
Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

Обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. На плоскости даны три луча с общим началом и три точки, не лежащие на одной прямой и не лежащие на объединении этих лучей. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на этих лучах, а каждая сторона (или её продолжение) проходила через одну из заданных точек. (Фольклор)
2. В ряд записано n неотрицательных чисел с суммой S . За одну операцию разрешается выбрать два соседних числа, стереть их, а на их месте написать удвоенный максимум этих чисел. Докажите, что операции можно проводить так, чтобы через $n - 1$ шагов осталось число, не превосходящее $4S$. (С. Слободник)

3. Все стороны и диагонали четырёхугольника не превосходят 1. Каково максимально возможное значение его периметра?

(Фольклор)

4. При каком максимальном n может быть так, что 12 камней попарно разных масс можно n различными способами разделить на две кучи, равные по количеству камней и по суммарной массе?

(Л. Радзивиловский)

5. Существует ли последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такая, что $a_n \leq n^{10}$ и при этом ни один член последовательности не равен сумме нескольких других (различных)?

(С. В. Конягин)

6. Пусть $f(z_0, \dots, z_n)$ — функция $(n + 1)$ комплексной переменной, аналитическая в окрестности нуля. Пусть при этом $f(0) = 0$ и $f(z_0, 0, \dots, 0) \neq 0$. Докажите, что для некоторого натурального k функция имеет в некоторой окрестности нуля следующий вид:

$$f(z_0, \dots, z_n) = \\ = W(z_0, \dots, z_n) (z_0^k + f_1(z_1, \dots, z_n)z_0^{k-1} + \dots + f_k(z_1, \dots, z_n)),$$

где f_i, W — аналитические в окрестности нуля функции, причём $W(0, \dots, 0) \neq 0$.

Комплексная функция нескольких переменных $g(z_1, \dots, z_n)$ называется *аналитической в окрестности нуля*, если в некоторой окрестности нуля она определена и может быть представлена в виде сходящегося степенного ряда:

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1, k_2, \dots, k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n},$$

где коэффициенты c_{k_1, k_2, \dots, k_n} — комплексные числа.

(Подготовительная теорема Вейерштрасса)

7. Докажите, что для любого набора положительных чисел a_1, \dots, a_n выполнено неравенство

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > n \cdot \frac{1}{4}.$$

Можно ли при этом число $1/4$ заменить на большее?

(По мотивам Всесоюзной олимпиады школьников, 1969 год)

8. Докажите, что либо вершины графа можно правильно покрасить в четыре цвета, либо в графе найдутся два простых цикла, имеющие ровно две общие вершины.

(М. Пименов)

9. Бесквадратное (т. е. не делящееся на квадрат простого) натуральное число n называется *почти простым*, если оно для любого натурального x делит величину

$$x^{d_1} + x^{d_2} + \dots + x^{d_k} - kx,$$

где $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ — все натуральные делители числа n . Пусть r есть *простое число Ферма* (т. е. простое число вида $2^{2^m} + 1$), и пусть простой делитель p почти простого r удовлетворяет сравнению $p \equiv 1 \pmod{r}$. Докажите, что тогда $d_i \equiv 1 \pmod{r}$ при всех i , $1 \leq i \leq k$.
(Tigran Hakobyan, IMC 2024)

10. а) При каких m и n существует m комплексных попарно антикоммутирующих ортогональных матриц размера $n \times n$?

б) При каких m и n существует m ортогональных комплексных матриц $n \times n$, линейно независимых над \mathbb{C} и попарно коммутирующих?

(Матрица A ортогональна, если $AA^T = 1$. Матрицы A и B антикоммутируют, если $AB = -BA$.)
(А. Я. Канель-Белов)

11. Коника K касается сторон треугольника. Докажите, что коника с тем же центром, проходящая через середины сторон треугольника, касается K в двух точках.
(А. А. Заславский, Ф. К. Нилов)

12. (а) Пусть $F_{\{a,b\}}$ — свободная группа на двух образующих a и b . Пусть W — бесконечное вправо слово, состоящее из букв a и b , не периодичное ни с какого места. Пусть n — натуральное число, а S_n — множество всех элементов из $F_{\{a,b\}}$, которые записываются как подслова длины n слова W . Докажите, что множество S_n порождает в $F_{\{a,b\}}$ подгруппу индекса n .

(И. В. Митрофанов, IMC 2024)

(б) Приведите пример такой не периодичной ни с какого места последовательности W , что для любого n множество S_n образует базис свободной подгруппы, то есть между элементами из S_n нет соотношений, кроме тривиальных.
(V. Berthe, C. Felice, F. Dolce, D. Perrin, Ch. Reutenauer, G. Rindone)

13. а) В таблице 100×100 расставлены нули и единицы. За один такт во всех прямоугольниках, в вершинах которых стоят 3 единицы и один ноль, этот ноль меняется на единицу (стороны прямоугольников параллельны сторонам таблицы). После какого числа тактов числа в таблице гарантированно перестанут меняться?

(А. А. Разборов)

- б) Аналогичный вопрос, если за такт замена происходит только в одном месте. (А. Я. Канель-Белов)
14. а) Может ли ряд Фурье 2π -периодической непрерывной функции расходиться во всюду плотном множестве точек?
б) Функция f называется суммируемой по отрезку $[a, b]$, если интеграл Лебега её модуля $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ конечен.
Может ли ряд Фурье 2π -периодической суммируемой по периоду функции расходиться во всех точках? (А. Н. Колмогоров)
15. Множество Кантора K состоит из тех чисел отрезка $[0; 1]$, у которых в троичной записи есть представление, не содержащее единиц. Пусть X — метрическое пространство, K_1 и K_2 — образы множества Кантора при вложениях (то есть инъективных непрерывных отображениях $K \rightarrow X$).
Докажите, что существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$, переводящий K_1 в K_2 , если
(а) $X = \mathbb{R}$;
(б) $X = \mathbb{R}^2$.
(в) Верно ли аналогичное утверждение для трёхмерного пространства? (А. Я. Канель-Белов)