А. Ю. Александров, О построении функций Ляпунова для нелинейных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 291–297

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 291–297

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. **А. Ю. Александров**

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2), \quad \dot{x}_2 = cf_1^{\eta}(x_1) + df_2^{\zeta}(x_2). \tag{1}$$

Здесь a, b, c, d – постоянные коэффициенты; λ, μ, η, ζ – положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями; функции $f_j(x_j)$ непрерывны при $|x_j| < H$ (H – некоторая положительная постоянная) и удовлетворяют условию $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \neq 0$, $j = 1, 2$. Таким образом, уравнения (1) имеют нулевое решение.

Анализу устойчивости решений двумерных систем дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1–8]). Задача исследования устойчивости системы вида (1) представляет собой одно из обобщений известной проблемы М.А. Айзермана [1, с. 56–57]. Для ее решения можно использовать различные подходы.

В работах [3, 4–6, 9] получены критерии асимптотической устойчивости для систем второго порядка, правые части которых удовлетворяют обобщенным условиям Рауса–Гурвица. Однако применение этих критериев к уравнениям (1) приводит к дополнительным ограничениям на функции $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$.

В работах [1, 10–12] рассматривался случай $\lambda = \mu = \eta = \zeta = 1$ и исследовались условия абсолютной устойчивости системы (1) (требовалось определить множество значений коэффициентов a, b, c, d, для которых нулевое решение асимптотически устойчиво в целом при любом выборе допустимых функций $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$). С.К. Персидским с помощью метода секторов установлены критерии абсолютной устойчивости и абсолютной неустойчивости для широкого класса нелинейных систем [10, 11]. Однако использование этого метода возможно только при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты a, b, c, d. В работах [1, 11, 12] для анализа устойчивости нулевого решения системы (1) применялся второй метод Ляпунова. Функция Ляпунова строилась в виде

$$V = \alpha \int_0^{x_1} f_1(\tau)\,d\tau + \int_0^{x_2} f_2(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$. Определялись условия, при выполнении которых число α можно подобрать так, чтобы функция (2) удовлетворяла требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [1, с. 16]. Было доказано [12], что такое значение α существует тогда и только тогда, когда для коэффициентов системы выполняются неравенства $a < 0$, $d < 0$, $ad - bc > 0$.

В работе [13] предполагалось, что $\lambda = \mu \neq 1$, $\eta = \zeta = 1$, а в качестве функции Ляпунова выбиралась функция

$$V = \alpha \int_0^{x_1} f_1(\tau)\,d\tau + \int_0^{x_2} f_2^{\lambda}(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Показано, что для существования функции Ляпунова вида (3), удовлетворяющей требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$a < 0, \quad d < 0, \quad ad^{\lambda} - bc^{\lambda} > 0. \tag{4}$$

Цель настоящей работы – определение условий, при выполнении которых функцию Ляпунова для системы (1) можно построить в виде

$$V = \alpha \int\limits_0^{x_1} f_1^{\xi}(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{x_2} f_2^{\theta}(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

где ξ и θ – положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\alpha > 0$.

2. Условия существования функций Ляпунова. Не умаляя общности, можно считать, что $\eta = \zeta = 1$. Таким образом, будем рассматривать систему

$$\dot{x}_1 = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2), \quad \dot{x}_2 = cf_1(x_1) + df_2(x_2). \tag{6}$$

При любом $\alpha > 0$ функция (5) положительно определена. Продифференцировав ее в силу уравнений (6), получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)} = \alpha af_1^{\lambda+\xi}(x_1) + \alpha bf_1^{\xi}(x_1)f_2^{\mu}(x_2) + cf_1(x_1)f_2^{\theta}(x_2) + df_2^{\theta+1}(x_2).$$

Следовательно, поставленная задача сводится к нахождению множества значений параметров a, b, c, d, λ, μ, ξ, θ, для которых число $\alpha > 0$ можно выбрать так, чтобы функция

$$W = \alpha ay_1^{\lambda+\xi} + \alpha by_1^{\xi}y_2^{\mu} + cy_1y_2^{\theta} + d\,y_2^{\theta+1} \tag{7}$$

являлась отрицательно-определенной. Очевидно, что коэффициенты a и d в системе (6) должны быть меньше нуля. Далее в работе предполагаем, что это условие выполнено.

Рассмотрим сначала случай $bc = 0$. Используя свойства обобщенно-однородных функций [14, с. 190–191], а также леммы 2 и 4 из работы [15, с. 26–28], получаем, что справедлива

Теорема 1. *Если $b = 0$, $c = 0$, то функция (7) отрицательно определена при любых допустимых значениях параметров a, d, λ, μ, ξ, θ, α.*

Если $b = 0$, $c \neq 0$, то для отрицательной определенности функции (7) необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $\theta + 1 \geq \lambda + \xi$, причем в случае $\theta + 1 = \lambda + \xi$ параметр α должен удовлетворять условию

$$\alpha > \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda+\xi-1}{d}\right)^{\lambda+\xi-1}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\lambda+\xi}. \tag{8}$$

Если $b \neq 0$, $c = 0$, то для отрицательной определенности функции (7) необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $(\theta+1)/(\lambda+\xi) \leq \mu/\lambda$, причем в случае $(\theta+1)/(\lambda+\xi) = \mu/\lambda$ параметр α должен удовлетворять условию

$$\alpha < \frac{d}{\lambda}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{\xi/\lambda}\left(\frac{\lambda+\xi}{b}\right)^{1+\xi/\lambda}. \tag{9}$$

Пусть теперь $bc \neq 0$. Если $\mu \neq \lambda$, то, снова применяя результаты работ [14, с. 190–191] и [15, с. 26–28], получаем, что функция (7) является отрицательно-определенной тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\alpha by_1^{\xi}y_2^{\mu} + cy_1y_2^{\theta} \equiv 0$;
2) $1 \leq (\theta+1)/(\lambda+\xi) \leq \mu/\lambda$.

Значит, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Если $\mu < \lambda$, то для отрицательной определенности функции (7) необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения $\xi = 1$, $\mu = \theta$, $bc < 0$, $\alpha = -c/b$.*

Теорема 3. *Пусть $\mu > \lambda$. Тогда для отрицательной определенности функции (7) необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $1 \leq (\theta+1)/(\lambda+\xi) \leq \mu/\lambda$, причем* *если* $1 < (\theta + 1)/(\lambda + \xi) < \mu/\lambda$, *то в качестве* α *можно выбирать любое положительное число, если* $(\theta + 1)/(\lambda + \xi) = 1$, *то* α *выбираем так, чтобы выполнялось условие (8), а если* $(\theta + 1)/(\lambda + \xi) = \mu/\lambda$, *то – условие (9).*

Осталось исследовать случай $\mu = \lambda$. При этом, не умаляя общности, можно считать, что $\lambda \geq 1$. Таким образом, рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = af_1^\lambda(x_1) + bf_2^\lambda(x_2), \quad \dot{x}_2 = cf_1(x_1) + df_2(x_2). \tag{10}$$

При данных значениях параметров для отрицательной определенности функции (7) необходимо, чтобы выполнялось равенство $\theta+1 = \lambda+\xi$. Следовательно, функции V и W должны иметь соответственно вид

$$V = \alpha \int\limits_0^{x_1} f_1^\xi(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^{x_2} f_2^{\lambda+\xi-1}(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + \alpha b y_1^\xi y_2^\lambda + c y_1 y_2^{\lambda+\xi-1} + d y_2^{\lambda+\xi}. \tag{12}$$

Здесь по-прежнему ξ – положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\alpha > 0$. Заметим, что функция $W(y_1, y_2)$ является однородной порядка $\lambda + \xi$.

В случае $\xi = 1$ условия существования для системы (10) функции Ляпунова вида (11) получены в работе [13] (см. неравенства (4)). Поэтому далее будем считать, что $\xi \neq 1$.

3. Основная теорема. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$(\xi - 1)(\lambda + \xi)(\tau^\xi - 1)(\tau^{\lambda+\xi-1} - 1) = \xi(\lambda + \xi - 1)(\tau^{\xi-1} - 1)(\tau^{\lambda+\xi} - 1).$$

На интервале $(-1, 0)$ это уравнение имеет единственный корень, который обозначим через τ_0. Положим

$$\beta = \frac{1-\xi}{1-\tau_0^{\lambda+\xi}} \left(\frac{\lambda+\xi-1}{1-\tau_0^\xi}\right)^{\lambda-1} \left(\frac{\tau_0(1-\tau_0^{\xi-1})}{\lambda+\xi}\right)^\lambda.$$

Теорема 4. *Для существования числа* $\alpha > 0$, *при котором функция (12) отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$ad^\lambda + \omega bc^\lambda > 0. \tag{13}$$

Здесь $\omega = -1$, *если* $bc > 0$, *и* $\omega = \beta$, *если* $bc < 0$.

Доказательство. При $y_2 \neq 0$ имеем $W = y_2^{\lambda+\xi}(g(\alpha, y) + d)$, где $y = y_1/y_2$, $g(\alpha, y) = \alpha a y^{\lambda+\xi} + \alpha b y^\xi + cy$. Значит, функция (12) будет отрицательно-определенной тогда и только тогда, когда для всех $y \in (-\infty, +\infty)$ справедливо соотношение

$$g(\alpha, y) + d < 0. \tag{14}$$

Проведем замену переменных. Пусть $\gamma = \alpha\lambda|b/c|(b/a)^{(\xi-1)/\lambda}$, $z = -y(a/b)^{1/\lambda}$. Тогда условие (14) примет вид $\tilde{g}(\gamma, z) + \tilde{d} > 0$ при всех $z \in (-\infty, +\infty)$. Здесь $\tilde{d} = (\lambda d/b)|b/c|(a/b)^{1/\lambda}$, $\tilde{g}(\gamma, z) = \gamma z^{\lambda+\xi} - \gamma z^\xi - \lambda z \operatorname{sign}(bc)$.

Для получения наибольшей области в пространстве коэффициентов a, b, c, d нужно найти значение

$$\rho = \sup_{\gamma>0} \min_{z\in(-\infty,+\infty)} \tilde{g}(\gamma, z).$$

Если $bc > 0$, то уравнение

$$\partial\tilde{g}(\gamma, z)/\partial z = 0 \tag{15}$$

для любого $\gamma > 0$ имеет единственное решение $z = z(\gamma)$. При этом

$$\rho = \sup_{\gamma>0} \tilde{g}(\gamma, z(\gamma)) = -\lambda.$$

В случае $bc < 0$ существуют три решения уравнения (15): $z_1(\gamma)$, $z_2(\gamma)$, $z_3(\gamma)$. Функция $z_1(\gamma)$ определена при всех $\gamma \in (0, +\infty)$, а функции $z_2(\gamma)$ и $z_3(\gamma)$ – на промежутке $[\bar{\gamma}, +\infty)$, если $\xi > 1$, и на промежутке $(0, \bar{\gamma}]$, если $\xi < 1$. Здесь

$$\bar{\gamma} = \frac{\lambda + \xi - 1}{\xi}\left(\frac{(\lambda + \xi)(\lambda + \xi - 1)}{\xi(\xi - 1)}\right)^{(\xi-1)/\lambda}.$$

Следовательно, имеем

$$\rho = \begin{cases} \sup\limits_{\gamma \geq \bar{\gamma}} \min\limits_{i=1,2,3} \tilde{g}(\gamma, z_i(\gamma)) & \text{при} \quad \xi > 1, \\ \sup\limits_{\gamma \in (0,\bar{\gamma}]} \min\limits_{i=1,2,3} \tilde{g}(\gamma, z_i(\gamma)) & \text{при} \quad \xi < 1. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $\rho = -\lambda\beta^{1/\lambda}$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = ax_1^3 + bx_2^3, \quad \dot{x}_2 = cx_1^3 + dx_2^3, \tag{16}$$

где a, b, c, d – постоянные коэффициенты.

Пусть нулевое решение уравнений (16) асимптотически устойчиво. Тогда для рассматриваемой системы существует непрерывно дифференцируемая однородная порядка m функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [16, с. 115–123]. При этом в качестве m можно задавать любое рациональное число с четным числителем и нечетным знаменателем, большее единицы. В работе [16, с. 123–127] предложен конструктивный алгоритм построения указанной функции. Заметим, что найденная таким образом однородная функция Ляпунова, вообще говоря, не является однородной формой. В то же время известны примеры систем вида (16), имеющих асимптотически устойчивое нулевое решение, для которых нельзя подобрать функцию Ляпунова в классе квадратичных форм [8].

Предположим, что $a < 0$, $d < 0$, $bc \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$V = \alpha x_1^2 + x_2^2, \quad \alpha > 0. \tag{17}$$

Применяя теорему 4 (здесь $f_1(x_1) = x_1^3$, $f_2(x_2) = x_2^3$, $\lambda = 1$, $\xi = 1/3$), получаем, что для существования числа α, при котором функция (17) удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $ad + \omega bc > 0$, где $\omega = -1$, если $bc > 0$, и $\omega = 1/8$, если $bc < 0$.

4. Обобщение основной теоремы на системы произвольного порядка. Теорему 4 можно распространить на случай, когда исследуемые уравнения имеют вид

$$\dot{x}_s = a_s f_s^\lambda(x_s) + b_s f_n^\lambda(x_n), \quad s = \overline{1, n-1}, \quad \dot{x}_n = a_n f_n(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i f_i(x_i). \tag{18}$$

Здесь λ – положительное рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, функции $f_j(x_j)$ непрерывны при $|x_j| < H$ и удовлетворяют условию $x_j f_j(x_j) > 0$ при $x_j \neq 0$, a_j, b_i и c_i – постоянные коэффициенты, причем $a_j < 0$, $b_i \neq 0$, $c_i \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n-1}$.

В качестве функции Ляпунова для системы (18) выбираем функцию

$$V = \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s \int_0^{x_s} f_s^{\xi_s}(\tau)\, d\tau + \int_0^{x_n} f_n^\theta(\tau)\, d\tau, \tag{19}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \theta$ – положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\alpha_s > 0$, $s = \overline{1, n-1}$. Получим [14, с. 190–191; 15, с. 26–28], что производная функции

(19) в силу рассматриваемых уравнений может быть отрицательно определена только в случае, когда для показателей степеней $\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\theta$ справедливы соотношения

$$\xi_1=\ldots=\xi_{n-1}=\xi,\quad \theta=\lambda+\xi-1, \tag{20}$$

где ξ – рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\xi>0$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (20). Тогда для существования положительных постоянных $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, при которых функция (19) удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство*

$$\sum_{s=1}^{n-1}c_s\left(\omega_s\frac{b_s}{a_s}\right)^{1/\lambda}+a_n<0.$$

Здесь $\omega_s=-1$, если $b_sc_s>0$, и $\omega_s=\beta$, если $b_sc_s<0$.

Доказательство настоящей теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

5. Некоторые применения полученных результатов. Сравнивая условия (4) и (13), приходим к выводу, что наибольшая область асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов системы (10) получается при $\xi=1$, т.е. в случае, когда в качестве функции Ляпунова выбирается функция (3). Покажем далее, что, несмотря на это, для решения ряда задач более эффективным оказывается использование функции (11) при $\xi>1$.

Пусть система (10) имеет вид

$$\dot{x}_1=ax_1^\sigma+bx_2^\nu,\quad \dot{x}_2=cx_1^\sigma+dx_2^\nu, \tag{21}$$

где σ и ν – положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями. Таким образом, здесь $f_1(x_1)=x_1^\sigma$, $f_2(x_2)=x_2^\nu$, $\lambda=1$. По-прежнему будем считать, что выполнены условия $a<0$, $d<0$, $bc\neq 0$. Предположим также, что $\sigma<\nu$.

Функцию Ляпунова для исследуемых уравнений строим по формуле (11):

$$V=\alpha\frac{x_1^{\sigma\xi+1}}{\sigma\xi+1}+\frac{x_2^{\nu\xi+1}}{\nu\xi+1}. \tag{22}$$

Рассмотрим сначала случай $\sigma>1$, $\nu>1$. Пусть для некоторого $\xi>0$ число α можно подобрать так, чтобы функция (22) удовлетворяла требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Оценим с помощью построенной функции Ляпунова скорость стремления к нулю решений системы (21).

При $x_1\in[-1,1]$ и всех $x_2\in(-\infty,+\infty)$ справедливы неравенства

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(21)}\le -q_1(x_1^{\sigma(\xi+1)}+x_2^{\nu(\xi+1)})\le -q_2V^{1+(\nu-1)/(\nu\xi+1)}, \tag{23}$$

где q_1 и q_2 – положительные постоянные.

Применяя к соотношениям (23) метод оценок [16, с. 70–75], заключаем, что существуют числа $\delta>0$ и $\Delta>0$ такие, что если начальные данные решения $(x_1(t),x_2(t))^*$ системы (21) удовлетворяют условиям $|x_1(t_0)|<\delta$, $|x_2(t_0)|<\delta$, $t_0\in(-\infty,+\infty)$, то при всех $t\ge t_0$ выполняются неравенства

$$|x_1(t)|<\Delta(t-t_0+1)^{-(\nu\xi+1)/((\sigma\xi+1)(\nu-1))},\quad |x_2(t)|<\Delta(t-t_0+1)^{-1/(\nu-1)}. \tag{24}$$

Функция $h(\xi)=(\nu\xi+1)/(\sigma\xi+1)$ монотонно возрастает на интервале $(0,+\infty)$. Значит, оценка для $|x_1(t)|$ будет тем точнее, чем больше значение ξ.

Далее рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x}_1=(a+\varphi_{11}(t))x_1^\sigma+(b+\varphi_{12}(t))x_2^\nu,\quad \dot{x}_2=(c+\varphi_{21}(t))x_1^\sigma+(d+\varphi_{22}(t))x_2^\nu. \tag{25}$$

Здесь возмущения $\varphi_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$, причем существует число γ, $0 \leq \gamma \leq 1$, для которого справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\gamma} \int_0^t \varphi_{sj}(\tau)\, d\tau = 0, \quad s, j = 1, 2.$$

Таким образом, функции $\varphi_{sj}(t)$ имеют нулевые средние значения.

Известно [17], что возмущения рассматриваемого вида могут нарушать асимптотическую устойчивость линейных систем, т.е. при $\sigma = \nu = 1$ из асимптотической устойчивости системы (21), вообще говоря, не следует асимптотическая устойчивость системы (25).

В работе [18] показано, что если $1 < \sigma < \nu$ и для уравнений (21) существует постоянная $\alpha > 0$, при которой функция

$$V_1 = \alpha x_1^{\sigma+1} + x_2^{\nu+1} \tag{26}$$

удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, то при выполнении неравенства

$$\gamma \leq \frac{(\sigma-1)(\nu+1)}{(\nu-1)(\sigma+1)} \tag{27}$$

нулевое решение возмущенных уравнений асимптотически устойчиво.

Ограничение (27) на параметр γ можно ослабить, используя при доказательстве теоремы 2 из работы [18] вместо функции V_1 функцию Ляпунова вида (22) при $\xi > 1$. Учитывая оценки (24), справедливые для решений системы (21), получаем, что для сохранения асимптотической устойчивости нулевого решения достаточно выполнения неравенства

$$\gamma \leq \frac{(\sigma-1)(\nu\xi+1)}{(\nu-1)(\sigma\xi+1)}.$$

Следовательно, область допустимых значений параметра γ будет тем шире, чем большим выбрано число ξ. Если для уравнений (21) при любом $\xi > 1$ существует функция Ляпунова вида (22), удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, то возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения при всех $\gamma < (\sigma-1)\nu/((\nu-1)\sigma)$.

Предположим теперь, что $0 < \sigma < \nu < 1$. Наряду с системой (21) рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = ax_1^\sigma + bx_2^\nu + \psi_1(t)x_1^\eta, \quad \dot{x}_2 = cx_1^\sigma + dx_2^\nu + \psi_2(t)x_2^\zeta, \tag{28}$$

где η и ζ – положительные рациональные числа с нечетными знаменателями, функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывны и ограничены при всех $t \geq 0$ вместе с интегралами $I_j(t) = \int_0^t \psi_j(\tau)\, d\tau$, $j = 1, 2$. Исследуем условия равномерной диссипативности [19, с. 289–290] системы (28).

Пусть при некотором $\alpha > 0$ производная функции (26) в силу системы (21) отрицательно определена. Дифференцируя данную функцию Ляпунова в силу возмущенных уравнений и проверяя для нее выполнение требований теоремы Йосидзавы [19, с. 290–293], получаем, что если

$$\eta < \sigma, \quad \zeta < \nu, \tag{29}$$

то система (28) равномерно диссипативна.

Найденное таким образом условие равномерной диссипативности можно уточнить с помощью предложенного в [20] способа построения нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем. Положим

$$\tilde{V}_1 = \alpha x_1^{\sigma+1} + x_2^{\nu+1} - \alpha(\sigma+1)I_1(t)x_1^{\sigma+\eta} - (\nu+1)I_2(t)x_2^{\nu+\zeta}.$$

Снова используя теорему Йосидзавы, нетрудно показать, что для равномерной диссипативности системы (28) достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$2\eta < \sigma + 1, \quad 2\zeta < \nu + 1, \tag{30}$$

которые определяют более широкую область допустимых значений параметров η и ζ по сравнению с областью, заданной неравенствами (29). Однако требование дифференцируемости функции $\tilde{V}_1$ приводит к дополнительным ограничениям

$$\sigma + \eta \geq 1, \quad \nu + \zeta \geq 1. \tag{31}$$

Предположим теперь, что для невозмущенной системы существует функция Ляпунова вида (22), удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем справедливо неравенство $\xi \geq \max\{(1-\eta)/\sigma; (1-\zeta)/\nu\}$. Пусть

$$\tilde{V} = \alpha \frac{x_1^{\sigma\xi+1}}{\sigma\xi+1} + \frac{x_2^{\nu\xi+1}}{\nu\xi+1} - \alpha I_1(t) x_1^{\sigma\xi+\eta} - I_2(t) x_2^{\nu\xi+\zeta}.$$

С помощью этой функции снова приходим к соотношениям (30), определяющим достаточные условия равномерной диссипативности системы (28), но уже без дополнительных ограничений (31). Значит, и в данной задаче более эффективным оказывается использование функции Ляпунова вида (22) при $\xi > 1$.

В заключение проведем анализ полученного в настоящей работе условия существования для системы (10) функции Ляпунова вида (11). Согласно теореме 4, в случае $bc > 0$ это условие не зависит от выбора числа ξ и имеет вид $ad^\lambda - bc^\lambda > 0$.

Если $bc < 0$, то для существования требуемой функции Ляпунова необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение $ad^\lambda + \beta bc^\lambda > 0$, причем $\beta = \beta(\xi)$. Нетрудно показать, что $0 < \beta(\xi) < 1$ для всех $\xi > 1$ и $\beta(\xi) \to 1$ при $\xi \to +\infty$. Следовательно, в случае, когда выполнены неравенства $bc < 0$ и $ad^\lambda + bc^\lambda \geq 0$, для системы (10) при любом $\xi > 1$ существует функция Ляпунова вида (11), удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
2. *Еругин Н.П.* // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19. Вып. 5. С. 599–616.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. *Егоров И.Г.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 955–963.
5. *Егоров И.Г.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 1. С. 30–36.
6. *Булгаков Н.Г.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2158–2161.
7. *Леонов Г.А.* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 6. С. 1131–1132.
8. *Утешев А.Ю.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 2010–2013.
9. *Кречетов Г.С.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1325–1333.
10. *Персидский С.К.* // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 219–226.
11. *Персидский С.К.* // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5–11.
12. *Зубов В.И.* // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 3. С. 295–296.
13. *Александров А.Ю., Тапинов П.Г.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 2. С. 25–30.
14. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., 1959.
15. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.; Л., 1952.
16. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М., 1973.
17. *Виноград Р.Э.* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 2. С. 201–204.
18. *Александров А.Ю.* // Вестн. СПбУ. Сер. 1. 1998. Вып. 2 (№ 8). С. 3–6.
19. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
20. *Александров А.Ю.* // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 205–209.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию
20.10.2003 г.