



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, О конвективной неустойчивости теплового  
скин-слоя,

*Прикл. мех. техн. физ.*, 1965, том 6, выпуск 6, 53–57

<https://www.mathnet.ru/pmtf8848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и  
согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

22 мая 2025 г., 00:17:26



О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕПЛОВОГО СКИН-СЛОЯ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Если температура поверхности жидкости гармонически меняется со временем с частотой  $\omega$ , то в глубь жидкости распространяется температурная волна, амплитуда которой экспоненциально убывает по мере удаления от поверхности. Основные изменения температуры сосредоточены в слое толщины порядка  $(2\chi / \omega)^{1/2}$ , где  $\chi$  — теплопроводность жидкости (тепловой скин-слой). В зависимости от фазы на определенных глубинах градиент температуры в жидкости направлен вниз, и если этот градиент достаточно велик (его величина определяется амплитудой и частотой колебаний температуры поверхности), то жидкость может оказаться неустойчивой по отношению к возникновению конвекции. При этом, естественно, конвективное движение может распространиться за пределы неустойчивого слоя. При низких частотах условия возникновения конвекции в неустойчивом слое (в котором градиент температуры направлен вниз) можно найти из обычного статического критерия Релея, определив число Релея через толщину неустойчивого слоя и средний градиент температуры в нем. Такой квазистатический подход реализован в работе Сальникова [1] и, очевидно, оправдан в том случае, когда период колебаний температуры гораздо больше характерного времени возмущений. Если же эти времена близки, то необходимо динамическое рассмотрение вопроса о возникновении конвекции. Задача об устойчивости равновесия в этих условиях должна быть сформулирована как задача о резонансном параметрическом возбуждении колебаний жидкости под влиянием меняющегося параметра — градиента температуры.

Ранее [2] авторы рассмотрели задачу об устойчивости равновесия горизонтального слоя жидкости, находящегося в поле периодически модулированного градиента температуры. Предполагалось, что толщина слоя жидкости гораздо меньше глубины проникновения тепловой волны, и поэтому градиент температуры можно было считать не зависящим от координат. В данной работе рассматривается противоположный предельный случай, когда толщина слоя жидкости гораздо больше глубины проникновения, т. е. случай развитого скин-слоя. Равновесный градиент температуры, играющий роль параметра в уравнениях для возмущений равновесия, в данном случае является периодической функцией времени и довольно сложным образом зависит от вертикальной координаты  $z$ . Для отыскания периодических возмущений используется метод Фурье; получающиеся уравнения для амплитуд приближенно решаются интегральным методом Кармана — Польгаузена.

1. Уравнения конвекции в обычных обозначениях имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - g\beta T \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T &= \chi \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Начало координат выберем так, чтобы плоскость  $(x, y)$  совпадала с поверхностью жидкости; ось  $z$  направим вертикально вниз. Температура на поверхности  $z = 0$  не меняется вдоль поверхности и гармонически колеблется со временем

$$T_0 = \Theta \cos \omega t \quad (1.2)$$

В равновесии ( $\mathbf{v} = 0$ ) температура в жидкости определяется из уравнения

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

Решение, удовлетворяющее (1.2) на поверхности жидкости и затухающее при  $z \rightarrow \infty$ , есть

$$T_0 = \Theta e^{-\kappa z} \cos(\omega t - \kappa z), \quad \kappa = (\omega/2\chi)^{1/2} \quad (1.4)$$

(температура на большой глубине выбрана за начало отсчета). Величина  $\delta = 1/\kappa$  может быть принята в качестве меры глубины проникновения тепловой волны. Распределение равновесного давления  $p_0$  находится из уравнения

$$\nabla p_0 = -\rho_0 \beta T_0 \mathbf{g} \quad (1.5)$$

Для исследования устойчивости нестационарного равновесия ( $T_0, p_0$ ) рассмотрим малые конвективные возмущения ( $T', p', \mathbf{v}$ ). Подставляя возмущенные температуру и давление  $T_0 + T', p_0 + p'$  и скорость  $\mathbf{v}$  в исходную систему (1.1) и линеаризуя по возмущениям, получим систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} - g\beta T' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + v_z \frac{\partial T_0}{\partial z} &= \chi \Delta T', \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из системы (1.6) можно исключить  $p', v_x, v_y$ ; для этого нужно применить к первому из уравнений (1.6) операцию  $\text{rot rot}$  и спроектировать полученное уравнение на ось  $z$ . Далее, возмущения предполагаются периодическими в плоскости  $(x, y)$ , т. е. все величины считаются пропорциональными  $\exp i(k_1 x + k_2 y)$ . Вертикальная составляющая скорости  $v_z \equiv v$  и возмущение температуры  $T'$  (далее штрих будет опущен) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Delta v &= g\beta k^2 T, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \Delta\right) T = -\frac{\partial T_0}{\partial z} v \\ (k^2 &= k_1^2 + k_2^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

В системе (1.7) удобно перейти к безразмерным переменным. Для этого выберем единицы расстояния, времени, температуры и скорости соответственно  $1/\kappa, 1/\kappa^2 \sqrt{\nu\chi}, \Theta, g\beta k^2 \Theta / \nu \kappa^4$ .

В безразмерных переменных уравнения (1.7) запишутся так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta v &= T, \quad \left(\sqrt{P} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) T = -Rk^2 f(z, t) v \\ (k &= (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} / \kappa, \quad P = \nu / \chi, \quad R = g\beta \Theta / \nu \chi \kappa^3) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $k$  — безразмерное волновое число,  $P$  — число Прандтля,  $R$  — число Релея, определенное через амплитуду температуры на поверхности  $\Theta$  и глубину проникновения  $1/\kappa$ ;  $f(z, t)$  — безразмерный градиент температуры в равновесии, равный

$$f(z, t) = e^{-z} \left[ \sin\left(\frac{2t}{\sqrt{P}} - z\right) - \cos\left(\frac{2t}{\sqrt{P}} - z\right) \right] \quad (1.9)$$

Здесь  $t$  и  $z$  — безразмерные.

Возмущения  $v$  и  $T$  должны экспоненциально затухать при  $z \rightarrow \infty$ . Что же касается граничных условий на поверхности жидкости, то далее будут рассмотрены два случая:

а) Плоская свободная граница; исчезают нормальная компонента скорости, касательные напряжения и возмущение температуры, т. е.

$$v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = T = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.10)$$

б) Твердая граница; исчезают все компоненты скорости и возмущение температуры, т. е.

$$v = \frac{\partial v}{\partial z} = T = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.14)$$

2. Рассмотрим сначала случай свободной поверхности.

Из системы (1.8) можно исключить возмущение температуры  $T$  и получить одно уравнение для  $v$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{P}\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{P}}\Delta\right)\Delta v = -k^2 R f(z, t) v \quad (2.1)$$

Вместо условия  $T = 0$  при  $z = 0$  теперь с учетом (1.10) из (1.8) следует

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.2)$$

Для выяснения границ устойчивости необходимо найти соотношение между параметрами  $R$ ,  $P$ ,  $k$ , при котором существует периодическое по времени решение уравнения (2.1). Как известно, основной области параметрического резонанса соответствует движение с частотой, равной половине частоты возбуждения. Поэтому «полуцелое» периодическое решение уравнения (2.1) можно искать по методу Фурье в виде

$$v = v_1(z) \cos \frac{t}{\sqrt{P}} + v_2(z) \sin \frac{t}{\sqrt{P}} + \dots \quad (2.3)$$

Здесь  $v_1(z)$  и  $v_2(z)$  — амплитуды основной гармоники частоты  $1/\sqrt{P}$ . Невыписанные старшие гармоники имеют частоты  $3/\sqrt{P}$ ,  $5/\sqrt{P}$ ; ... Подставляя (2.3) в (2.1) и сохраняя только основную гармонику, получим систему обыкновенных однородных дифференциальных уравнений для фурье-амплитуд  $v_1(z)$  и  $v_2(z)$ :

$$P\Delta^3 v_1 - (1+P)\Delta^2 v_2 - \Delta v_1 = k^2 P R (\varphi_+ v_1 - \varphi_- v_2) \quad (2.4)$$

$$P\Delta^3 v_2 + (1+P)\Delta^2 v_1 - \Delta v_2 = k^2 P R (\varphi_- v_1 + \varphi_+ v_2)$$

$$(\varphi_{\pm} = 1/2 e^{-\alpha} (\cos z \pm \sin z), \quad \Delta = d^2/dz^2 - k^2)$$

Амплитуды  $v_1$  и  $v_2$  удовлетворяют однородным граничным условиям

$$v_{1,2} = v_{1,2}'' = v_{1,2}^{IV} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad v_{1,2} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Для приближенного решения краевой задачи (2.4), (2.5) можно применить интегральный метод Кармана — Польгаузена, используемый в теории пограничного слоя [4]. Согласно этому методу, решение аппроксимируется с учетом граничных условий с последующим определением параметров из интегральных соотношений. В нашем случае граничные условия для  $v_1$  и  $v_2$  одинаковы, поэтому в первом приближении, содержащем минимальное число параметров, можно положить

$$v_1(z) = c_1 F(z), \quad v_2(z) = c_2 F(z) \quad (2.6)$$

с общей функцией  $F(z)$ , удовлетворяющей условиям (2.5)

$$F(z) = (3z + 3az^2 + a^2 z^3) e^{-az} \quad (2.7)$$

Здесь  $a$  — параметр, по смыслу определяющий глубину проникновения возмущений.

Интегрируя уравнения (2.4) по  $z$  в пределах от 0 до  $\infty$  и подставляя в получающиеся интегральные соотношения аппроксимации (2.6), найдем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $c_1$  и  $c_2$ . Из условия совместности этой системы вытекает соотношение между параметрами задачи

$$R^2 = \frac{(I_1 - PI_3)^2 + (1 + P)^2 I_2^2}{a^4 k^4 P^2 K^2}, \text{ где } \left( K^2 = \frac{a^2 (5a + 4)^2 + 4(2a + 1)^2}{2[(a + 1)^2 + 1]^4} \right) \quad (2.8)$$

$$I_1 = a^2 + 5k^2, \quad I_2 = a^4 + 2k^2 a^2 + 5k^4, \quad I_3 = 5a^6 + 3k^2 a^4 + 3k^4 a^2 + 5k^6$$

Аналогичное соотношение можно получить и для случая твердой границы. В этом случае удобнее пользоваться системой (1.8). Фурье-разложение «полупедаго» периодического решения системы (1.8) начинается с гармоник

$$\begin{aligned} v &= v_1(z) \cos \frac{t}{\sqrt{P}} + v_2(z) \sin \frac{t}{\sqrt{P}} + \dots \\ T &= T_1(z) \cos \frac{t}{\sqrt{P}} + T_2(z) \sin \frac{t}{\sqrt{P}} + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (1.8) и отбрасывая старшие гармоники, получим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Эта система для краткости не приводится. Выпишем лишь аппроксимации для амплитуд

$$v_1 = c_1 F(z), \quad v_2 = c_2 F(z); \quad T_1 = d_1 \Phi(z), \quad T_2 = d_2 \Phi(z) \quad (2.10)$$

Здесь теперь

$$F(z) = z^2 e^{-az}, \quad \Phi(z) = (z + az^2) e^{-az} \quad (2.11)$$

С таким выбором  $F(z)$  и  $\Phi(z)$  удовлетворены граничные условия для амплитуд

$$v_{1,2} = v_{1,2}' = 0, \quad T_{1,2} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad v_{1,2}, T_{1,2} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

Кроме того, выполнено также дополнительное условие

$$T_{1,2}'' = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.13)$$

вытекающее из (1.8).

Далее интегрируем амплитудные уравнения по  $z$  от 0 до  $\infty$ , подставляем аппроксимации (2.10) и из условия совместности линейной однородной системы для  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  и  $d_2$  получаем соотношение, аналогичное (2.8)

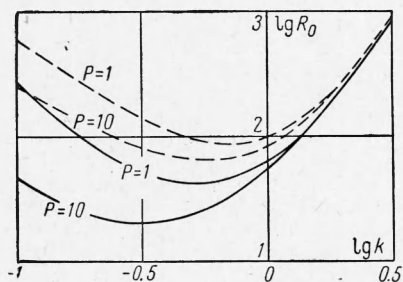
$$R^2 = \frac{2[(a+1)^2+1]^3}{9k^4 a^6 P^2} [(I_1 I_2 P - 3k^2)^2 + (3I_1 P + I_2 k^2)^2] \quad (2.14)$$

$$I_1 = 3a^4 + k^4, \quad I_2 = a^2 + 3k^2$$

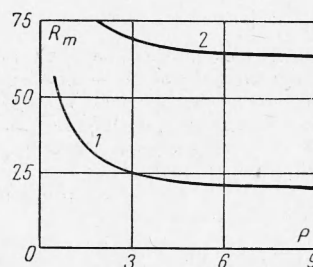
3. Соотношения (2.8) и (2.14) содержат пока не определенный параметр  $a$ . В отличие от волнового числа  $k$ , этот параметр не может задаваться независимо, а определяется всеми остальными параметрами задачи. Для нахождения этого параметра можно было бы воспользоваться еще каким-либо интегральным условием, например, уравнением моментов. Этим путем в принципе можно найти параметр  $a$ , и тогда (2.8) и (2.14) определили бы зависимости  $R$  от  $k$  на границе устойчивости («нейтральную» кривую) для двух рассмотренных случаев граничных условий на по-

верхности жидкости. Такой путь, однако, приводит к очень громоздким соотношениям, не поддающимся анализу. Поэтому пришлось ограничиться определением нижней границы области неустойчивости.

Как можно видеть из (2.8) и (2.14), при фиксированных  $P$  и  $k$  функция  $R(a)$  имеет минимум при некотором значении  $a_0$ . Это значение  $a_0$ , конечно, не может рассматриваться в качестве истинной характеристики глубины проникновения возмущений. Но соответствующее минимальное значение  $R_0$  дает, очевидно, нижнюю границу области неустойчивости при фиксированных  $P$  и  $k$ , т. е. в сущности — нижнюю границу необходимой для возникновения конвекции амплитуды  $\Theta$  при заданных значениях частоты изменения температуры на границе и длины волны возмущений.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлена зависимость  $R_0$  от  $k$  при разных значениях числа Прандтля. Сплошные кривые относятся к случаю свободной границы; пунктир — твердая граница. Минимум на кривой  $R_0(k)$  определяет критическое волновое число возмущений  $k_m$  и критическое число Рейли  $R_m$ . Как и следовало ожидать, критические значения  $R_m$  для случая твердой границы выше соответствующих значений для свободной границы. Ветви кривых устойчивости при  $k \gg 1$  совпадают для всех чисел Прандтля. Кроме того, значения  $R_0$  для больших  $k$  не зависят от условий на границе.

При увеличении числа Прандтля критическое число Рейли уменьшается и минимум смещается в сторону длинноволновых возмущений (фиг. 2 и 3; 1 и 2 — соответственно свободная и твердая границы).

Для воды, например, при  $20^\circ\text{C}$  ( $P = 7$ ) критическое число Рейли для свободной границы  $R_m = 20$ . Отсюда условие возникновения конвекции:

$$\Theta > 20 \frac{\nu\chi}{g\beta} \left( \frac{\omega}{2\chi} \right)^{3/2}$$

При периоде колебаний 1 мин получается критическая амплитуда  $\Theta > 0.4^\circ\text{C}$ .

Авторы благодарят Л. Г. Лойцянского за обсуждение результатов.

Поступила 25 VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С а л ь н и к о в И. Е. К вопросу о протекании конвекции при распространении температурных волн в жидкостях. Тр. Горьковск. ин-та инж. водн. трансп., 1958, вып. 15.
2. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
3. Л а н д а у Л. Д. и Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
4. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.