Ю. Л. Ершов, Об аксиоматизируемых классах моделей с бесконечной сигнатурой, *Алгебра и логика. Семинар*, 1962, том 1, номер 4, 32–44

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А

Семинар

июль - август
1962 г. Руководитель А.И. Мальцев Выпуск 4

ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ КЛАССАХ МОДЕЛЕЙ С БЕСКОНЕЧНОЙ СИГНАТУРОЙ

Ю.Л. Ершов

I. Пусть $\sigma=\{P_1^{n_1},\dots,P_\alpha^{n_\alpha},\dots\}_{\alpha<\beta}$ (α,β -трансфинитные числа, n_α - натуральные числа) - произвольная сигнатура, $P_\alpha^{n_\alpha}$ - символ α -го предиката, n_α - число аргументных мест этого предиката. Пусть $\mathfrak{K}$ совокупность всех конечных непустых кортежей трансфинитных чисел меньших β, вида $\kappa=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_l\}$, $l=1,2,\dots$ $\alpha_i<\alpha_j$, если $i<j$ $(i,j=1,2,\dots,l)$. $\sigma_\kappa \overset{df}{=} \{P_{\alpha_1}^{n_{\alpha_1}},\dots,P_{\alpha_l}^{n_{\alpha_l}}\}$, где $\kappa=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_l\}\in\mathfrak{K}$.

$\mathcal{L}_\sigma$ - класс всех моделей сигнатуры σ.

$\mathcal{L}_{\sigma_\kappa}$ - класс всех моделей сигнатуры σ_κ.

Пусть $\mathfrak{M}\in\mathcal{L}_\sigma$, κ - проекцией $(\kappa=(\alpha_1,\dots,\alpha_l)\in\mathfrak{K})$ модели $\mathfrak{M}$ назовем модель $\Pi_\kappa\mathfrak{M}$, которая получается из модели $\mathfrak{M}$ пренебрежением предикатами $P_\gamma^{n_\gamma}$, $\gamma<\beta$, $\gamma\neq\alpha_i$, $i=1,\dots,l$.

Пусть $K\subseteq\mathcal{L}_\sigma$, тогда $\Pi_\kappa K\overset{df}{=}\{\Pi_\kappa\mathfrak{M}\mid\mathfrak{M}\in K\}\subseteq\mathcal{L}_{\sigma_\kappa}$.

Во всех дальнейших определениях и утверждениях этого пункта мы будем предполагать конечность сигнатуры σ. В II мы освободимся от этого ограничения.

Пусть $\mathfrak{M}\in\mathcal{L}_\sigma$, "нумерованной n -подмоделью" модели $\mathfrak{M}$ назовем пару $\langle\mathfrak{M}',\varphi\rangle$, где $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ подмодель модели $\mathfrak{M}$, содержащая не более n элементов, а φ - отображение множества $\{1,2,\dots,n\}$ на $\mathfrak{M}'$. Функцию φ назовем нумерацией подмодели $\mathfrak{M}'$. Совокупность всех нумерованных n -подмоделей модели $\mathfrak{M}$ будем обозначать $\overline{S}_n(\mathfrak{M})$.

В дальнейшем вместо "нумерованная n -подмодель" будем кратко говорить "n -подмодель", а пару $\langle\mathfrak{M}',\varphi\rangle$ будем обозначать $\mathfrak{M}'_\varphi$. l -расширением n -подмодели $\mathfrak{M}'_\varphi$ модели $\mathfrak{M}$ назовем всякую $(n+l)$ -подмодель $\mathfrak{M}''_{\varphi'}$ модели $\mathfrak{M}$ такую, что $\mathfrak{M}''\supseteq\mathfrak{M}'$, а φ' совпадает с φ на $\{1,2,\dots,n\}$.

Пусть $\mathfrak{M}'_\varphi$ - n -подмодель модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}'_\psi$ n -подмодель модели $\mathfrak{N}$ $(\mathfrak{M},\mathfrak{N}\in\mathcal{L}_\sigma)$. Каноническим отображением подмодели $\mathfrak{M}'$ на подмодель $\mathfrak{N}'$, индуцируемым нумерациями φ и ψ, назовем отображение (быть может неоднозначное) $\tau:\varphi(i)\to\psi(i)$, $i=1,2,\dots,n$.

Будем говорить, что каноническое отображение τ является изоморфизмом, если оно взаимно однозначно и является изоморфизмом $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{N}'$ как моделей.

Пусть $\mathfrak{M}'_\varphi$, $\mathfrak{N}'_\psi$, $\mathfrak{P}'_\theta$ n - подмодели каких-нибудь моделей $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P} \in \mathcal{L}_6$, тогда легко проверяются следующие утверждения (в предположении, что τ_1 и τ_2 - изоморфизмы):

1) Если τ_1 -каноническое отображение $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{N}'$, τ_2-каноническое отображение $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{P}'$, то $\tau_2\tau_1$ есть каноническое отображение $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{P}'$.

2) Если τ_1 -каноническое отображение $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{N}'$, то τ_1^{-1} есть каноническое отображение $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{M}'$.

Каноничность везде подразумевается относительно нумераций φ, ψ, θ. n -парой назовем пару $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_n$, где $\mathfrak{M} \in \mathcal{L}_6$, $\mathfrak{M}'_\varphi \in S_n(\mathfrak{M})$.

Пусть $N = \{1,2,\ldots\}$, $A = \Lambda \cup N \cup \ldots \cup N^k \cup \ldots$, A - множество всех конечных кортежей натуральных чисел, Λ - пустой кортеж. По определению ранг Λ равен 0, ранг кортежа $(n_1,\ldots,n_k) \in N^k$ равен k. Для любого $n_0 \in N$ и любого кортежа $\varkappa = (n_1, n_2, \ldots, n_\ell) \in A$ определим отношение $\underset{\varkappa}{\leqslant}$ между n_0 -парами.

Определение (индуктивное).

1) $\varkappa = \Lambda$, $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0} \underset{\Lambda}{\leqslant} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_0}$ тогда и только тогда, когда каноническое отображение $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{N}'$ является изоморфизмом.

2) $\varkappa = (n_1, n_2, \ldots, n_{\ell+1})$, $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0} \underset{(n_1,\ldots,n_{\ell+1})}{\leqslant} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_0}$

тогда и только тогда, когда для любого n_1 -расширения $\mathfrak{N}''_{\psi'}$ n_0 -подмодели $\mathfrak{N}'_\psi$ модели $\mathfrak{N}$ найдется n_1 -расширение $\mathfrak{M}''_{\varphi'}$ n_0 -подмодели $\mathfrak{M}'_\varphi$ модели $\mathfrak{M}$ такое, что

$$\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}''_{\psi'} \rangle_{n_0+n_1} \underset{(n_2,\ldots,n_{\ell+1})}{\leqslant} \langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}''_{\varphi'} \rangle_{n_0+n_1}.$$

Приведенное выше определение отношения $\underset{\varkappa}{\leqslant}$ является видоизменением (несущественным) определения отношения $\mathfrak{M} \leqslant (\mathfrak{M}', n_1, \ldots, n_\ell)\mathfrak{N}$ между моделями, введенного А.Д.Таймановым в [2,3]. Связь этих понятий выясняется следующей очевидной леммой.

ЛЕММА 1. $\mathfrak{M} \leqslant (\mathfrak{M}', n_1, \ldots, n_\ell)\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда для n_1 -пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1}$, где $\mathfrak{M}'_\varphi$ n_1 - подмодель, полученная из $\mathfrak{M}'$ некоторой нумерацией, найдется n_1-пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$, такая, что

$$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1} \underset{(n_2,\ldots,n_\ell)}{\leqslant} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определения соответствующих отношений и свойств 1,2) канонического отображения.

ЛЕММА 2. (Транзитивность отношения $\underset{\varkappa}{\leqslant}$)

Если $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \underset{\varkappa}{\leq} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0}$ и $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0} \underset{\varkappa}{\leq} \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'_\theta\rangle_{n_0}$

то $$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \underset{\varkappa}{\leq} \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'_\theta\rangle_{n_0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести индукцией по рангу кортежа I) $\varkappa = \Lambda$, $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \underset{\Lambda}{\leq} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0}$ означает по определению отношения $\underset{\Lambda}{\leq}$, что каноническое отображение τ_1, $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{N}'$ является изоморфизмом, $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0} \underset{\Lambda}{\leq} \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'_\theta\rangle_{n_0}$ означает, что каноническое отображение τ_2 $\mathfrak{N}'$ на $\mathfrak{F}$ является изоморфизмом. Тогда отображение $\tau_2 \tau_1$ также является изоморфизмом (а также и каноническим отображением по свойству I) между $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{F}'$, следовательно, по определению отношения $\underset{\Lambda}{\leq}$ имеем

$$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \underset{\Lambda}{\leq} \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'_\theta\rangle_{n_0}.$$

Пусть лемма доказана для любого кортежа ранга ℓ и любого n_0

$$\varkappa = (n_1, n_2, \ldots, n_{\ell+1}).$$

Пусть $$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \underset{(n_1,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0},$$

$$\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0} \underset{(n_1,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq} \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'_\theta\rangle_{n_0}.$$

Возьмем произвольное n_1 -расширение $\mathfrak{F}_{\theta'}$ n_0 -подмодели $\mathfrak{F}'_\theta$ модели $\mathfrak{F}$, тогда найдется такое n_1 -расширение $\mathfrak{N}_{\psi'}$ n_0 -подмодели $\mathfrak{N}'_\psi$ модели $\mathfrak{N}$, что $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}''_{\theta'}\rangle_{n_0+n_1} \underset{(n_2,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}''_{\psi'}\rangle_{n_0+n_1}$. Для $\mathfrak{N}''_{\psi'}$ найдется такое n_1 -расширение $\mathfrak{M}''_{\varphi}$ n_0 подмодели $\mathfrak{M}'_\varphi$ модели $\mathfrak{M}$, что $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}''_{\psi'}\rangle_{n_0+n_1} \underset{(n_2,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq} \langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}''_{\varphi'}\rangle_{n_0+n_1}$. Так как ранг кортежа ($n_2,\ldots, n_{\ell+1}$) равен ℓ, то по индуктивному предположению: $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}''_{\theta'}\rangle_{n_0+n_1} \underset{(n_2,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq} \langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}''_{\varphi'}\rangle_{n_0+n_1}$. Следовательно, по определению отношения $\underset{(n_1,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq}$ имеем

$$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \underset{(n_1,\ldots,n_{\ell+1})}{\leq} \langle \mathfrak{F}, \mathfrak{F}'_\theta\rangle_{n_0}.$$

Лемма доказана.

Обозначения и понятия статьи [I] будем использовать без объяснения.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $\mathfrak{M} \leq (n_1, n_2, \ldots, n_\ell)\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \leq (n_1, n_2, \ldots, n_\ell)\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \leq (n_1, n_2, \ldots, n_\ell)\mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если T $\forall$ -множество кортежей, то $\mathfrak{M} \leq_T \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \leq_T \mathfrak{F}$ влечет $\mathfrak{M} \leq_T \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\mathfrak{M} \subseteq (n_1,\ldots,n_\ell)\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subseteq (n_1,\ldots,n_\ell)\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \subseteq (n_1,\ldots,n_\ell)\mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если T $\forall$ -множество кортежей, то $\mathfrak{M} \subseteq_T \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subseteq_T \mathfrak{F}$ влечет $\mathfrak{M} \subseteq_T \mathfrak{F}$.

II. Пусть σ -бесконечная сигнатура. Определение нумерованной n -подмодели и n -пары оставим без изменения. Пусть $\kappa\in\mathfrak{K}$, тогда $\Pi_\kappa\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_n \overset{df}{=} \langle\Pi_\kappa\mathfrak{M}, (\Pi_\kappa\mathfrak{M}')_\varphi\rangle_n$. Определим отношение $\leq_{\kappa,\varkappa}$, $\kappa\in\mathfrak{K}$, $\varkappa\in A$ для n -пар: $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_n \leq_{\kappa,\varkappa} \langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_n$ тогда и только тогда, когда

$$\Pi_\kappa\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_n \leq_{\varkappa} \Pi_\kappa\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_n .$$

Л Е М М А 2^{I}. (Т р а н з и т и в н о с т ь о т н о ш е н и я $\leq_{\kappa,\varkappa}$). Е с л и $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_n \leq_{\kappa,\varkappa} \langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_n$ $\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_n \leq_{\kappa,\varkappa} \langle\mathfrak{F},\mathfrak{F}'_\theta\rangle_n$, т о

$$\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_n \leq_{\kappa,\varkappa} \langle\mathfrak{F},\mathfrak{F}'_\theta\rangle_n .$$

Непосредственно следует из определения отношения $\leq_{\kappa,\varkappa}$ и леммы 2.

Пусть Φ -произвольная формула сигнатуры σ, если $P_{\alpha_1}^{n_{\alpha_1}},\ldots, P_{\alpha_s}^{n_{\alpha_s}}$ - все предикатные символы, встречающиеся в формуле Φ, то будем говорить, что Φ принадлежит сигнатуре σ_κ, $\kappa\in\mathfrak{K}$, если

$$\alpha_i \in \kappa, \quad i=1,2,\ldots,s.$$

Л Е М М А 3. П у с т ь

$$\Phi(x_1,\ldots,x_{n_0}) = \forall y_1,\ldots,y_{n_1}\exists z_1,\ldots,z_{n_2}\ldots Q u_1,\ldots,u_{n_\ell}\,\nu(x,y,z,\ldots,u), \nu(x,\ldots,u)$$

н е с о д е р ж и т к в а н т о р о в, Φ п р и н а д л е ж и т с и г н а т у р е σ_κ, т о г д а, е с л и $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \leq_{\kappa,(n_1,\ldots,n_\ell)} \langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0}$, т о и з $\mathfrak{M}\models\Phi(\varphi(1),\ldots,\varphi(n_0))$ с л е д у е т $\mathfrak{N}\models\Phi(\psi(1),\ldots,\psi(n_0))$.

Непосредственно следует из леммы 2 работы [I].

Для любого $\kappa\in\mathfrak{K}$ и $\varkappa=(n_0,n_1,\ldots,n_\ell)\in A$ определим отношение $\leq_{\kappa,\varkappa}$ между моделями: $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,\varkappa} \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда для любой n_0-пары $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0}$ найдется n_0 -пара $\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0}$ такая, что $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0} \leq_{\kappa,(n_1,\ldots,n_\ell)} \langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_0}$.

Пусть аксиома Φ имеет вид:

$$\underbrace{\forall x_1,\ldots,x_{n_1}\exists y_1,\ldots,y_{n_2},\ldots,Q u_1,\ldots,u_{n_\ell}}_{\ell \text{ перемен кванторов}}\nu(x,y,\ldots,u),$$

$\nu(x,y,\ldots,u)$ не содержит кванторов, тогда кортеж $(n_1,n_2,\ldots,n_\ell)$ будем называть номером аксиомы Φ. Если Φ имеет вид

$$\exists x_1,\ldots,x_{n_1}\forall y,\ldots,y_{n_2},\ldots,Q u_1,\ldots,u_{n_\ell}\nu(x,y,\ldots,u),$$

то номером Φ будем называть кортеж $(0,n_1,\ldots,n_\ell)$ (см. I).

Л Е М М А 4. К л а с с м о д е л е й $\mathfrak{M}$, у д о в л е т в о р я ю щ и х у с л о в и ю: с у щ е с т в у е т n_1 - п а р а $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}$ т а к а я, ч т о $\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2,\ldots,n_\ell)} \langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}$, г д е $\varkappa=(n_1,n_2,\ldots,n_\ell)$ - ф и к с и р о в а н н ы й к о р -

тех, $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$ – некоторая фиксированная n_1 –пара, описывается аксиомой $\Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa}$ с номером $(0, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ из E_ℓ, сигнатуры σ_κ, причем $m_1 = n_1$, $m_i \leq N(\kappa, n_1, n_2, \dots, n_\ell)$,

$$\Phi_{\kappa \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1} \varkappa} = \exists x_1, \dots, x_n \overline{\Phi}_{\kappa \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1} \varkappa}(x_1, \dots, x_n), \mathfrak{N} \models \overline{\Phi}_{\kappa,\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa}(\psi(0), \dots, \psi(n)).$$

Непосредственно следует из леммы I работы [3] и леммы I.

ЛЕММА 5. Класс моделей $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,\varkappa} \mathfrak{N}$, $\kappa \in \mathfrak{K}$, где $\varkappa = (n_1, \dots, n_\ell)$ – некоторый фиксированный кортеж, $\mathfrak{N}$ – фиксированная модель, описывается аксиомой $\Psi_{\kappa,\mathfrak{N},\varkappa}$ с номером из A_ℓ $(A_\ell = N^\ell)$ и сигнатуры σ_κ.

Непосредственно следует из леммы 2 работы [2] и леммы I

ЛЕММА 6. Пусть $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,(n_1,n_2,\dots,n_\ell)} \mathfrak{N}$. Тогда всякая аксиома с номером $(0, n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ сигнатуры σ_κ, истинная в $\mathfrak{M}$, истинна в $\mathfrak{N}$, а всякая аксиома с номером $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ сигнатуры σ_κ, истинная в $\mathfrak{N}$, истинна в $\mathfrak{M}$.

Непосредственно следует из леммы 3 работы [2] и леммы I. Пусть T –допустимое множество кортежей, т.е.

$$T = \{\bigcup_{\ell \in M} A_\ell\} \cup \{\bigcup_{\ell \in P} E_\ell\}, M, P \subseteq N \quad M \cap P = \phi .$$

F_T – множество всех аксиом с номерами из T.

ТЕОРЕМА I. Модель $\mathfrak{M}$ будет точкой F_{A_ℓ} прикосновения (см. [I]) класса $K \subseteq \mathcal{L}_\sigma$ тогда и только тогда, когда для любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, $\varkappa = (n_1, n_2, \dots, n_\ell) \in A_\ell$ любой n_1 – пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}$ найдется в K модель $\mathfrak{N}$ и n_1–пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$ такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2,\dots,n_\ell)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\mathfrak{M}$ –точка F_{A_ℓ} -прикосновения класса K. Пусть $\kappa \in \mathfrak{K}$, $\varkappa = (n_1, n_2, \dots, n_\ell) \in A_\ell$ и $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}$ – произвольная n_1 –пара. Пусть $\Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa}$ аксиома, встречающаяся в формулировке леммы 4) (с заменой $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{M}$). Так как номер $\Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa}$ принадлежит E_ℓ, то номер $\sim \Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa}$ принадлежит A_ℓ, следовательно, по определению точки F_{A_ℓ} -прикосновения $(\Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa})^* \cap K = \phi$, так как $\mathfrak{M} \in (\Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa})^*$. Пусть $\mathfrak{N} \in (\Phi_{\kappa,\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}, \varkappa})^* \cap K$, тогда по лемме 4 существует n_1 – пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$ такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2,\dots,n_\ell)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$. Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $\mathfrak{M}$ такова, что для любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, $\varkappa = (n_1, n_2, \dots, n_\ell) \in A_\ell$ любой n_1 –пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\psi \rangle_{n_1}$ найдется в K модель $\mathfrak{N}$ и n_1 –пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\psi \rangle_{n_1}$, такая что $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}\underset{\kappa,(n_2,\dots,n_e)}{\leq}\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle$, покажем, что $\mathfrak{M}$ точка F_{A_e} -прикосновения. Предположим противное. Пусть имеется аксиома $\Phi=\exists x_1,\dots,x_{n_1}\tilde{\Phi}(x_1\dots x_{n_1})$ сигнатуры σ_κ с номером из E_e, истинная на $\mathfrak{M}$ и ложная на любой модели из K. Пусть $a_1,a_2,\dots a_{n_1}\in\mathfrak{M}$ таковы, что $\mathfrak{M}\models\tilde{\Phi}(a_1,\dots,a_{n_1})$. Рассмотрим n_1 - пару $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}$, где $\mathfrak{M}'=\{a_1,a_2,\dots,a_{n_1}\}$, $\varphi(i)=a_i$ тогда в K найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_1-пара $\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_1}$ такая, что $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}\underset{\kappa,(n_2,\dots,n_e)}{\leq}\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_1}$. По лемме 3 имеем $\mathfrak{N}\models\tilde{\Phi}(\psi(1),\dots,\psi(n_1))$, т.е. в $\mathfrak{N}$ справедлива аксиома $\exists x_1,\dots,x_{n_1}\tilde{\Phi}(x_1\dots x_n)\Phi$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Модель $\mathfrak{M}$ будет точкой F_{E_e} прикосновения класса $K\subseteq\mathcal{L}_\sigma$ тогда и только тогда, когда для любого $\kappa\in\mathfrak{K}$ и $(0,n_1,\dots,n_e)\in E_e$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ такая, что $\mathfrak{N}\underset{\kappa,(n_1,\dots,n_e)}{\leq}\mathfrak{M}$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\mathfrak{M}$ точка F_{E_e} прикосновения класса K. Пусть $\kappa\in\mathfrak{K}$, $\varkappa=(0,n_1,\dots,n_e)\in E_e$. Пусть $\Psi_{\kappa,\mathfrak{M},(n_1,\dots,n_e)}$ - аксиома, встречающаяся в формулировке леммы 5, $\Psi_{\kappa,\mathfrak{M},(n_1,\dots,n_e)}$ имеет номер из A_e, следовательно $\sim\Psi_{\kappa,\mathfrak{M},(n_1,\dots,n_e)}$ имеет номер из E_e. $\mathfrak{M}\in(\Psi_{\kappa,\mathfrak{M},(n_1,\dots,n_e)})^*$ поэтому $(\Psi_{\kappa,\mathfrak{M},(n_1,\dots n_e)})^*\cap K\neq\emptyset$. Пусть $\mathfrak{N}\in(\Psi_{\kappa,\mathfrak{M},(n_1,\dots,n_e)})^*\cap K$ по лемме 5 $\mathfrak{N}\underset{\kappa,(n_1,\dots,n_e)}{\leq}\mathfrak{M}$. Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $\mathfrak{M}$ такова, что для любого $\kappa\in\mathfrak{K}$ и $(0,n_1,n_2,\dots,n_e)\in E_e$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ такая, что $\mathfrak{N}\underset{\kappa,(n_1,\dots,n_e)}{\leq}\mathfrak{M}$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ будет точкой F_{A_e} -прикосновения. Предположим противное. Пусть для некоторого $\kappa\in\mathfrak{K}$ и аксиомы Φ сигнатуры σ_κ с номером $\varkappa=(n_1,\dots,n_e)\in A_e$, $\mathfrak{M}\in\Phi^*$, $\Phi^*\cap K=\emptyset$. Найдем для данного κ и $\varkappa$ модель $\mathfrak{N}$ из K такую, что $\mathfrak{N}\underset{\kappa,\varkappa}{\leq}\mathfrak{M}$. Тогда по лемме 6 любая аксиома сигнатуры σ_κ с номером $\varkappa$, истинная в $\mathfrak{M}$, будет истинна и в $\mathfrak{N}$, следовательно, Φ истинна в $\mathfrak{N}$, т.е. $\mathfrak{N}\in\Phi^*\cap K$ что противоречит предположению. Теорема доказана.

Для того чтобы получить условия аксиоматизируемости аксиомами вида F_{A_e} и F_{E_e} нужно применить теорему I работы [I].

Пусть $T=\{\bigcup_{\ell\in M}A_e\}\cup\{\bigcup_{\ell\in P}E_\ell\}$, где $M,P\leq N$, $M\cap P=\emptyset$ -допустимое множество кортежей. Если $M\cup P$ неограниченное множество, то F_T -аксиоматизируемость эквивалентна просто аксиоматизируемости или F_A -аксиоматизируемости. Если же $M\cup P$ ограничено, то пусть $m=\max_n(n\in M\cup P)$. Если $m\in M$, то F_T -аксиоматизируемость эквивалентна F_{A_m} - аксиоматизируемости, если $m\in P$, то F_T -аксиоматизируемость эквивалентна F_{E_m} аксиоматизируемости. Условия F_{A_e} и F_{E_e} - аксиоматизируемости уже указаны. Укажем теперь условия F_A -аксиоматизируемости.

Т Е О Р Е М А 3. Следующие условия эквивалентны:

1) $K \in AC_\Delta$

2) Если для модели $\mathfrak{M}$ любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, любого кортежа $(n_1, n_2, \dots, n_e)$ и любой n_1-пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1}$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_1-пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$ такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2,\dots,n_e)}^{n_1} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$, то $\mathfrak{M} \in K$.

3) Если для модели $\mathfrak{M}$, любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, любого кортежа $(n_1, n_2, \dots, n_e)$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$, такая, что $\mathfrak{N} \leq_{\kappa,(n_1,\dots,n_e)} \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} \in K$.

Теорема 3 следует из теорем 1,2 и теоремы 1 из [1] и следующего замечания: модель $\mathfrak{M}$ будет точкой F_A -прикосновения тогда и только тогда, когда она будет точкой F_{A_e} (F_{E_e}) -прикосновения для всех $e \in N$.

Теоремы 1,2,3 и теорема 1 из [1] дают условия F_T -аксиоматизируемости для любого допустимого множества кортежей T.

III. Если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0} \leq_{\kappa,(n_1,\dots,n_e)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1}$ для любой $\mathfrak{M}'_\varphi \in \bar{S}_{n_0}(\mathfrak{M}) \subseteq \bar{S}_{n_0}(\mathfrak{N})$, то будем писать $\mathfrak{M} \underset{\kappa,(n_0,\dots,n_e)}{\subseteq} \mathfrak{N}$.

Пусть T $\forall$ -множество кортежей. Если для любого $\kappa \in \mathfrak{K}$ и $\varkappa \in T$ имеет место $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,\varkappa} \mathfrak{N}$, то будем писать $\mathfrak{M} \leqq_T \mathfrak{N}$.

Из леммы 2^1 легко получается

С Л Е Д С Т В И Е 1^1. Отношения $\leq_{\kappa,\varkappa}$ и $\leqq_T$ (где $\kappa \in \mathfrak{K}$, $\varkappa \in A$, T $\forall$ - множество кортежей) транзитивны.

Легко проверяются следующие свойства:

а) Из $\mathfrak{M} \subseteq_{\kappa,\varkappa} \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,\varkappa} \mathfrak{N}$.

б) Если $\varkappa = (n_1, n_2, \dots, n_e)$, $\bar{\varkappa} = (n_1, \dots, n_e, \dots, n_s)$, то из $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,\bar{\varkappa}} \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{M} \leq_{\kappa,\varkappa} \mathfrak{N}$ для любого $\kappa \in \mathfrak{K}$.

в) Из $T_1 \leq T_2$ и $\mathfrak{M} \leqq_{T_2} \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{M} \leqq_{T_1} \mathfrak{N}$.

Пусть T $\forall$ -множество кортежей. Класс $K \subseteq \mathcal{L}_\sigma$ будем называть T -классом, если выполнено следующее условие: если для модели $\mathfrak{M}$, любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, любого $(n_0, n_1, \dots n_e) \in T$ и любой n_0-пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0}$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_0-пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_0}$ такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0} \leq_{\kappa,(n_1,\dots,n_e)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_0}$, то в K найдется модель $\mathfrak{P}$ такая, что $\mathfrak{M} \leqq_T \mathfrak{P}$.

Т Е О Р Е М А 4. Если $K \in AC_\Delta$, то для $\forall$ -множества кортежей T, K будет T -классом.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $K \in AC_\Delta$. Пусть $\mathfrak{M}$ такова, что для любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, $(n_0, n_1, \dots, n_e) \in T$ и любой n_0-пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0}$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_0-пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_0}$ такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_0} \leq_{\kappa,(n_1,\dots,n_e)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_0}$. Расширим сигнатуру σ, добавив в качестве индивидуальных символов элементы модели $\mathfrak{M}$. Рассмотрим систему аксиом Σ, состоящую из следующих аксиом:

I) Σ_K - система аксиом, определяющая класс K.

2) Диаграммы модели $\mathfrak{M}$.

3) Всех формул $\Phi_{K\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_0}},\varkappa(\varphi(1),\dots,\varphi(n_0))$ (см. лемму 4), для $K\in\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}'_\varphi\in S_{n_0}(\mathfrak{M})$, $\varkappa\in T^{n_0}$.

Покажем, что Σ совместна. Возьмем произвольную конечную подсистему $\Sigma_1\subset\Sigma$, в нее входит конечное число формул из 2), 3) пусть $\tilde{K}\in\mathfrak{K}$ таково, что для любой аксиомы Φ из Σ_1 Φ принадлежит сигнатуре $\sigma_{\tilde{K}}$ (не учитывая констант). Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}=\{a|a$ встречается в формуле из $\Sigma_1\}$ - конечная подмодель $\mathfrak{M}$, содержащая m_0 элементов. Пусть

$$\Phi_{K_1,\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_{1,\varphi}\rangle_{n_{01}}},\varkappa_1(\varphi_1(1),\dots,\varphi(n_{01})),\dots,\Phi_{K_s\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_{s,\varphi_s}\rangle_{n_{0s}}}(\varphi_s(1),\dots,\varphi_s(n_{0s})).$$

все формулы из 3), встречающиеся в Σ_1.

$$\varkappa_j=(n_{0j},\dots,n_{\ell_j j}),\ j=1,2,\dots,s,\quad m_i=\max_j n_{ij},\ i=1,2,\dots,\tilde{\ell}=\max_j \ell_j$$

Сделаем произвольную m_0-нумерацию φ подмодели $\tilde{\mathfrak{M}}$. Рассмотрим m_0-пару $\langle\mathfrak{M},\tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{\varphi}}\rangle_{m_0}$ для $\tilde{K},(m_0,m_1,\dots,m_{\tilde{\ell}})$ найдем в K модель $\mathfrak{N}$ и m_0-пару $\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{m_0}$ такую, что

$$\langle\mathfrak{M},\tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{\varphi}}\rangle_{m_0}\underset{\tilde{K},(m_1,\dots,m_{\tilde{\ell}})}{\leq}\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{m_0}.$$

Если в $\mathfrak{N}$ теперь определить константы a из $\mathfrak{M}$ так, чтобы для $a\in\tilde{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\varphi}(i)=a$ выполнялось $a=\psi(i)$, то все формулы из Σ_1 будут выполняться. По локальной теореме в K найдется модель $\mathfrak{F}'$ такая, что в ней выполняется вся система аксиом Σ. Заменив в $\mathfrak{F}'$ константы a соответствующими элементами из $\mathfrak{M}$, получим желаемую модель $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $K\in AC_\Delta$, то K является A_ℓ-классом для любого $\ell\in N$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $K\in AC_\Delta$, то K является A-классом.

IУ. В этом пункте укажем условия конечной аксиоматизируемости, являющиеся непосредственной перефразировкой условий, данных в работе [3].

ТЕОРЕМА 5. Следующие условия эквивалентны:

I) $K\in\underbrace{\forall\exists\forall\dots}_{\ell}C$

2) Существует такое $K\in\mathfrak{K}$, такой кортеж $(n_1,n_2,\dots,n_\ell)$, что если для модели $\mathfrak{M}$ и любой n_1-пары $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_1-пара $\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_1}$, такая, что $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}'_\varphi\rangle_{n_1}\underset{K,(n_2,\dots,n_\ell)}{\leq}\langle\mathfrak{N},\mathfrak{N}'_\psi\rangle_{n_1}$, то $\mathfrak{M}\in K$.

Легко следует из теоремы I работы 3.

ТЕОРЕМА 6. Следующие условия эквивалентны:

I) $K\in\underbrace{\exists\forall\exists\dots}_{\ell}C$.

2) Существует такое $\kappa \in \mathfrak{K}$ и такой кортеж $(n_1,\dots,n_\ell)$, что если для модели $\mathfrak{M}$ в K найдется модель $\mathfrak{N}$ такая, что $\mathfrak{N} \leq_{\kappa,(n_1,\dots,n_\ell)} \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} \in K$.

Легко следует из теоремы 2 работы [3].

С аналогичными изменениями можно переформулировать для бесконечной сигнатуры и теоремы 3,4 из [3].

У. Выясним, что представляют собой T -классы моделей для любого V -множества кортежей T. Для этого достаточно выяснить строение A_ℓ -классов и A -классов моделей.

ТЕОРЕМА 7. Класс $K \subseteq \mathcal{L}_6$ тогда и только тогда будет A_ℓ -классом, если $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in AC_\Delta$ (точнее $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in F_{A_\ell}C_\Delta$).

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть K A_ℓ -класс. Покажем, что $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$ содержит все свои точки F_{A_ℓ} -прикосновения. Действительно, пусть для модели $\mathfrak{M}$, любого $\kappa \in \mathfrak{K}$ и $(n_1, n_2,\dots,n_\ell) \in A_\ell$ любой n_1 -пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1}$ в $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$ найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_1-пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$, такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2,\dots,n_\ell)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$. Так как $\mathfrak{N} \in \underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$, то в K найдется модель $\tilde{\mathfrak{N}}$ такая, что $\mathfrak{N} \leq_{A_\ell} \tilde{\mathfrak{N}}$, но тогда $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2,\dots,n_\ell)} \langle \tilde{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$. Следовательно в K найдется модель $\mathfrak{X}$ такая, что $\mathfrak{M} \leq_{A_\ell} \mathfrak{X}$, а это означает, что $\mathfrak{M} \in \underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$. По теореме I и теореме I из [I] $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in AC_\Delta$ (даже $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in F_{A_\ell}C_\Delta$).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in AC_\Delta$. Тогда по теореме 4 $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$ будет A_ℓ -классом. Покажем, что и K является A_ℓ -классом. Действительно, пусть для модели $\mathfrak{M}$ любого $\kappa \in \mathfrak{K}$, $(n_1,\dots,n_\ell) \in A_\ell$ и любой n_1 -пары $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1}$ в $K \subseteq \underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$ найдется модель $\mathfrak{N}$ и n_1-пара $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$ такая, что $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\varphi \rangle_{n_1} \leq_{\kappa,(n_2\dots n_\ell)} \langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'_\varphi \rangle_{n_1}$, тогда в $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$ найдется модель $\tilde{\mathfrak{N}}$ такая, что $\mathfrak{M} \leq_{A_\ell} \tilde{\mathfrak{N}}$, но $\tilde{\mathfrak{N}} \in \underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)$, следовательно, в K найдется модель $\mathfrak{X}$ такая, что $\tilde{\mathfrak{N}} \leq_{A_\ell} \mathfrak{X}$. По транзитивности $\mathfrak{M} \leq_{A_\ell} \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $K \subseteq \mathcal{L}_6$ является A_ℓ -классом $\ell' < \ell$, то K является также $A_{\ell'}$ -классом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M \in AC_\Delta$, то $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(M) \in AC_\Delta$ для любого $\ell \in N$. Итак, если K является A_ℓ -классом, то по теореме 7 $\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in AC_\Delta$, отсюда $\underline{\mathfrak{S}}_{A_{\ell'}}(\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K) \in AC_\Delta$, из свойств отношений $\leq_{\kappa,\varkappa}$, $\leq_T$ легко видеть, что $\underline{\mathfrak{S}}_{A_{\ell'}}(\underline{\mathfrak{S}}_{A_\ell}(K)) = \underline{\mathfrak{S}}_{A_{\ell'}}(K)$ итак $\underline{\mathfrak{S}}_{A_{\ell'}}(K) \in AC_\Delta$ и, следовательно, по теореме 7 K является $A_{\ell'}$ -классом.

Так же, как теорема 7, доказывается

ТЕОРЕМА 8. Класс $K \subseteq \mathcal{L}_6$ тогда и только тогда будет A -классом, если $\underline{\mathfrak{S}}_A(K) \in AC_\Delta$.

СЛЕДСТВИЕ. Если K является A -классом, то K является A_ℓ -классом для любого $\ell \in N$.

Это следует из соотношения $\mathfrak{S}_{A_\ell}(\mathfrak{S}_A(K)) = \mathfrak{S}_{A_\ell}(K)$.

Из теоремы 8 непосредственно получаем

ТЕОРЕМУ 9. A -класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он арифметически замкнут.

В работе [5] было введено видоизмененное определение псевдоаксиоматизируемости (см. [4]). Будем пользоваться этим определением.

ЛЕММА 7. Класс $K \leqslant \mathcal{L}_6$ псевдоаксиоматизируем тогда и только тогда, когда его арифметическое замыкание $Cl(K) \in AC_\Delta$.

Действительно, арифметическое замыкание псевдоаксиоматизируемого класса, очевидно, псевдоаксиоматизируемо. По теореме I из [5] псевдоаксиоматизируемый класс тогда и только тогда аксиоматизируем, когда он арифметически замкнут. Следовательно, если K псевдоаксиоматизируем, то $Cl(K) \in AC_\Delta$. Пусть $Cl(K) \in AC_\Delta$, Σ система аксиом такая, что для любой конечной подсистемы $\Sigma_1 \subset \Sigma$ в K найдется подходящая модель $\mathfrak{M} \in (\Sigma_1)^*$, тогда по локальной теореме в $Cl(K) \geqslant K$ найдется модель $\mathfrak{N}$ такая, что $\mathfrak{N} \in (\Sigma)^*$ (так как $Cl(K) \in AC_\Delta$). Но $\mathfrak{N} \in Cl(K)$, следовательно, в K существует модель $\overline{\mathfrak{N}}$ такая, что $\mathfrak{N}^* = \overline{\mathfrak{N}}^*$, а так как $\mathfrak{N}^* \geqslant \Sigma$, то и $\overline{\mathfrak{N}}^* \geqslant \Sigma$, следовательно, $\overline{\mathfrak{N}} \in (\Sigma)^*$. Класс K псевдоаксиоматизируем. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть K T -класс, где T $\forall$-множество кортежей, тогда $Cl(K)$ также T -класс.

Лемма очевидна.

Из теорем 8,9, лемм 7,8 следует:

Любой A -класс псевдоаксиоматизируем.

УI. Теоремы пункта У позволяют давать много примеров неаксиоматизируемых T -классов моделей.

Пример I. Пусть $K \in AC_\Delta$ и K содержит бесконечные модели. Пусть γ -произвольный неограниченный класс бесконечных мощностей, не содержащий некоторую мощность, такую, что в K имеется модель этой мощности. Пусть K_γ класс всех моделей из K таких, что их мощности либо конечны, либо принадлежат γ. Тогда $Cl(K_\gamma) = K$, $K \neq K_\gamma$ и, следовательно, $K_\gamma \bar{\in} AC_\Delta$. Но из теоремы о расширении легко следует, что

$$Cl(K_\gamma) = \mathfrak{S}_A(K_\gamma) = K \in AC_\Delta .$$

Тогда по теореме 8 и следствию K_γ будет A -классом и A_ℓ -классом для любого $\ell \in N$.

Пример 2. Пусть $K \in AC_\Delta$, $\mathfrak{M} \in K$ и $\mathfrak{M}$ бесконечна, тогда $K \setminus [\mathfrak{M}] \bar{\in} AC_\Delta$ (где $[\mathfrak{M}]$ - класс всех моделей, изоморфных $\mathfrak{M}$), но по теореме о расширении

$$\mathfrak{S}_A(K \setminus [\mathfrak{M}]) = \mathcal{Cl}(K \setminus [\mathfrak{M}]) = K \in AC_\Delta \ ,$$

следовательно, $K \setminus [\mathfrak{M}]$ A - класс и A_ℓ - класс для любого $\ell \in N$.

С.Р.Когаловский ввел понятие квазипроективного класса моделей (класса замнутого относительно ультрапроизведения).
Пусть $K \in AC_\Delta$,$\mathfrak{M}_\alpha \in K$,$\alpha \in I$, $\mathfrak{D}$ - ультрафильтр над I и $\mathfrak{M} = \prod_{\alpha \in I} \mathfrak{M}_\alpha / \mathfrak{D} \not\equiv \mathfrak{M}_{\alpha'}$ (для всех $\alpha' \in I$) и $\mathfrak{M}$ бесконечна. Тогда $K \setminus [\mathfrak{M}]$ будет A -классом и A_ℓ -классом для любого $\ell \in N$ но не будет квазипроективным.

Пример 3. Пусть $K \in AC_\Delta$ содержит бесконечные модели. Образуем класс K_n так: для каждого полного расширения $\Sigma \supseteq (K)^*$ возьмем по одной модели $\mathfrak{M} \in (\Sigma)^*$, эти модели и образуют класс K_n . Из леммы 7 следует, что K_n псевдоаксиоматизируем. Но легко видеть, что $\mathfrak{S}_A(K_n) \neq K = \mathcal{Cl}(K_n)$, следовательно, $\mathfrak{S}_A(K_n) \bar{\in} AC_\Delta$, также и $\mathfrak{S}_{A_\ell}(K_n) \neq K$ для любого $\ell \in N$ Итак, K_n не является A - классом и A_ℓ - классом ни для какого $\ell \in N$, но является псевдоаксиоматизируемым.

Все построенные ранее примеры различных неаксиоматизируемых T - классов строились так, что полученный T - класс не является арифметически замкнутым. Всегда ли это так? Точнее (имея в виду лемму 8) можно поставить следующие вопросы:

I. Будет ли всякий A_ℓ - класс псевдоаксиоматизируем?

2. Будет ли псевдоаксиоматизируем класс, являющийся A_ℓ -классом для любого $\ell \in N$?

Этот вопрос тесно связан со следующим

3. Будет ли A -классом класс, являющийся A_ℓ -классом для любого $\ell \in N$?

Из положительного решения вопроса 3 следует положительное решение вопроса 2, так как из лемм 7,8, теоремы 9 следует, что A -класс псевдоаксиоматизируем, хотя пример 3 показывает, что обратное несправедливо.

Отрицательный ответ на вопрос I дает следующий пример неаксиоматизируемого арифметически замкнутого A_1 - класса.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{A}$ - класс всех абелевых групп. Сигнатура

$$\sigma = \{P_1^3\} \quad (P_1^3(x,y,z) \Longleftrightarrow x+y=z).$$

Пусть $\mathfrak{A}_p$ - подкласс из $\mathfrak{A}$, который выделяется из $\mathfrak{A}$ аксиомами:

1) $$\exists x \forall y [\sim P_1^3(y,y,x)],$$

2) $$\exists x_1 \ldots x_n \underset{i \neq j}{\&} [x_i \neq x_j], \quad n = 2, 3, \ldots$$

Легко показать, что не является конечно аксиоматизируемым (см. [6]). Тогда $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1$ не является аксиоматизируемым, но является арифметически замкнутым классом. Покажем, что $\mathfrak{A}_2$ является A_1 -классом (или иначе, удовлетворяет условию теоремы Хенкина). Пусть $\mathfrak{V}\mathfrak{A}$ - класс полных абелевых групп; легко видеть, что $\mathfrak{V}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_2$; из того, что любая абелева группа изоморфно вкладывается в некоторую полную абелеву группу, следует что $\mathfrak{A}_2$ является A_1 -классом.

Теперь возникает следующий вопрос:

4. Существует ли такое ℓ , что для любого $\ell' \geq \ell$ и любого $A_{\ell'}$ - класса K, K будет псевдоаксиоматизируем?

Из положительного ответа на вопрос 4 следует положительный ответ на вопрос 2. Ответы на вопросы 2,3,4 автору не известны.

В заключение укажем пример, указывающий на необходимость введения параметра $\kappa \in \mathfrak{K}$ в формулировках теорем I,2,3,5,6 (т.е.невозможность пользоваться в формулировках этих теорем отношением $\underset{\mathfrak{K}}{\leq}$ как оно введено в пункте II) в случае бесконечности сигнатуры σ .

Пример 5. Пусть $\sigma = \{P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots\}_{n<\omega}$. Рассмотрим две модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, основное множество $\mathfrak{M}$ состоит из всех характеристических функций конечных подмножеств натурального ряда, основное множество $\mathfrak{N}$ состоит из всех характеристических функций рекурсивных подмножеств натурального ряда. Предикаты P_n' определим на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ следующим образом: $P_n'(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(n) = 1$. Легко проверяется, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ арифметически эквивалентны. Следовательно, $\mathfrak{N}$ будет точкой A -прикосновения класса $Cl(\mathfrak{M})$. Пусть $\psi \in \mathfrak{N}$ - характеристическая функция бесконечного рекурсивного подмножества, тогда ни для какой 1 - пары $\langle \mathfrak{M}, \varphi \rangle$ не будет

$$\langle \mathfrak{N}, \psi \rangle_1 \underset{\Lambda}{\leq} \langle \mathfrak{M}, \varphi \rangle_1 .$$

Пользуюсь случаем поблагодарить А.Д. Тайманова за беседы, касающиеся темы данной статьи.

Поступила в редакцию
12.IX.1962

Литература

1. Тайманов А.Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей. Сб.,"Алгебра.Логика.Семинар", 1962, т.I, вып.4, 5-31.
2. Тайманов А.Д. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей.I. - Изв.АН СССР, сер.матем., 1961, 25, 4, 755-764.
3. Тайманов А.Д. Конечно аксиоматизируемые классы моделей. - Сиб.матем.журн., 1961, II, 5, 757-766.
4. Мальцев А.И. О классах моделей с операцией порождения.- ДАН СССР, 1957, 116, 5, 738-741.
5. Когаловский С.Р. О мультипликативных полугруппах колец.- ДАН СССР, 1961, 140, 5, 1005-1007.
6. Шиханович Ю.А. Примеры применения математической логики к алгебре. - Труды 3-го Всесоюзного матем.съезда, 1956, 2, 148-149.