1x + b_1y \equiv c_1 \pmod{n}, \quad a_2x + b_2y \equiv c_2 \pmod{n}, \quad (2)$$

хотя окончательные результаты будут иметь место и для систем сравнений от любого числа неизвестных. Обращаясь со сравнениями как с уравнениями, мы, не пользуясь делением, можем известными из алгебры приемами преобразовать систему (2) к следующему виду:

$$\Delta x \equiv c_1b_2 - c_2b_1 \pmod{n}, \quad \Delta y \equiv c_2a_1 - c_1b_2 \pmod{n}, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

— определитель системы (2). (Например, чтобы получить первое сравнение системы (3), следует первое сравнение системы (2) умножить на b_2 , второе сравнение — на b_1 и из первого сравнения вычесть второе.)

Если $(\Delta, n) = 1$, то сравнения (3) однозначно определяют вычеты неизвестных x и y , удовлетворяющие системе (2). Таким образом,

если определитель Δ системы сравнений первой степени взаимно прост с n , то эта система имеет одно и только одно решение (в каждой полной системе вычетов).

Случай $(\Delta, n) > 1$ мы здесь рассматривать не будем.

С задачей решения сравнений первой степени тесно связана задача решения в целых числах неопределенных уравнений вида

$$ax + by = c. \quad (4)$$

Действительно, переписав уравнение (4) в виде

$$ax = c \pm |b|y,$$

мы видим, что оно приводит к сравнению

$$ax \equiv c \pmod{b}. \quad (5)$$

Следовательно, если коэффициенты a и b взаимно просты, то общее выражение для x имеет вид

$$x = x_0 + bt, \quad (6)$$

где t — произвольное целое число, а x_0 — некоторое решение сравнения (5).

По определению, для числа x_0 существует такое число y_0 , что $ax_0 = c - by_0$, т. е.

$$ax_0 + by_0 = c. \quad (7)$$

Таким образом, пара чисел (x_0, y_0) составляет решение неопределенного уравнения (4).

Число y_0 удовлетворяет сравнению

$$by \equiv c \pmod{|a|},$$

общее решение которого имеет вид

$$y = y_0 + at_1. \quad (8)$$

Подставляя выражения (6) и (8) в уравнение (4) и учитывая равенство (7), мы получим, что

$$ax + by = c + ab(t + t_1).$$

Следовательно, числа (6) и (8) тогда и только тогда составляют решение уравнения (4), когда $t_1 = -t$. Тем самым доказано следующее утверждение:

если коэффициенты a и b уравнения

$$ax + by = c.$$

взаимно просты, то это уравнение обладает целочисленным решением x_0, y_0 ; любое другое его решение (x, y) имеет вид

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at,$$

где t — произвольное целое число.

Если $(a, b) > 1$, то уравнение (4) либо не имеет решений (если c не делится на (a, b)), либо после сокращения на (a, b) сводится к уравнению с взаимно простыми коэффициентами.

Доказанное утверждение теоретически полностью отвечает на вопрос о решении в целых числах уравнения (4). Для практического применения следовало бы еще указать прием фактического нахождения хотя бы одного решения (x_0, y_0) . Однако в дальнейшем нам это не понадобится, и поэтому мы на этом вопросе останавливаться не будем. (Заметим, впрочем, что из всего сказанного выше такой прием, хотя и не очень практичный, можно извлечь без особого труда.)

ГЛАВА 1

Общий линейный метод построения магических квадратов нечетного порядка

1. Магические квадраты и методы их построения

Числовым квадратом порядка n , где n — некоторое положительное целое число, мы будем называть квадрат, разбитый на n^2 клеток, в котором размещены (в некотором порядке) целые числа от 1 до n^2 . Числовой квадрат мы будем называть *магическим*, если суммы, получаемые от сложения чисел каждого горизонтального ряда, каждого вертикального ряда и обеих диагоналей, одинаковы. Так как квадрат порядка n содержит n , скажем, горизонтальных рядов и сумма Σ чисел каждого ряда одинакова, то сумма всех чисел, размещенных в магическом квадрате, равна $n\Sigma$. С другой стороны, она равна

$$1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\Sigma = \frac{n(n^2 + 1)}{2}. \quad (1)$$

Условия равенства суммы элементов отдельных строк, столбцов или диагоналей числу Σ мы будем называть *условиями магичности* этих строк, столбцов или диагоналей.

Пример магического квадрата порядка 4 приведен на рис. 1. (Это так называемый квадрат Дюрера, изображенный на его известной гравюре "Меланхолия". Для него, в согласии с формулой (1), $\Sigma = 34$.)

Несмотря на то, что в свое время (особенно в XVI–XVIII веках) магические квадраты были предметом пристального изучения ряда известных математиков, их теория ни в коей мере не может считаться завершенной. Достаточно сказать, что до сих пор неизвестен никакой общий метод построения всех магических квадратов данного порядка n и даже неизвестно их число (при $n \geq 5$). Можно лишь утверждать, что это число делится на 8, так как из любого магического квадрата поворотами на 90°

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

рис. 1.

вокруг центра и отражениями в сторонах получают еще 7 новых магических квадратов.

Замечание. Новые магические квадраты из данного можно получать и некоторыми другими преобразованиями (например, перестановками его рядов). Мы этот вопрос рассматривать здесь не будем.

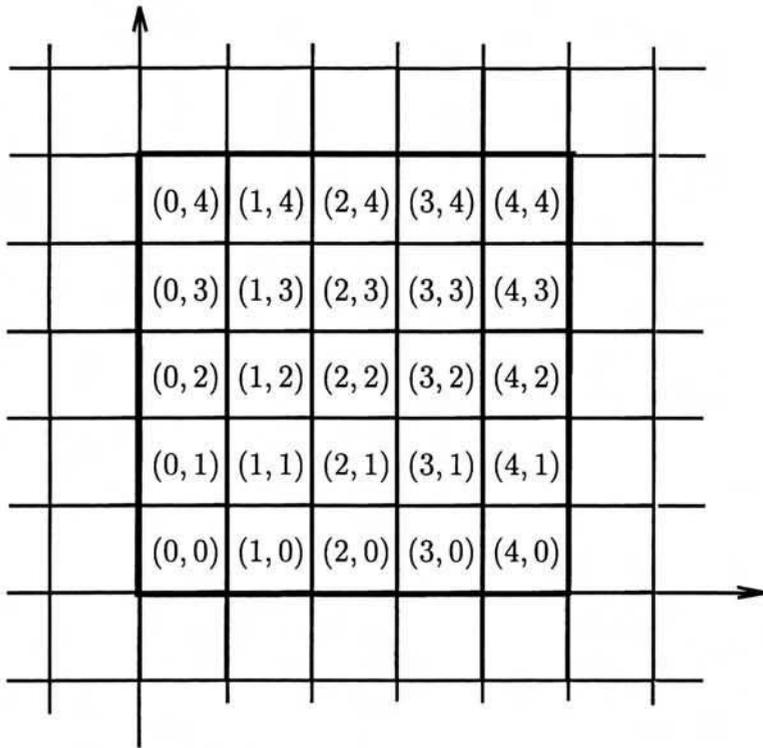


рис. 2

Клетки магического квадрата порядка n мы будем обозначать парами целых чисел (x, y) — их *координатами*, где x — номер вертикального ряда, а y — номер горизонтального ряда, на пересечении которых находится данная клетка (рис. 2 для случая $n = 5$). При этом вертикальные ряды мы нумеруем слева направо, а горизонтальные — снизу вверх. В качестве номеров мы будем использовать числа

$$0, 1, \dots, n - 1, \quad (2)$$

т. е. наименьшие неотрицательные вычеты по модулю n .

Разбиение на клетки исходного квадрата — назовем его *основным* — мы продолжим до разбиения на клетки всей плоскости (на рис. 2 основной квадрат очерчен жирной линией). Для клеток плоскости мы также введем координаты (x, y) , определив их аналогично координатам клеток основного квадрата, с тем лишь отличием, что теперь эти координаты могут уже принимать любые целочисленные значения. Среди всех клеток плоскости клетки основного квадрата характеризуются тем свойством, что обе их координаты x и y принадлежат системе (2).

Сдвигая основной квадрат параллельно самому себе на векторы с целочисленными координатами, делящимися на n , мы получим систему не налегающих друг на друга квадратов порядка n , покрывающих всю плоскость. Две клетки, принадлежащие двум таким квадратам и занимающие относительно их одинаковое положение, мы будем называть *эквивалентными*. Другими словами, *две клетки эквивалентны, если их соответственные координаты сравнимы по модулю n* . Клетки,

составляющие основной квадрат, попарно друг другу не эквивалентны, но каждая другая клетка плоскости эквивалентна одной (и только одной) из них. В дальнейшем эквивалентные клетки будут играть совершенно одинаковую роль и будут рассматриваться как одинаковые. В соответствии с этим нас в основном будут интересовать не сами координаты клеток, а их вычеты по модулю n , ввиду чего мы будем для них писать не равенства, а сравнения.

Каждое целое число $z = 1, 2, \dots, n^2$ мы можем записать в виде

$$z = nr + (s + 1),$$

где r и s — некоторые числа системы (2), однозначно определенные числом z и, обратно, однозначно определяющие это число. Мы будем числа r, s называть *координатами* числа z .

Например, при $n = 3$ координаты чисел

$$z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

имеют соответственно вид

$$(r, s) = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2).$$

При задании некоторого магического квадрата порядка n каждой паре чисел r, s сопоставляется пара чисел x, y — координаты клетки квадрата, в которую вписано число с координатами r, s . Другими словами, числа x и y являются функциями чисел r и s . Обозначая эти функции буквами f и g , мы получим, следовательно, что $x = f(r, s)$ и $y = g(r, s)$. Как уже говорилось, нам удобнее вместо равенств писать сравнения по модулю n . Таким образом,

каждый магический квадрат порядка n описывается двумя сравнениями вида

$$\begin{aligned} x &\equiv f(r, s) \pmod{n}, \\ y &\equiv g(r, s) \pmod{n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f(r, s), g(r, s)$ — некоторые функции чисел r и s .

В дальнейшем любую пару произвольно заданных целочисленных функций $f(r, s)$ и $g(r, s)$ мы будем называть *методом построения магических квадратов*. Метод мы условимся называть *правильным*, если формулы (3) действительно определяют магический квадрат.

Описанное сведение задачи построения магического квадрата к задаче построения пары функций $f(r, s)$ и $g(r, s)$ позволяет, в частности, классифицировать способы построения магических квадратов в зависимости от характера этих функций. Простейшим методом построения магических квадратов следует считать метод, для которого функции $f(r, s)$ и $g(r, s)$ линейны, т. е. имеют вид

$$f(r, s) = a_1 r + b_1 s + c_1,$$

$$g(r, s) = a_2 r + b_2 s + c_2,$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — некоторые целые числа. Такого рода методы мы будем называть *линейными*.

Основная (до сих пор не решенная) задача теории магических квадратов состоит в выяснении *необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять правильные методы построения магических квадратов*. Мы рассмотрим эту задачу лишь для линейных методов. В частности, мы покажем, что *правильные линейные методы существуют лишь для нечетных n* .

2. Общий вид линейного метода построения магических квадратов

По определению, каждый линейный метод построения магических квадратов имеет вид

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 r + b_1 s + c_1 \pmod{n}, \\ y &\equiv a_2 r + b_2 s + c_2 \pmod{n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для практического применения этого метода весьма существенно, что из формул (1) можно исключить координаты r и s . Действительно, очевидно, что если

$$z = nr + s + 1, \quad r, s = 0, 1, \dots, n-1,$$

то

$$r = \left[\frac{z-1}{n} \right],$$

где $[]$ — знак целой части (наибольшего целого числа, содержащегося в данном), и

$$s \equiv z - 1 \pmod{n}.$$

Поэтому формулы (1) можно переписать в следующем виде, не содержащем явно координат r и s :

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_1(z-1) + c_1 \pmod{n}, \\ y &\equiv a_2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_2(z-1) + c_2 \pmod{n}. \end{aligned}$$

При фактическом построении магического квадрата можно также писать не эти сравнения, а соответствующие равенства

$$\begin{aligned} x &= a_1 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_1(z-1) + c_1, \\ y &= a_2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + b_2(z-1) + c_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя в эти равенства числа $z = 1, 2, \dots, n^2$, мы получим координаты ряда клеток, часть из которых будет обязательно лежать вне основного квадрата. В каждую клетку надо затем вписать соответствующее число z , заменяя одновременно клетки, лежащие вне основного квадрата, эквивалентными клетками этого квадрата (и сохраняя в последних те же числа). В результате мы получим некоторое заполнение клеток основного квадрата числами от 1 до n^2 , которое и будет магическим квадратом, если только метод (1) правилен.

3. Условия правильности линейного метода

Чтобы линейный метод, выраженный формулами (1) п. 2, был правильным, необходимо в первую очередь, чтобы эти формулы устанавливали взаимно однозначное соответствие между координатами (r, s) чисел от 1 до n^2 и координатами (x, y) клеток основного квадрата, т. е. чтобы для любых координат x и y из этих формул можно было однозначно найти соответствующие координаты r и s . Но решая по известным правилам сравнения (1) п. 2 относительно r и s , мы получим сравнения

$$\begin{aligned}\Delta r &\equiv b_2x - b_1y + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod{n}, \\ \Delta s &\equiv -a_2x + a_1y - a_1c_2 + a_2c_1 \pmod{n},\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Пусть выполнено следующее условие:

M1. *Определитель Δ взаимно прост с n .*

Тогда для любых x и y сравнения (1) однозначно определяют координаты r и s (следует иметь в виду, что, по определению, эти координаты принадлежат полной системе (2) п. 1 наименьших неотрицательных вычетов по модулю n). Таким образом,

при выполнении условия M1. формулы (1) п.2 устанавливают взаимно однозначное соответствие между числами от 1 до n^2 и клетками основного квадрата.

Рассмотрим теперь следующее условие:

M2. *Коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 взаимно просты с n .*

Оказывается, что

при выполнении условия M2 требование магичности выполняется по отношению ко всем вертикальным и горизонтальным рядам, т. е. сумма чисел каждого вертикального и каждого горизонтального ряда равна $\Sigma = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$.

Действительно, для всех клеток некоторого, скажем, горизонтального ряда координата y одна и та же, а координата x пробегает полную систему вычетов по модулю n . Так как числа b_2 и $-a_2$ по условию взаимно просты с n , то левые части сравнений (1), каждая в отдельности, также пробегает полную систему вычетов. Поэтому полную систему вычетов будут пробегать как координата r , так и координата s (ибо по условию M.1 определитель Δ взаимно прост с n). Таким образом, для чисел рассматриваемого ряда координаты r и s принимают по одному разу каждое из значений $0, 1, \dots, n - 1$. Следовательно, суммы R и S этих координат равны каждая числу $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, сумма всех чисел данного ряда равна, очевидно, числу $nR + S + n$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Для вертикальных рядов рассуждение аналогично (меняется координата y , а координата x остается постоянной).

Таким образом, остается найти лишь условия магичности обеих диагоналей ("восходящей", соединяющей левый нижний угол с правым верхним, и "нисходящей", соединяющей левый верхний угол с правым нижним).

Для клеток восходящей диагонали имеет место равенство $x = y$, и поэтому координаты чисел, находящихся в клетках этой диагонали, определяются из сравнений

$$\begin{aligned}\Delta r &\equiv (b_2 - b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod{n}, \\ \Delta s &\equiv -(a_2 - a_1)x + a_2c_1 - a_1c_2 \pmod{n}.\end{aligned}$$

Так как число Δ взаимно просто с n , то существует такое число Δ' , что

$$\Delta\Delta' \equiv 1 \pmod{n}.$$

Умножая выписанные выше сравнения на это число, мы получим, что

$$\begin{aligned}r &\equiv \Delta'(b_2 - b_1)x + \Delta'(b_1c_2 - b_2c_1) \pmod{n}, \\ s &\equiv -\Delta'(a_2 - a_1)x + \Delta'(a_2c_1 - a_1c_2) \pmod{n}.\end{aligned}\tag{2}$$

Таким образом, координаты r и s чисел восходящей диагонали представляют собой вычеты значений, принимаемых левыми частями сравнений (2), когда x пробегает полную систему вычетов $0, 1, \dots, n-1$. Следовательно, (см. Введение, п. 3, формула (5)), суммы R и S этих координат выражаются формулами

$$R = n \left(\varrho + \frac{n-d}{2} \right), \quad S = n \left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2} \right),$$

где

$$\begin{aligned}d &= (\Delta'(b_2 - b_1), n) = (b_2 - b_1, n), \\ d_1 &= (-\Delta'(a_2 - a_1), n) = (a_2 - a_1, n),\end{aligned}$$

а ϱ и ϱ_1 представляют собой наименьшие неотрицательные вычеты чисел $\Delta'(b_1c_2 - b_2c_1)$ и $\Delta'(a_2c_1 - a_1c_2)$ по модулям d и d_1 соответственно.

Требование магичности заключается в том, что сумма $nR + S + n$ всех чисел восходящей диагонали равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Следовательно, должно иметь место равенство

$$n^2 \left(\varrho + \frac{n-d}{2} \right) + n \left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2} \right) + n = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

т. е. равенство

$$2n^2\varrho + 2n\varrho_1 = n^2(d-1) + n(d_1-1).$$

Последнее равенство возможно только при d и d_1 нечетных и, как легко видеть, будет заведомо выполнено, если

$$\varrho = \frac{d-1}{2}, \quad \varrho_1 = \frac{d_1-1}{2},$$

т. е. если будут иметь место сравнения

$$\Delta'(b_1c_2 - b_2c_1) \equiv \frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$\Delta'(a_2c_1 - a_1c_2) \equiv \frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1}.$$

Умножив эти сравнения на Δ , мы приходим к следующему условию:

М3. *Имеют место сравнения*

$$b_1c_2 - b_2c_1 \equiv \Delta \frac{d - 1}{2} \pmod{d},$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 \equiv \Delta \frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1},$$

где $d = (b_2 - b_1, n)$, $d_1 = (a_2 - a_1, n)$.

По доказанному

при выполнении условия М3 восходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.

Заметим, что при $d = 1$ или при $d_1 = 1$ соответствующее сравнение из условия М3 удовлетворяется автоматически. Отсюда, в частности, следует, что условие М3 будет заведомо выполнено, если $d = d_1 = 1$, т. е. если выполнено следующее условие:

М3'. *Числа $b_2 - b_1$ и $a_2 - a_1$ взаимно просты с n .*

Для нисходящей диагонали $x + y = n - 1$, и поэтому ее клетки заполнены числами, координаты которых определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 + b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 - b_1(n - 1) \pmod{n},$$

$$\Delta s \equiv (a_2 + a_1)y - a_1c_2 + a_2c_1 - a_2(n - 1) \pmod{n},$$

т. е. из сравнений

$$r \equiv \Delta'(b_2 + b_1)x + \Delta'(b_1c_2 - b_2c_1 + b_1) \pmod{n},$$

$$s \equiv \Delta'(a_2 + a_1)y + \Delta'(a_2c_1 - a_1c_2 + a_2) \pmod{n}.$$

Отсюда, как и выше мы приходим к условию

М4 *Имеют место сравнения*

$$b_1c_2 - b_2c_1 + b_1 \equiv \Delta' \frac{d'_1 - 1}{2} \pmod{d'},$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 + a_2 \equiv \Delta' \frac{d'_1 - 1}{2} \pmod{d'_1},$$

где

$$d' = (b_2 + b_1, n), \quad d'_1 = (a_2 - a_1, n),$$

и к следующему утверждению:

при выполнении условия М4 нисходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.

Условие М4 будет заведомо выполнено, если имеет место следующее условие:

М4'. *Числа $b_2 + b_1$ и $a_2 + a_1$ взаимно просты с n .*

Резюмируя все сказанное, мы получаем окончательный результат:

при выполнении условий M1, M2, M3 (или M3') и M4 (или M4') линейный метод (1) п. 2 правилен.

Это утверждение дает лишь достаточные условия правильности линейного метода. Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о необходимых условиях.

Заметим в заключение, что

условия M1 и M2 непротиворечивы только для нечетного n .

Действительно, если n четно, то, согласно условию M2, числа a_1, a_2, b_1, b_2 должны быть нечетны, и поэтому определитель $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, как разность двух нечетных чисел, должен быть четным, что в силу условия M1 невозможно.

Таким образом,

правильные методы (или по крайней мере методы, удовлетворяющие условиям M1—M4) могут существовать лишь при нечетном n .

Примеры таких методов для любого нечетного n мы укажем в следующей главе.

ГЛАВА 2

Классические алгоритмические методы построения магических квадратов нечетного порядка

1. Индийский метод

Индийский метод составления магических квадратов (иногда называемый также сямским) является, по-видимому, самым древним алгоритмом построения магических квадратов произвольного нечетного порядка $n = 2m + 1$. Этот алгоритм описывается следующими правилами:

1°. Числа от 1 до n^2 поочередно вписываются в клетки основного квадрата.

2°. Если некоторое правило требует вписать данное число в клетку, лежащую вне основного квадрата, то вместо этого рассматриваемое число вписывается в эквивалентную клетку основного квадрата.

3°. Число 1 вписывается в среднюю клетку верхнего ряда, т. е. в клетку с координатами

$$(m, 2m).$$

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y) , то следующее число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x+1, y+1)$, т. е. в клетку, смежную с клеткой (x, y) , в направлении восходящей диагонали, при условии, что эта последняя клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+1)$ уже занята некоторым числом, то число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y-1)$, т. е. в клетку, непосредственно примыкающую снизу к клетке (x, y) . (Оказывается, что это всегда возможно, т. е. клетка $(x, y-1)$ обязательно свободна от чисел.)

На рис. 3 изображен магический квадрат третьего порядка, построенный индийским методом. Для ясности на этом рисунке заполнены также некоторые клетки вне основного квадрата. Не описывая подробно это построение, мы укажем лишь, что число 1 вписано на основании правил 1° и 3°, число 2 — на основании правил 4° и 2°, число 4 — на основании правил 5° и 2°, число 5 — на основании правила 4°, число 6 — на основании правила 4°, число 7 — на основании правил 5° и 2°, число 8 — на основании правил 4° и 2° и, наконец, число 9 — на основании правил 4° и 2°.

	9	2	4	
8	1	6	8	
3	5	7	3	
4	9	2		

рис. 3

Замечание. Из полученного по индийскому методу магического квадрата третьего порядка можно поворотами около центра и отражениями в сторонах получить еще семь других магических квадратов. Без труда проверяется, что этими

восемью магическими квадратами исчерпываются все магические квадраты третьего порядка. Таким образом, указанная в п. 1 оценка для числа магических квадратов данного порядка n не может быть улучшена (если не налагать на n никаких дополнительных условий).

Сущность индийского метода лучше всего уясняется, если не обращать внимания на правило 2°, т. е. если не заменять внешних клеток эквивалентными. При таком упрощении применение алгоритма сводится к заполнению клетки $(m, 2m)$ числом 1 и следующих за ней вверх по диагонали клеток $(m+1, 2m+1)$, $(m+2, 2m+2)$, ..., $(m+k, 2m+k)$, ... числами 2, 3, ..., $k+1$, ..., до тех пор, пока не встретится клетка, эквивалентная клетке $(m, 2m)$, что, очевидно, произойдет при $k = n$. Под последней из заполненных клеток (это будет клетка $(m+n-1, 2m+n-1) = (3m, 4m)$ с числом n), т. е. в клетке $(3m, 4m-1)$, помещается число $n+1$, и с этой клетки начинается новый диагональный ряд, который, как легко видеть, кончится на числе $2n$, так что число $2n+1$ помещается под клеткой с числом $2n$. Следующий диагональный ряд кончится на числе $3n$, и т. д. Этот процесс остановится, когда мы дойдем до числа n^2 . В результате мы получим n диагональных рядов чисел по n чисел в ряду, составляющих своеобразную "лесенку" (см. рис. 4 для $n = 3$ и $n = 5$).

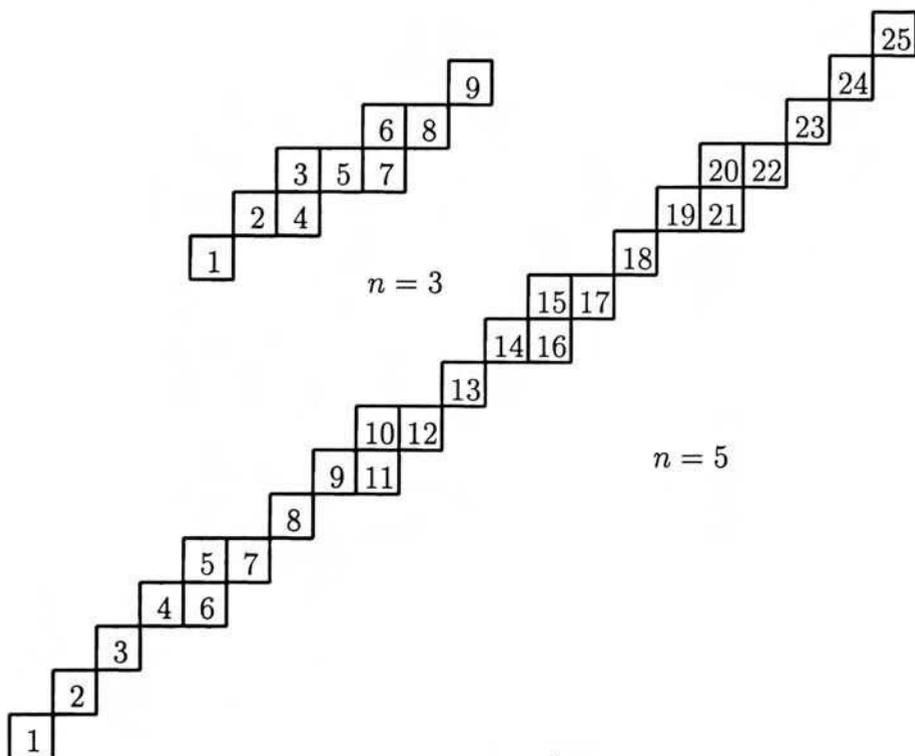


рис. 4

Покажем теперь, что клетка построенной "лесенки", содержащая некоторое

число z ($z = 1, 2, \dots, n^2$), имеет координаты

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + m - 1, \\ y &= z - 2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + 2m - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$m = \frac{n-1}{2}.$$

Действительно, для чисел $z = 1, 2, \dots, n$ первого диагонального ряда эти формулы дают правильные координаты $(m+z-1, 2m+z-1)$ соответствующих клеток (см. выше). Пусть формулы (1) уже доказаны для чисел $z = (p-1)n+1, (p-1)n+2, \dots, pn$, составляющих p -й диагональный ряд. Тогда, согласно этим формулам, число pn помещается в клетке $(pn-p+m, pn-2p+2m+1)$ и, следовательно, согласно правилам построения "лесенки", число $pn+1$ помещается в клетке $(pn-p+m, pn-2p+2m)$, число $pn+2$ — в клетке $(pn-p+m+1, pn-2p+2m+1)$, вообще число $z = pn+k$, где $1 \leq k \leq n$, — в клетке $(pn-p+m+k, pn-2p+2m+k-1)$, т. е. в клетке $(z-p+m-1, z-2p+2m-1)$. Поскольку при $z = pn+k$ имеет место равенство $\left[\frac{z-1}{n} \right] = p$, тем самым доказано, что формулы (1) справедливы и для чисел $z = pnp+1, pnp+2, \dots, (p+1)n$, составляющих $(p+1)$ -й ряд. Поэтому, согласно принципу полной математической индукции, формулы (1) справедливы для чисел любого ряда, т. е. для всех чисел от 1 до n^2 .

Сравнивая доказанные формулы (1) с формулами (2) из п. 2 гл. 1, мы немедленно получаем, что

индийский метод является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = m,$$

$$a_2 = -2, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 2m.$$

Определитель Δ индийского метода равен, очевидно, единице, так что этот метод для любого n удовлетворяет условию М1. Ясно также, что для любого нечетного n он удовлетворяет и условию М2. Далее, так как $b_2 - b_1 = 0$, $a_2 - a_1 = -1$, то $d = n$, $d_1 = 1$, и поэтому условие М3 сводится к сравнению

$$1 \cdot 2m - 1 \cdot m \equiv \frac{n-1}{2} \pmod{n},$$

которое очевидным образом удовлетворяется. Наконец, так как $b_1 + b_2 = 2$, $a_2 + a_1 = -3$, то при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ имеет место даже условие М4', а при $n \equiv 0 \pmod{3}$ условие М4 сводится к очевидному сравнению

$$-2 \cdot m - (-1) \cdot 2m + (-2) \equiv \frac{3-1}{2} \pmod{3}$$

и поэтому также выполнено.

Тем самым доказано, что

для любого нечетного n индийский метод правилен, т. е. его применение приводит к некоторому магическому квадрату.

Индийский метод, не оставляя желать ничего лучшего в отношении простоты и легкости применения, страдает тем недостатком, что для каждого нечетного n он дает лишь один, вполне определенный, магический квадрат. Однако, как мы сейчас покажем, несколько обобщив этот метод, можно получить метод, приводящий, вообще говоря, к n квадратам.

2. Обобщенный индийский метод

Существо индийского метода состоит в правилах 4°, 5°, обеспечивающих построение "лесенки". Что же касается правила 3°, т. е. требования начинать построение обязательно с клетки $(m, 2m)$, то оно, как мы сейчас покажем, отнюдь не обязательно.

Подставляя в формулы (1) п. 2 гл. 1 общего линейного метода координаты $r = 0$, $s = 0$ числа 1, мы немедленно получим, что

коэффициенты c_1 , c_2 представляют собой координаты клетки, в которую вписано число 1.

Следовательно, варьируя числа c_1 и c_2 , мы будем менять место числа 1 в квадрате. Сохраняя при этом остальные коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 , b_2 неизменными, мы оставим метод по существу тем же самым.

Таким образом, желая исследовать вопрос о возможном обобщении правила 3° индийского метода, мы должны рассмотреть метод вида

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + c_1 - 1, \\ y &= z - 2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + c_2 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

и найти все значения коэффициентов c_1 и c_2 , для которых этот метод правилен. Алгоритм для построения магических квадратов по этому методу состоит из тех же правил 1° — 5°, что и алгоритм индийского метода, с тем лишь отличием, что правило 3° заменяется следующим:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами (c_1, c_2) .

Метод (1), очевидно, удовлетворяет условиям М1 и М2. Что же касается условия М3, то, поскольку $d = n$, $d_1 = 1$, оно сводится к сравнению

$$c_2 - c_1 \equiv m \pmod{n}. \quad (2)$$

Этому сравнению удовлетворяют n клеток основного квадрата, эквивалентных клеткам "восходящего" диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего ряда.

Наконец, если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то выполнено условие М4'. Если же $n \equiv 0 \pmod{3}$, то $d' = 1$, $d'_1 = 3$ и поэтому условие М4 сводится к сравнению

$$-2c_1 + c_2 - 2 \equiv 1 \pmod{3},$$

т. е. к сравнению

$$2c_1 - c_2 \equiv 0 \pmod{n}. \quad (3)$$

С другой стороны, при $n \equiv 0 \pmod{3}$ (а значит, при $m \equiv 1 \pmod{3}$) из сравнения (2) вытекает сравнение

$$c_2 - c_1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Отсюда и из сравнения (3) следует, что

$$c_1 \equiv 0 \pmod{3}, \quad c_2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Таким образом, мы получаем следующий окончательный результат:

в алгоритме индийского метода начальную клетку, в которую вписывается число 1, можно при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ произвольно выбирать среди n клеток, эквивалентным клеткам "восходящего" диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего горизонтального ряда; если же $n \equiv 0 \pmod{3}$, то эта клетка должна дополнительно обладать тем свойством, что ее первая координата делится на 3 (и тогда вторая при делении на 3 обязательно даст остаток 1).

В частности, за начальную клетку индийского метода можно всегда выбрать среднюю клетку левого вертикального ряда, имеющую координаты $(0, m)$. Это видоизменение индийского метода было предложено Лалюбером.

С помощью обобщенного индийского метода мы получаем либо n квадратов (при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$), либо $n/3$ квадратов (при $n \equiv 0 \pmod{3}$).

3. Метод Москопула

В методе византийского ученого Москопула, как и в индийском методе, указывается некоторый алгоритм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от 1 до n^2 . Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конем,двигающимся вверх и направо (поэтому метод Москопула иногда называют также методом коня).

Первые два правила алгоритма Москопула в точности совпадают с соответствующими правилами 1° и 2° индийского метода. остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, то начальная клетка, в которую вписывается число 1, выбирается произвольно, если же $n \equiv 0 \pmod{3}$, то за эту клетку принимается средняя клетка нижнего горизонтального ряда, т. е. клетка с координатами $(m, 0)$.

4°. Если некоторое число z вписано в клетку с координатами (x, y) , то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x + 1, y + 2)$ уже занята некоторым числом, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y + 4)$, т. е. в клетку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и клетка с числом z , но находящуюся на четыре клетки выше.

Рис. 5 иллюстрирует построение магического квадрата пятого порядка по способу Москопула.

Для изучения метода Москопула мы, как и раньше, отвлечемся от правила 2°, т. е. не будем заменять внешние клетки эквивалентными им клетками основного

квадрата. Тогда, если мы вписали число 1 в клетку (x_0, y_0) , то число 2 мы должны вписать в клетку $(x_0 + 1, y_0 + 2)$, число 3 — в клетку $(x_0 + 2, y_0 + 4)$ и вообще число z — в клетку $(x_0 + z - 1, y_0 + 2(z - 1))$, и так до тех пор, пока не встретим клетку, эквивалентную уже занятой. Очевидно, что это произойдет при $z = n + 1$. Поэтому, вписав число n в клетку $(x_0 + n - 1, y_0 + 2(n - 1))$, мы число $n + 1$ должны вписать в клетку $(x_0 + n, y_0 + 2n)$, эквивалентную исходной клетке (x_0, y_0) , а — в соответствии с правилом 5° — в клетку $(x_0 + n - 1, y_0 + 2(n + 1))$. Дальнейшие вписывания мы должны опять производить по "ходу коня", пока снова не натолкнемся на клетку, эквивалентную уже занятой, что, как легко видеть, произойдет при $z = 2n + 1$, после чего мы должны совершить "скачек вверх" и т. д.

			21		
	6				
	12	25	8	16	4
	18		14	22	10
11	24	7	20	3	
17	5	13	21	9	17
23	6	19	2	15	23
4	12	25	8	16	
10	18	1	14	22	

рис. 5.

Простой индукцией без труда показывается (см. аналогичные рассуждения в п. 1), что при этом построении число $z = 1, 2, \dots, n^2$ попадает в клетку с координатами

$$x = z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + x_0 - 1,$$

$$y = 2z + 2 \left[\frac{z-1}{n} \right] + y_0 - 2.$$

Тем самым доказано, что *метод Москопула является линейным методом с коэффициентами*

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & b_1 &= 1, & c_1 &= x_0, \\ a_2 &= 2, & b_2 &= 2, & c_2 &= y_0. \end{aligned}$$

Для этого метода

$$\Delta = -4, \quad d = 1, \quad d_1 = (3, n), \quad d' = (3, n), \quad d'_1 = 1,$$

откуда следует, что при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ этот метод правилен. Что же касается случая $n \equiv 0 \pmod{3}$, то для правильности метода должны удовлетворяться сравнения

$$2x_0 + y_0 \equiv -4 \frac{3-1}{2} \pmod{3},$$

$$y_0 - 2x_0 + 1 \equiv -4 \frac{3-1}{2} \pmod{3},$$

из которых следует, что

$$y_0 \equiv 1 \pmod{3}, \quad y_0 \equiv 0 \pmod{3}. \quad (1)$$

Поскольку координаты $x_0 = m$ и $y_0 = 0$ средней клетки нижнего горизонтального ряда удовлетворяют этим соотношениям, то

метод Москопула правилен для любого нечетного n .

Одновременно мы получаем, что, как и индийский метод, метод Москопула допускает обобщение. Именно, *при $n \equiv 0 \pmod{3}$ начальную клетку (x_0, y_0) можно выбирать произвольно, лишь бы удовлетворялись сравнения (1).*

При помощи этого метода получаются n^2 магических квадратов, если $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, и $(n/3)^2$ таких квадратов, если $n \equiv 0 \pmod{3}$.

При $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ метод Москопула можно видоизменить, заменяя в нем правило 5° правилом 5° индийского метода. Читателю предлагается самостоятельно исследовать правильность этого видоизменения (и, в частности, найти все допустимые начальные клетки).

4. Метод альфила

Метод альфила вполне аналогичен методу Москопула, только вместо хода коня в этом методе используется движение по диагонали через одну клетку (по этому закону в старинных шахматах двигался предок современного слона — так называемый альфил, от которого и происходит название метода). Как и для метода Москопула, первые два правила метода альфила совпадают с правилами 1° и 2° индийского метода. Остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(0, 1)$.

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y) , то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 2, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка $(x + 2, y + 2)$ уже занята, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 3)$, т. е. в клетку, получающуюся из клетки с числом z

				6			
		24	8	17			15
	21	10	19	3	12		
23	7	16	5	14	23	7	
9	18	2	11	25	9	18	
20	4	13	22	6	20	4	
1	15	24	8	17			
12	21	10	19	3			

рис. 6

«удлиненным ходом коня».

Пример построения магического квадрата пятого порядка по методу альфила приведен на рис. 6.

Без труда проверяется (см. аналогичные рассуждения для индийского метода и метода Москопула), что аналитически метод альфила записывается формулами

$$x = 2z - \left[\frac{z-1}{n} \right] - 2,$$

$$y = 2z + \left[\frac{z-1}{n} \right] - 1,$$

откуда следует, что

метод альфила является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 0,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 1.$$

Проверка того, что

для каждого нечетного n метод альфила правилен,
предоставляется читателю.

Для каждого n метод альфила дает только один магический квадрат.

5. Метод Баше

По-видимому самый простой метод построения магических квадратов нечетного порядка предложен Баше де Мезириаком. Он известен также как метод террас. Некоторые авторы называют его индийским методом. Он был известен еще Москопулу.

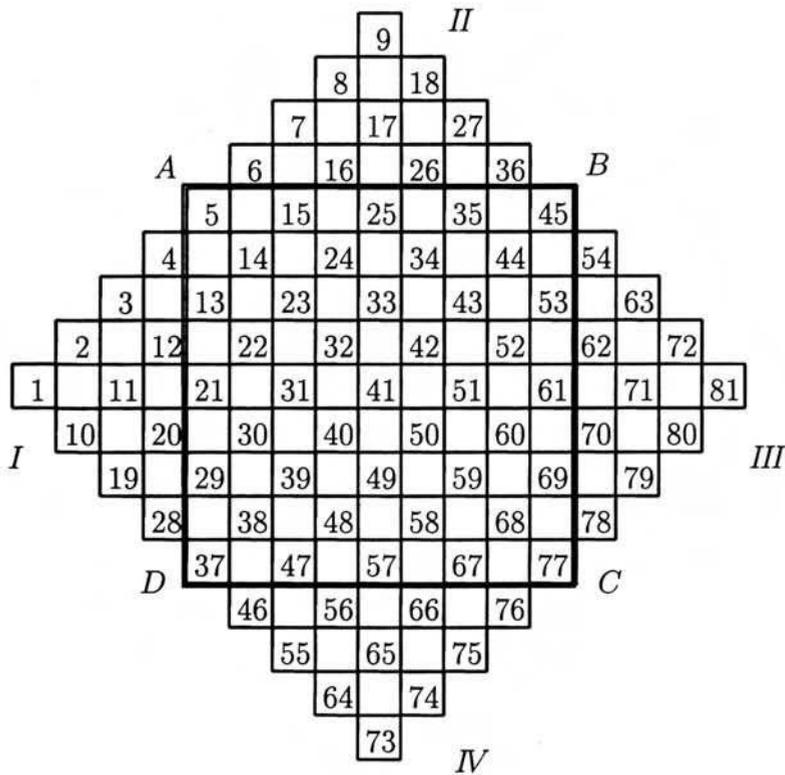


рис. 7

Для построения магического квадрата по методу Баше следует выбрать на плоскости n соседних диагональных рядов, содержащих по n клеток и таких, что средняя клетка каждого ряда принадлежит нисходящей диагонали основного квадрата. Клетки левого верхнего ряда заполняются снизу вверх числами $1, 2, \dots, n$, клетки следующего ряда — числами $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ и вообще клетки p -го ряда, где $1 \leq p \leq n$, — числами $(p - 1)n + 1, (p - 1)n + 2, \dots, pn$ (см. для $n = 9$ рис. 7). Заполненные таким образом клетки частью расположены внутри основного квадрата, частью — вне его, причем внешние клетки образуют по бокам основного квадрата четыре совершенно одинаковых выступа или террасы. Легко видеть, что каждая пустая клетка основного квадрата эквивалентна одной и только одной клетке некоторой террасы. Следовательно, перенеся клетки террас в основной квадрат, что легко достигается параллельным перенесением этих террас, мы заполним весь основной квадрат числами от 1 до n^2 . Оказывается, что получающийся таким образом числовой квадрат является магическим.

На рис. 7 образовавшиеся при заполнении клеток террасы обозначены римскими цифрами I, II, III и IV . Для построения магического квадрата террасу I следует передвинуть параллельно самой себе так, чтобы линия AD совпала с линией BC , террасу II передвинуть так, чтобы линия AB совпала с линией DC , террасу III — так, чтобы линия BC совпала с линией AD и, наконец, террасу IV — так, чтобы линия DC совпала с линией AB . Получающийся в результате магический квадрат изображен на рис. 8.

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

рис. 8

Для доказательства правильности метода Баше мы сдвинем второй сверху диагональный ряд вдоль его направления на n клеток вверх. Ясно, что при этом каждая клетка ряда заменится ей эквивалентной. Далее подобным же образом сдвинем третий ряд на $2n$ клеток вверх и вообще p -й ряд, где $1 \leq p \leq n$, сдвинем на $(p-1)n$ клеток вверх. Без труда проверяется, что получившаяся таким образом система клеток аналитически определяется формулами

$$x = z + \left[\frac{z-1}{n} \right] - m - 1,$$

$$y = z - \left[\frac{z-1}{n} \right] + m - 1.$$

Отсюда вытекает, что

метод Баше является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -m,$$

$$a_2 = -1, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = -m.$$

Для этого метода

$$\Delta = 2, \quad d = n, \quad d_1 = 1, \quad d' = 1, \quad d'_1 = n.$$

Следовательно, проверки требует лишь первое сравнение условия М3 и второе сравнение условия М4. В данном случае эти сравнения имеют вид

$$m + m \equiv 2m \pmod{n},$$

$$m - m - 1 \equiv 2m \pmod{n}$$

и очевидным образом справедливы.

Тем самым доказано, что

метод Баше правилен для любого нечетного n .

По форме алгоритм метода Баше отличается от ранее рассмотренных алгоритмов (индийского, Москопула и альфила). Однако, как легко видеть, он приводит к тому же магическому квадрату, что и алгоритм, для которого правила 1°, 2° и 4° совпадают с правилами индийского метода, а правила 3° и 5° формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(m + 1, m)$.

5°. Если клетка с координатами $(x + 1, y + 1)$ уже заполнена, то число $z + 1$ вписывается в клетку, имеющую координаты $(x + 2, y)$, т. е. в клетку, сдвинутую на две клетки вправо.

Таким образом, метод Баше принадлежит к тому же типу алгоритмических методов, что и рассмотренные ранее методы.

Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о возможном изменении начальной клетки в описанном выше алгоритме.

6. Классические алгоритмические методы с общей точки зрения

Все рассмотренные алгоритмические методы имеют друг с другом много общего. Все они описываются пятью правилами, из которых первые два для всех методов одинаковы, третье описывает возможные координаты (x_0, y_0) начальной клетки, в которую вписывается число 1, четвертое указывает координаты (\bar{x}, \bar{y}) клетки, в которую вписывается число $z + 1$, при условии, что число z вписано в клетку (x, y) и что клетка (\bar{x}, \bar{y}) еще свободна от чисел, и, наконец, пятое правило указывает координаты (x^*, y^*) клетки, в которую вписывается число $z + 1$, если клетка (\bar{x}, \bar{y}) уже оказалась занятой. При этом для любых x и y величины

$$p = \bar{x} - x, \quad q = \bar{y} - y, \quad p_1 = x^* - x, \quad q_1 = y^* - y$$

имеют одно и то же постоянное значение.

Такого рода алгоритмы построения магических квадратов мы будем называть *классическими*, а числа p, q, p_1 и q_1 — *параметрами* данного классического алгоритма.

Для индийского метода

$$p = 1, \quad q = 1, \quad p_1 = 0 \quad q_1 = -1;$$

для метода Москопула

$$p = 1, \quad q = 2, \quad p_1 = 0 \quad q_1 = 4;$$

для метода альфила

$$p = 2, \quad q = 2, \quad p_1 = 1 \quad q_1 = 3;$$

для метода Баше

$$p = 1, \quad q = 1, \quad p_1 = 2 \quad q_1 = 0.$$

По индукции легко проверяется (см. аналогичные рассуждения для конкретных методов), что классический метод с параметрами p , q , p_1 и q_1 аналитически выражается формулами

$$x = (p_1 - p) \left[\frac{z-1}{n} \right] + p(z-1) + x_0,$$

$$q = (q_1 - q) \left[\frac{z-1}{n} \right] + q(z-1) + y_0.$$

Таким образом,

любой классический алгоритмический метод построения магических квадратов равносильен линейному методу с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1 - p, & b_1 &= p, & c_1 &= x_0 \\ a_2 &= q_1 - q, & b_2 &= q, & c_2 &= y_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обратно,

любой линейный метод равносильен классическому алгоритмическому методу с параметрами

$$p = b_1, \quad q = b_2, \quad p_1 = b_1 + a_1, \quad q_1 = b_2 + a_2$$

и начальной клеткой c_1, c_2 .

Подставляя выражения (1) в условия М1—М4 правильности общего линейного метода, мы получим следующие условия:

А1. Число

$$-\Delta = \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = pq_1 - p_1q$$

взаимно просто с n .

А2. Числа p , q , $p_1 - p$ и $q_1 - q$ взаимно просты с n .

А3. Имеют место сравнения

$$qx_0 - py_0 \equiv -\Delta \frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv -\Delta \frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1},$$

где $d = (p - q, n)$, $d_1 = (p - q - p_1 + q_1, n)$.

А4. Имеют место сравнения

$$qx_0 - py_0 \equiv p - \Delta \frac{d' - 1}{2} \pmod{d'},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv -\Delta \frac{d'_1 - 1}{2} - q_1 + q \pmod{d'_1},$$

где $d' = (p + q, n)$, $d'_1 = (p + q - p_1 - q_1, n)$.

Аналогично условия $M3'$ и $M4'$ переходят в условия:

$A3'$. Числа $p - q$ и $p - q - p_1 + q_1$ взаимно просты с p .

$A4'$. Числа $p + q$ и $p + q - p_1 + q_1$ взаимно просты с p .

Из всего сказанного немедленно следует, что

для правильности классического алгоритмического метода с параметрами p, q, p_1, q_1 достаточно выполнение условий $A1, A2, A3$ (или $A3'$) и $A4$ (или $A4'$).