



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. V, *Труды МИАН*, 2017, том 296, 133–139

DOI: 10.1134/S0371968517010101

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

3 декабря 2024 г., 20:21:05



УДК 511.321+511.31

# Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. V<sup>1</sup>

И. Д. Кан<sup>2</sup>

Поступило 16 апреля 2016 г.

Доказывается, что знаменатели тех конечных цепных дробей, все неполные частные которых принадлежат произвольному конечному алфавиту  $\mathcal{A}$  с параметром  $\delta > 0.7807\dots$  (т.е. такому, что множество бесконечных цепных дробей с неполными частными из этого алфавита имеет хаусдорфову размерность  $\delta$ , удовлетворяющую неравенству  $\delta > 0.7807\dots$ ), содержат положительную долю натуральных чисел. Ранее аналогичная теорема была известна лишь для алфавитов с несколько большими значениями  $\delta$ . Именно, впервые результат такого рода для произвольного конечного алфавита с  $\delta > 0.9839\dots$  получили в 2011 г. Бургейн и Конторович. Далее в 2013 г. автор статьи и Д.А. Фроленков доказали теорему для произвольного конечного алфавита с  $\delta > 0.8333\dots$ . Результат автора 2015 г., предшествующий настоящему, относился к произвольному конечному алфавиту с  $\delta > 0.7862\dots$ .

DOI: 10.1134/S0371968517010101

## 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. История вопроса.** Для  $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{N}$  через  $[d_1, d_2, \dots, d_k]$  будем обозначать конечную цепную дробь

$$[d_1, d_2, \dots, d_k] = \frac{1}{d_1 + \frac{1}{d_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{d_k}}}}, \quad (1.1)$$

а через  $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$  — множество рациональных чисел  $b/d$ , представимых конечными цепными дробями с неполными частными  $d_1, d_2, \dots, d_k$  из некоторого конечного алфавита  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ :

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}} = \left\{ \frac{b}{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k] \mid d_j \in \mathcal{A} \text{ при } j = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Через  $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$  обозначим множество знаменателей  $d$  несократимых дробей  $b/d \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ :

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \mid \exists b \in \mathbb{N}: \gcd(b, d) = 1, b < d, \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \right\}.$$

**Гипотеза 1.1** (Заремба [1]). *Существует константа  $A$  такая, что для алфавита  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, A\}$  имеет место равенство  $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$ .*

Обзор результатов, связанных с гипотезой 1.1, можно найти в работах [2, 3].

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-05700-а).

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.  
E-mail: igor.kan@list.ru

Для алфавита  $\mathcal{A}$  число  $d$  называется *допустимым* [2], если для любого  $q > 1$  множество  $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$  содержит хотя бы одно число, сравнимое с  $d$  по модулю  $q$ . Множество допустимых чисел обозначим через  $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}$ . Через  $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$  обозначим хаусдорфову размерность множества бесконечных цепных дробей с неполными частными из алфавита  $\mathcal{A}$ . Для каждого элемента  $d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$  его *кратностью* называется количество натуральных чисел  $b < d$ , взаимно простых с  $d$  и таких, что  $b/d \in \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}$ . Бургейн и Конторович в 2011 г. доказали следующее.

**Теорема 1.1** (см. [2, Theorems 1.2, 1.8]). *Пусть алфавит  $\mathcal{A}$  удовлетворяет условию  $\delta > 307/312 = 0.9839\dots$ . Тогда множество  $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$  содержит почти все допустимые числа. Точнее, найдется константа  $c = c(\mathcal{A}) > 0$  такая, что для всех достаточно больших чисел  $N$  в множестве  $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \cap [0.5N, N]$  содержится по крайней мере*

$$|\mathfrak{A}_{\mathcal{A}} \cap [0.5N, N]|(1 - \exp\{-c\sqrt{\log N}\}) \quad (1.2)$$

элементов, причем для кратности  $m_d$  каждого такого элемента  $d$  верна оценка

$$m_d \gg N^{2\delta-1.001}. \quad (1.3)$$

В частности, справедливо неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \cap [1, N]| \gg N. \quad (1.4)$$

Теорема 1.1 применима к алфавиту  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, 50\}$  [2]. В дальнейшем по поводу различных обобщений теоремы 1.1 несколькими авторами был написан целый ряд работ [4–11]. Так, в [7] автор настоящей статьи и Д.А. Фроленков доказали неравенство (1.4) для алфавита  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Далее Хуан [9] доказал для того же алфавита  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  формулы (1.2) и (1.3). Из доказательства теоремы Хуана следует общий принцип: для всякого  $c$  такого, что  $0.5 < c < 1$ , для вывода при условии  $\delta > c$  формул (1.2) и (1.3) методом Бургейна–Конторовича достаточно тем же методом доказать формулу (1.4) при том же условии. С помощью этого принципа в [10] было доказано, что в теореме 1.1 оценку  $\delta > 0.9839\dots$  можно заменить условием  $\delta > (\sqrt{19} - 2)/3 = 0.7862\dots$ , которому удовлетворяет алфавит  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Недавно Мэджи, О и Винтер [11] доказали, что при некотором положительном  $\varepsilon$  для алфавита  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  имеет место неравенство  $|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \cap [1, N]| \geq N(1 - N^{-\varepsilon})$ .

**1.2. Основной результат.** Сформулируем основной результат настоящей работы.

**Теорема 1.2.** *Пусть алфавит  $\mathcal{A}$  удовлетворяет условию*

$$\delta > 0.25(\sqrt{17} - 1) = 0.7807\dots \quad (1.5)$$

*Тогда множество  $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$  содержит положительную долю натуральных чисел и почти все допустимые числа. Точнее, справедливы формулы (1.2)–(1.4).*

## 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АНСАМБЛЯ

Через  $G_{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  обозначим мультипликативную полугруппу с единицей  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , состоящую из произведений  $(2 \times 2)$ -матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ d_1 & d_1 d_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_4 \\ d_3 & d_3 d_4 + 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & d_k \\ d_{k-1} & d_{k-1} d_k + 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $k$  четно и  $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathcal{A}$ . За норму матрицы (2.1) обычно [4–8] принимается величина  $\|g\| = d = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle$  — знаменатель несократимой дроби, равной конечной цепной дроби (1.1) (или *континуант*).

Скажем, что при  $n \in \mathbb{N}$  для некоторого множества  $\Xi \subseteq G_{\mathcal{A}}$  имеет место разложение  $\Xi = \Omega_1 \Omega_2$  на *независимые* множители  $\Omega_1, \Omega_2$ , если для каждой матрицы  $\gamma \in \Xi$  найдется, причем единственный, набор матриц  $g_1, g_2$  таких, что

$$\gamma = g_1 g_2, \quad g_1 \in \Omega_1, \quad g_2 \in \Omega_2.$$

Конечно, при этом выполняется равенство  $|\Xi| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|$ .

Всюду далее будем использовать следующие обозначения:  $N$  — достаточно большое натуральное число,  $\varepsilon_0 \in (0, 0.0004)$  — фиксированное произвольно малое число,  $A = \max \mathcal{A}$ ,  $Q_1 = \lceil \exp\{A^4 \varepsilon_0^{-5}\} \rceil + 1$ , где для всякого  $w \in \mathbb{R}$  по определению  $[w] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq w\}$ . Для каждого  $j \in \mathbb{Z}$  положим

$$Q_j = \mathbf{1}_{\{j \neq 0\}} (Q_1)^j,$$

где  $\mathbf{1}_{\{j \neq 0\}} = 1$  при  $j \neq 0$  и  $\mathbf{1}_{\{j \neq 0\}} = 0$  при  $j = 0$ .

По достаточно большому числу  $N$  и по малому параметру  $\varepsilon_0 \in (0, 0.0004)$  в [6] было построено специальное множество матриц — *ансамбль* (см. терминологию в [2])

$$\Omega^{(N)} = \Omega^{(N, \varepsilon_0)} \subseteq \{\gamma \in G_{\mathcal{A}} \mid \|\gamma\| \leq 1.02N\},$$

для которого имеет место разложение на независимые множители  $\Omega^{(N)} = \Omega_1 \Omega$  со свойствами, перечисленными в следующей лемме.

**Лемма 2.1** [8, теорема 3.1]. *Существует непустое множество матриц — ансамбль  $\Omega^{(N)} \subseteq G_{\mathcal{A}}$  такой, что для всякого числа  $M_1 \in [Q_1, Q_{-8}N]$  найдется разложение  $\Omega^{(N)} = \Omega_1 \Omega$  на независимые множители  $\Omega_1$  и  $\Omega$ , для которых выполнены следующие свойства:*

(i) *имеет место оценка*

$$|\Omega_1| \gg (M_1)^{2\delta - \varepsilon_0}; \tag{2.2}$$

(ii) *для любых двух матриц  $g_1 \in \Omega_1$  и  $g \in \Omega$  справедливы неравенства*

$$M_1 \ll \|g_1\| \ll (M_1)^{1+2\varepsilon_0}, \quad \frac{N}{(M_1)^{1+2\varepsilon_0}} \ll \|g\| \ll \frac{N}{M_1}. \tag{2.3}$$

### 3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть число  $M_1 \in [Q_1, N/Q_8]$  уже выбрано, так что имеет место разложение  $\Omega^{(N)} = \Omega_1 \Omega$  со свойствами (2.2) и (2.3). Далее введем следующие обозначения: если  $B$  — некоторое множество  $(2 \times 2)$ -матриц  $\gamma$ , то  $\tilde{B}$  — множество вектор-столбцов  $\tilde{\gamma} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Для координат произвольных векторов  $\tilde{g}', \tilde{g} \in \tilde{\Omega}$  будем использовать символы  $x, X, y, Y$ :

$$\tilde{g}' = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Напомним обозначения из [8]. Применяя теорему Дирихле (см. [12, § 2.2, лемма 2.1]), для каждого  $\Theta \in [0, 1)$  найдем числа  $\lambda \in (-1/4, 1/4]$ ,  $q \in \mathbb{N}$  и целые числа  $a$  и  $l$  такие, что

$$\Theta = \left\{ \frac{a}{q} + \frac{l}{2N} + \frac{\lambda}{N} \right\}, \quad \gcd(a, q) = 1, \quad \frac{q-1}{q} \leq a < q \leq \frac{\sqrt{N}}{Q_1}, \quad |l| \leq \frac{3}{q} Q_1 \sqrt{N}, \tag{3.2}$$

где  $\{w\} = w - [w]$  — дробная часть числа  $w \in \mathbb{R}$ . Для другого произвольного числа  $\Theta' \in [0, 1)$  найдем аналогичные числа  $\lambda', q', a'$  и  $l'$ . Фиксируем параметр  $\lambda$  (в дальнейшем всегда будет  $\lambda' = \lambda$ ), константу  $T_1 = 7Q_7$  и целое число  $\kappa \in [0, T_1 - 1]$ . Для натуральных индексов  $\alpha$  и  $\beta$  положим

$$P_{\alpha, \beta} = P_{\alpha, \beta}^{(\lambda)}(\kappa) = \left\{ \Theta \text{ из (3.2)} \mid l \equiv \kappa \pmod{T_1}, Q_{\alpha-1} < q \leq Q_{\alpha}, Q_{\beta-1} \leq |l| \leq Q_{\beta} \right\}.$$

Всюду далее число  $M_1$  из леммы 2.1 удовлетворяет неравенству

$$75A^2Q_\alpha Q_\beta \leq M_1 \leq \min\{(Q_\alpha Q_\beta)^5, (Q_\alpha Q_\beta)^{-0.5}N\}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим разложение  $\Omega^{(N)} = \Omega_1\Omega$ , соответствующее этому значению  $M_1$ . Всюду далее  $Z$  — любое непустое подмножество конечного множества  $P_{\alpha,\beta}$ . Для любых двух чисел  $\Theta', \Theta \in Z$  положим

$$\mathbf{p} = \gcd(q', q), \quad q'_0 = \frac{q'}{\mathbf{p}}, \quad q_0 = \frac{q}{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{q} = \frac{q'q}{\mathbf{p}} = \mathbf{p}q'_0q_0, \quad \mathbf{P} = \frac{74A^2Q_\alpha^2Q_\beta}{M_1}, \quad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}}. \quad (3.4)$$

Используя обозначения (3.1), через  $t$  и  $T$  обозначим целые числа, для которых выполнены соотношения

$$a'q_0x - aq'_0y \equiv t \pmod{\mathbf{q}}, \quad a'q_0X - aq'_0Y \equiv T \pmod{\mathbf{q}}, \quad |t|, |T| \leq \frac{\mathbf{q}}{2}. \quad (3.5)$$

Тогда имеют место равенства

$$\left\| \frac{a'x}{q'} - \frac{ay}{q} \right\| = \frac{|t|}{\mathbf{q}}, \quad \left\| \frac{a'X}{q'} - \frac{aY}{q} \right\| = \frac{|T|}{\mathbf{q}},$$

где через  $\|w\| = \min\{\{w\}, \{-w\}\}$  обозначено расстояние от  $w \in \mathbb{R}$  до ближайшего целого.

Рассмотрим соотношения

$$\max\{|t|, |T|\} \leq 74A^2Q_\beta(M_1)^{-1}\mathbf{q} \leq \mathbf{T} \leq \mathbf{P}, \quad (3.6)$$

$$|xl' - yl| \leq (9A)^5x + 2N|t|\mathbf{q}^{-1}, \quad |Xl' - Yl| \leq (9A)^5X + 2N|T|\mathbf{q}^{-1}. \quad (3.7)$$

Определим множество

$$\mathfrak{N} = \{(\tilde{g}', \tilde{g}, \Theta', \Theta) \in (\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}, Z, Z) \mid \text{выполнены соотношения (3.4)–(3.7)}\}.$$

Для каждого  $\Theta \in Z$  положим

$$\mathfrak{N}(\Theta) = \{(\tilde{g}', \tilde{g}, \Theta') \in (\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}, Z) \mid (\tilde{g}', \tilde{g}, \Theta', \Theta) \in \mathfrak{N}\},$$

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}^{(\Theta)} = \{(\tilde{g}', \tilde{g}, \Theta') \in \mathfrak{N}(\Theta) \mid \text{значения параметров } \mathbf{p}, t, T \text{ фиксированы}\},$$

$$\mathfrak{M}_0(\Theta) = \sum_{\mathbf{p}|\mathbf{q}} \sum_{\substack{|t|, |T| \leq \mathbf{T} \\ |t| + |T| \neq 0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}^{(\Theta)}|,$$

где сумма по  $\mathbf{p}$  распространена на все делители числа  $q$ .

Через  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathcal{A}) > 0$  обозначим произвольную достаточно малую константу, зависящую только от  $\mathcal{A}$ . Положим также

$$\Lambda(M_1) = (M_1)^{-O_+(\mathbf{c}) + O(\varepsilon_0)}.$$

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СООТВЕТСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим оценку

$$(Q_\alpha Q_\beta)^\delta \gg (M_1)^{2-2\delta} \Lambda(M_1). \quad (4.1)$$

Пусть для числа  $M_1$  выполнены неравенства (3.3), (4.1) и

$$\max_{\Theta \in Z} \mathfrak{M}_0(\Theta) \ll |\Omega|^2 (Q_\alpha Q_\beta)^{-\delta} \Lambda(M_1) \ll |\Omega|^2 (M_1)^{-2+2\delta} \Lambda(M_1). \quad (4.2)$$

Тогда число  $M_1$  назовем *соответственным* для пары натуральных чисел  $\alpha, \beta$ .

Рассмотрим неравенства

$$N \geq \left( (Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} (Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} \right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{3\delta-2}{4-5\delta} > 1. \quad (4.4)$$

**Теорема 4.1** [10, теорема 5.1]. Пусть при  $\delta > 0.75$  соответствующее значение  $M_1$  найдется для любых натуральных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющих неравенствам (4.3) и (4.4). Тогда для алфавита  $\mathcal{A}$  имеют место формулы (1.2)–(1.4).

### 5. ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ $|\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}^{(\Theta)}|$

**Лемма 5.1** [10, лемма 7.2]. Если выполнены неравенства  $M_1 Q_\alpha \leq Q_6 N$  и  $\alpha > 1$ , то имеет место оценка

$$\max_{\Theta \in \mathbb{Z}} \max_{\mathbf{p}|q} \max_{\substack{0 \leq t, T \leq \mathbf{T} \\ |t|+|T| \neq 0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}^{(\Theta)}| \mathbf{p}^{-2} \ll |\Omega|^2 Q_\beta (Q_\alpha)^{L(1-\delta)-2} \Lambda(M_1), \quad (5.1)$$

где  $L = 2$  при  $Q_\alpha > N^{0.1}$  и  $L = 3$  в противном случае.

**Лемма 5.2** [10, лемма 7.3]. Пусть для натуральных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  найдется число  $M_1$  из интервала (3.3) такое, что выполнены оценка (4.1) и неравенство

$$\max_{\Theta \in \mathbb{Z}} \max_{\mathbf{p}|q} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \max_{\substack{0 \leq t, T \leq \mathbf{T} \\ |t|+|T| \neq 0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}^{(\Theta)}| \ll |\Omega|^2 (M_1)^{2\delta} (Q_\alpha)^{-4} (Q_\beta)^{-2} \Lambda(M_1). \quad (5.2)$$

Тогда имеет место оценка (4.2), т.е. число  $M_1$  соответствующее.

**Замечание 5.1** [10, замечание 7.1]. Согласно теореме 4.1 для выполнения неравенства  $M_1 Q_\alpha \leq Q_6 N$  и второй из верхних оценок в (3.3) достаточно потребовать, чтобы выполнялись оценка (4.3) и неравенства

$$M_1 \sqrt{Q_\alpha Q_\beta} \leq M_1 Q_\alpha \leq \left( (Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} (Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} \right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)} \quad (5.3)$$

(первое из которых выполнено ввиду оценки (4.4)).

Рассмотрим равенство

$$M_1 = \left( (Q_\alpha)^{\frac{2-\delta}{\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \right)^{1+O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}. \quad (5.4)$$

**Теорема 5.1.** Пусть выполнены неравенства  $\delta > 0.25(\sqrt{17}-1) = 0.7807\dots$ ,  $Q_\beta < Q_\alpha$  и  $Q_\alpha > N^{0.1}$ . Тогда число  $M_1$  из (5.4) является соответствующим.

**Доказательство.** Ввиду леммы 5.2 достаточно доказать неравенства  $M_1 Q_\alpha \leq Q_6 N$ , (3.3), (4.1) и (5.2). Для этого рассмотрим следующие из условий (1.5) и (4.4) неравенства

$$\left( \frac{2-\delta}{\delta} - \frac{\delta}{2-2\delta} \right) \alpha < \left( \frac{\delta}{2-2\delta} - \frac{3}{2\delta} \right) \beta, \quad \frac{2}{\delta} < \frac{2\delta-1}{1-\delta}, \quad \frac{3}{2\delta} < \frac{2\delta-1}{1-\delta}. \quad (5.5)$$

Действительно, эти неравенства получаются соответственно из оценок

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{3\delta-2}{4-5\delta} > 1 > \frac{\delta^2+3\delta-3}{\delta^2-6\delta+4}, \quad 2\delta^2+\delta-2 > 0, \quad 4\delta^2+\delta-3 > 0,$$

справедливых соответственно при

$$\delta > \frac{7}{9} = 0.7777\dots, \quad \delta > \frac{\sqrt{17}-1}{4} = 0.7807\dots, \quad \delta > \frac{3}{4} = 0.75.$$

Подставляя оценки (5.5) в показатели степеней, получаем неравенства

$$(Q_\alpha)^{\frac{2-\delta}{\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left( (Q_\alpha Q_\beta)^{\frac{\delta}{2-2\delta}} \right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}, \quad (Q_\alpha)^{\frac{2}{\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left( (Q_\alpha Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} \right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)},$$

из которых далее оценки (4.1) и (5.3) следуют непосредственно. Поэтому согласно замечанию 5.1 имеют место неравенство  $M_1 Q_\alpha \leq Q_6 N$  и вторая из верхних оценок в (3.3). Остальные оценки в (3.3) получаются применением неравенств

$$1 < \frac{2-\delta}{\delta} < \frac{3}{2\delta} < 5,$$

выполненных ввиду оценки  $1 > \delta > 0.25(\sqrt{17}-1)$ . Следовательно, имеют место условия леммы 5.1, ввиду которой выполняется оценка (5.1). Но для  $M_1$  из (5.4) эта оценка совпадает с (5.2). Весь список требуемых неравенств доказан. Теорема доказана.  $\square$

Таким образом, далее можно считать, что выполнено неравенство  $Q_\alpha \leq N^{0.1}$ . Другими словами, неравенство  $M_1 Q_\alpha \leq Q_6 N$  и вторая из верхних оценок в (3.3) теперь выполнены.

## 6. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 5.1 НА СЛУЧАЙ МАЛЫХ $Q_\alpha$

Для усиления результата теоремы 5.1 рассмотрим равенство

$$M_1 = \left( (Q_\alpha)^{\frac{5-3\delta}{2\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \right)^{1+O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}. \quad (6.1)$$

**Теорема 6.1.** Пусть выполнены неравенства  $\delta > 0.25(\sqrt{17}-1) = 0.7807\dots$  и  $Q_\beta < Q_\alpha \leq N^{0.1}$ . Тогда число  $M_1$  из (6.1) является соответственным.

**Доказательство.** Ввиду леммы 5.2 достаточно доказать неравенства (3.3), (4.1) и (5.2). Аналогично первому из неравенств (5.5) рассмотрим неравенство

$$\left( \frac{5-3\delta}{2\delta} - \frac{\delta}{2-2\delta} \right) \alpha < \left( \frac{\delta}{2-2\delta} - \frac{3}{2\delta} \right) \beta. \quad (6.2)$$

Действительно, это неравенство получается из оценки

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{3\delta-2}{4-5\delta} > \frac{\delta^2+3\delta-3}{\delta^2-6\delta+4},$$

справедливой при

$$\delta > \frac{3+\sqrt{31}}{11} = 0.7788\dots$$

Подставляя элементы оценки (6.2) в показатели степеней, получаем неравенство

$$(Q_\alpha)^{\frac{5-3\delta}{2\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left( (Q_\alpha Q_\beta)^{\frac{\delta}{2-2\delta}} \right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)},$$

из которого далее оценка (4.1) следует непосредственно.

Поскольку выполнены неравенства  $Q_\beta < Q_\alpha \leq N^{0.1}$ , для доказательства второй из верхних оценок в (3.3) достаточно учесть цепочку неравенств

$$M_1 Q_\alpha = \left( (Q_\alpha)^{\frac{5-3\delta}{2\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \right)^{1+O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)} Q_\alpha \leq (Q_\alpha)^{1.1 \left( \frac{5-3\delta}{2\delta} + \frac{3}{2\delta} + 1 \right)} \leq (N)^{0.11 \left( \frac{5-3\delta}{2\delta} + \frac{3}{2\delta} + 1 \right)} < N.$$

Остальные оценки в (3.3) получаются применением неравенств

$$1 < \frac{5-3\delta}{2\delta} < \frac{3}{2\delta} < 5,$$

выполненных ввиду оценки  $1 > \delta > 0.25(\sqrt{17}-1)$ . Следовательно, имеют место условия леммы 5.1, ввиду которой выполняется оценка (5.1). Но для  $M_1$  из (6.1) эта оценка совпадает с (5.2). Весь список требуемых неравенств доказан. Теорема доказана.  $\square$

## 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Это доказательство следует непосредственно из теорем 4.1, 5.1 и 6.1. Действительно, согласно теореме 4.1 достаточно доказать существование соответственных чисел при выполнении условий (4.3) и (4.4). Но для больших и малых значений величины  $Q_\alpha$  существование таких чисел доказано соответственно в теоремах 5.1 и 6.1. Теорема 1.2 доказана.

**Благодарности.** Автор благодарит профессора Н.Г. Мощевитина за постановку задачи и неоднократное обсуждение темы статьи. Автор также благодарен Д.А. Фроленкову за многократное обсуждение и многие полезные советы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zaremba S.K.* La méthode des “bons treillis” pour le calcul des intégrales multiples // Applications of number theory to numerical analysis: Proc. Symp. Montreal, 1971. New York: Acad. Press, 1972. P. 39–119.
2. *Bourgain J., Kontorovich A.* On Zaremba’s conjecture // Ann. Math. Ser. 2. 2014. V. 180, N 1. P. 137–196.
3. *Moshchevitin N.* On some open problems in Diophantine approximation: E-print, 2012. arXiv:1202.4539v4 [math.NT].
4. *Frolenkov D.A., Kan I.D.* A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem by elementary methods: E-print, 2012. arXiv:1207.4546 [math.NT].
5. *Frolenkov D.A., Kan I.D.* A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem: E-print, 2012. arXiv:1207.5168 [math.NT].
6. *Кан И.Д., Фроленков Д.А.* Усиление теоремы Бургейна–Конторовича // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, №2. С. 87–144.
7. *Frolenkov D.A., Kan I.D.* A strengthening of a theorem of Bourgain–Kontorovich. II // Moscow J. Comb. Number Theory. 2014. V. 4, N 1. P. 78–117.
8. *Кан И.Д.* Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. III // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79, №2. С. 77–100.
9. *Huang S.* An improvement to Zaremba’s conjecture // Geom. Funct. Anal. 2015. V. 25, N 3. P. 860–914.
10. *Кан И.Д.* Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. IV // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80, №6. С. 103–126.
11. *Magee M., Oh H., Winter D.* Uniform congruence counting for Schottky semigroups in  $SL_2(\mathbf{Z})$ : E-print, 2016. arXiv:1601.03705v2 [math.NT].
12. *Вон Р.* Метод Харди–Литтлвуда. М.: Мир, 1985.