из P_0 в P_1, не пересекающийся с V^* и пересекающий трансверсально V^0 в конечном числе точек. При переходе через такую точку ровно одна пара чисел a_j из вещественной становится комплексно-сопряженной или наоборот, т. е. определяемый точкой многочлен реализует до перехода случай (n_1, s), а после перехода — случай $(n_1, s\pm1)$. Следовательно, вдоль этого пути можно подобрать многочлены, реализующие все случаи (n_1, r), $0 \leqslant r \leqslant n_1$. Чтобы показать, что все случаи (ρ, r) реализуются, достаточно рассмотреть для каждого r похожий путь между многочленами, реализующими случаи (n_1, r) и $(0, r)$ (см. предложение 3), в трубчатой окрестности $\Delta' \subset V_r$ которого содержится соединяющий их путь, не пересекающийся с W^* и пересекающий трансверсально W^0 в конечном числе точек.

Замечание 6. Предположим, что многочлен P имеет корень -1 кратности μ. Тогда ровно $\mu - 1$ из чисел a_j равняются 1. Чтобы это доказать, достаточно применить предложение 4 и равенство (1) нужное количество раз. Если у многочлена P ровно s положительных корней, с учетом кратностей, то среди чисел a_j имеется по крайней мере s отрицательных и разных. В самом деле, из теоремы Декарта следует, что последовательность коэффициентов многочлена имеет не менее s перемен знака. У сомножителей вида $K_a * K_{\overline{a}}$, либо $K_a * K_a$, $a \in \mathbb{R}$, либо K_a, $a > 0$, все коэффициенты положительны. Перемены знака получаются за счет разных отрицательных чисел a_j. Соответствующие сомножители K_{a_j} имеют по одной перемене знака, это следует из (3).

Литература

[**1**] В. В. Прасолов, *Многочлены*, МЦНМО, М., 2003. [**2**] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, London Math. Soc. Monographs (N.S.), vol. 26, Oxford Univ. Press, New York, NY, 2002. [**3**] S. Alkhatib, V. P. Kostov, Revista Mat. Complut., **21**:1 (2008), 191–206. [**4**] V. P. Kostov, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **345**:9 (2007), 483–488. [**5**] V. P. Kostov, B. Z. Shapiro, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **343**:2 (2006), 81–86.

Université de Nice Sophia Antipolis, Nice, France
e-mail: kostov@math.unice.fr

Поступило в редакцию
26 октября 2007 г.

УДК 517.9

Существенный спектр разностных операторов на периодических метрических пространствах

© 2009. В. Рабинович, С. Рох

Введение. Главной целью работы является изучение фредгольмовости и существенного спектра общих разностных операторов, действующих в пространстве $l^p(X)$ на комбинаторном графе $(X, \sim)$ и, в частности, оператора Шрёдингера на комбинаторном периодическом графе как важного примера применения развиваемой теории.

Каждому разностному оператору A мы сопоставляем семейство $\mathrm{op}(A)$ предельных операторов, характеризующих свойство фредгольмовости оператора A в том смысле, что A есть фредгольмов оператор в $l^p(X)$, $p \in (1, \infty)$, тогда и только тогда, когда все предельные операторы $A_h \in \mathrm{op}(A)$ обратимы.

Более того, существенный спектр $\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}\, A$ оператора A определяется спектрами предельных операторов оператора A по формуле

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}\, A = \bigcup_{A_h \in \mathrm{op}(A)} \mathrm{sp}\, A_h, \tag{1}$$

и, следовательно, все спектры в (1) не зависят от $p \in (1, \infty)$. В случае когда X есть решетка $\mathbb{Z}^n$, эти результаты были получены в [8] (см. также ссылки в этой работе). Фредгольмовы свойства так называемых ленточно-доминантных (band-dominated) операторов в $l^2(G)$, где G есть общая конечно порожденная точная группа, были изучены Рое [12]. (Заметим, что из критерия фредгольмовости Рое не следует формула (1). Таким образом, в настоящей работе эта формула получена для рассматриваемой ситуации впервые.)

В работе [9] формула (1) применялась к изучению существенного спектра электромагнитных операторов Шрёдингера на решетке $\mathbb{Z}^n$, а в работе [10] — к изучению существенного спектра операторов Шрёдингера на комбинаторных графах, периодических относительно действия группы $\mathbb{Z}^n$. В отличие от этих работ мы здесь рассматриваем операторы на дискретных структурах, периодических относительно действия *некоммутативных* дискретных групп.

Формула, подобная (1), для существенного спектра псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ с приложениями к операторам Шрёдингера, Дирака и квадратному корню из оператора Клейна–Гордона была получена в [11]. Позже близкие результаты были установлены независимо в статьях [6], [7], однако формулы из этих работ применимы только в самосопряженной ситуации.

Заметим, что спектральные свойства операторов Шрёдингера на комбинаторных графах, периодических относительно действия группы $\mathbb{Z}^n$, привлекают в последнее время много внимания из-за их существующих и ожидаемых приложений (см., например, [1]–[5] и ссылки, приведенные в этих работах).

Фредгольмовость ленточно-доминантных операторов на дискретных метрических пространствах. Под *дискретным метрическим пространством* мы понимаем множество X вместе с метрикой ρ, такой, что каждый шар $B_r(x_0) := \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$ есть конечное множество. (Важным примером дискретного метрического пространства является конечно порожденная дискретная группа G с метрикой $\rho(x, y)$, определяемой длиной слова, представляющего элемент $x^{-1}y$ через образующие группы G.) Мы говорим, что дискретное метрическое пространство X является *периодическим* относительно действия дискретной (не обязательно коммутативной) конечно порожденной группы G, если оно снабжено ее свободным действием $X \ni x \to g{\cdot}x \in X$, $g \in G$. Основным предположением для дальнейшего является то, что пространство орбит X/G есть *конечное множество*.

Для $p \geqslant 1$ пусть $l^p(X)$ обозначает банахово пространство всех комплекснозначных функций на X с нормой $\|u\|^p_{l^p(X)} := \sum_{x\in X} |u(x)|^p$, $\|u\|_{l^\infty(X)} := \sup_{x\in X} |u(x)|$. В дальнейшем мы используем (нестандартное) обозначение $l^0(X)$ для подпространства всех функций f из $l^\infty(X)$, таких, что $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (Последнее означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}$ конечно.)

Мы рассматриваем операторы вида $(Au)(x) = \sum_{y\in X} k_A(x, y)u(y)$, $x \in X$, где $k_A \in l^\infty(X \times X)$. Если существует $R > 0$, такое, что $k_A(x, y) = 0$, когда $\rho(x, y) > R$, то оператор A называется *разностным* или *ленточным* операто-

ром. Легко видеть, что ленточные операторы ограничены в $l^p(X)$ для каждого $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ и образуют незамкнутую подалгебру алгебры $\mathscr{L}(l^p(X))$ всех ограниченных линейных операторов на $l^p(X)$, а оператор, сопряженный к ленточному оператору, есть снова ленточный оператор для каждого $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$.

Обозначим через $\mathscr{A}_p(X)$, $p \in [1, \infty]$, замыкание в $\mathscr{L}(l^p(X))$ множества всех ленточных операторов. Операторы из $\mathscr{A}_p(X)$ называются *ленточно-доминантными операторами* на X. Заметим, что $\mathscr{A}_p(X)$ есть банахова алгебра для каждого p и C^*-алгебра, если $p = 2$.

Пусть (h_m) — последовательность элементов группы G. Будем писать, что $h_m \to \infty$ в G, если для каждого $r > 0$ существует $m_0(r)$, такое, что $h_m \notin B_r(e)$ для всех $m \geqslant m_0(r)$ (e — единица группы G). Для $g \in G$ пусть $(L_g u)(x) = u(g^{-1} \cdot x)$ есть изометрический оператор левого сдвига на $l^p(X)$. Пусть $A \in \mathscr{A}_p(X)$, $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$. Тогда в каждой последовательности (h_m) в G, такой, что $h_m \to \infty$, найдется подпоследовательность (g_m), такая, что существуют сильные пределы

$$\operatorname*{s-lim}_{m\to\infty} L_{g_m}^{-1} A L_{g_m} = A_g, \qquad \operatorname*{s-lim}_{m\to\infty} L_{g_m}^{-1} A^* L_{g_m} = A_g^*.$$

Оператор A_g называется *предельным оператором* оператора A, определяемым последовательностью $g = (g_m)$. Будем обозначать множество предельных операторов оператора A через $\operatorname{op}_p(A)$.

Приведенная ниже теорема есть обобщение критерия фредгольмовости Рое [12] для дискретных конечно порожденных точных групп G. Напомним, что дискретная конечно порожденная группа G называется точной (см. [13]), если ее редуцированная групповая C^*-алгебра $C_u(G)$ является точной. Класс точных групп содержит все аменабельные группы, а следовательно, все разрешимые группы, такие, как дискретная группа Гейзенберга, и, в частности, все дискретные коммутативные группы.

Теорема 1. *Пусть X — периодическое метрическое пространство относительно действия дискретной конечно порожденной точной группы G. Тогда $A \in \mathscr{A}_2(X)$ есть фредгольмов оператор в $l^2(X)$ в том и только том случае, когда все предельные операторы $A_g \in \operatorname{op}(A)$ обратимы и*

$$\sup_{A_g \in \operatorname{op}(A)} \|A_g^{-1}\| < \infty. \tag{2}$$

Заметим, что формула (1) не следует из теоремы 1.

Существенный спектр ленточных операторов в $l^p(X)$. Наша следующая цель — показать, что для ленточных операторов A условие (2) в теореме 1 излишне, если группа G удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, а именно, если G — группа субэкспоненциального роста (определения см., например, в [14]) и содержит бесконечную циклическую подгруппу. При этих условиях фредгольмовость оператора A следует из обратимости всех предельных операторов и имеет место формула (1). Более того, мы получаем этот результат для $l^p(X)$ с $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть G — дискретная конечно порожденная точная группа субэкспоненциального роста, обладающая циклической подгруппой бесконечного порядка, и пусть X есть дискретное метрическое пространство, периодическое относительно действия группы G. Тогда для любого ленточного оператора A на X следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *существует* $q \in \{0\} \cup [1, \infty)$, *такое, что* A *есть фредгольмов оператор на* $l^q(X)$;

(b) *существует* $q \in \{0\} \cup [1, \infty)$, *такое, что все предельные операторы оператора* A *обратимы на* $l^q(X)$;

(c) *все предельные операторы оператора* A *обратимы на* $l^0(X)$;

(d) *все предельные операторы оператора* A *обратимы на* $l^0(X)$, *и нормы обратных к ним операторов равномерно ограничены*;

(e) *для каждого* $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$ *все предельные операторы оператора* A *обратимы на* $l^p(X)$, *и нормы обратных к ним операторов равномерно ограничены*;

(f) *оператор* A *фредгольмов на* $l^p(X)$ *для каждого* $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$, *и его (фредгольмов) индекс не зависит от* p.

Если одно из этих утверждений выполнено, то существенный спектр $\operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} A$ *оператора* A *не зависит от пространства* $l^p(X)$, $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$, *и*

$$\operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} A = \bigcup_{A_h \in \operatorname{op} A} \operatorname{sp} A_h. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы следует схеме доказательства, данного в [8, §2.5] для операторов из алгебры Винера на группе $\mathbb{Z}^n$, однако отсутствие спектральной инвариантности операторов из алгебры Винера на $l^p(G)$, где G — некоммутативная группа, требует дополнительных условий на G, которые для $\mathbb{Z}^n$ выполняются автоматически.

• *Группа* G *имеет субэкспоненциальный рост.* Это свойство и оценки Шубина для функций Грина псевдоразностных операторов на дискретных некоммутативных группах [14] показывают, что обратимость ленточного оператора A в некотором пространстве в $l^q(X)$ влечет за собой его обратимость во всех пространствах $l^p(X)$, $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

• *Группа* G *обладает циклической подгруппой бесконечного порядка.* Это свойство позволяет доказать следующее утверждение: если разностный оператор A фредгольмов в некотором $l^q(X)$, то он является фредгольмовым во всех пространствах $l^p(X)$, $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$, и его индекс не зависит от пространства $l^p(X)$.

Операторы Шрёдингера на периодических графах. Под *дискретным графом* мы понимаем дискретное пространство X вместе с бинарным отношением $\sim$, которое является антирефлексивным (не существует $x \in X$, такого, что $x \sim x$) и симметричным и обладает таким свойством: для каждого $x \in X$ существует только конечное множество точек $y \in X$, таких, что $x \sim y$. Точки пространства X называются *вершинами*, а пары (x, y), такие, что $x \sim y$, — *ребрами* графа. Вследствие антирефлексивности рассматриваемые графы не имеют петель. Более того, мы рассматриваем связные графы.

Будем говорить, что граф $(X, \sim)$ является периодическим, если X есть периодическое дискретное пространство относительно действия группы G. Далее, пусть $m(x)$ обозначает число ребер, отвечающих вершине x. Если граф $(X, \sim)$ периодический, то m есть периодическая функция относительно действия группы G.

На графе $(X, \sim)$ мы рассматриваем оператор Шрёдингера $\mathscr{H}_X u := \Delta_X u + vu$, $u \in l^p(X)$, где потенциал v принадлежит $l^\infty(X)$ и

$$(\Delta_X u)(x) := \frac{1}{m(x)} \sum_{y \sim x} u(y), \qquad x \in X,$$

есть Лапласиан на графе.

Для каждой последовательности $h\colon \mathbb{N} \to G$, стремящейся к бесконечности, существуют подпоследовательность g и функция $v^g \in l^\infty(G)$, такие, что поточечно $v(g_k \cdot x) \to v^g(x)$, когда $k \to \infty$. Оператор $\mathscr{H}_X^g := \Delta_X + v^g I$ является предельным оператором для $\mathscr{H}_X$, определяемым последовательностью g. Таким образом, теорема 2 влечет за собой следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $(X, \sim)$ — периодический граф относительно дискретной конечно порожденной точной группы субэкспоненциального роста, обладающей бесконечной циклической подгруппой. Тогда оператор Шрёдингера $\mathscr{H}_X = \Delta_X + vI$ с ограниченным потенциалом v есть фредгольмов оператор на $l^p(X)$, $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$, в том и только том случае, когда все предельные операторы $\mathscr{H}_X^h$ обратимы на одном из пространств $l^{p_0}(X)$ с $p_0 \in \{0\} \cup [1, \infty)$. Существенный спектр оператора $\mathscr{H}_X$ не зависит от p и*

$$\operatorname{sp}_{\mathrm{ess}} \mathscr{H}_X = \bigcup_{\mathscr{H}_X^g \in \operatorname{op}(\mathscr{H}_X)} \operatorname{sp} \mathscr{H}_X^g. \tag{4}$$

В частности, формула (4) позволяет дать эффективное описание существенного спектра оператора Шрёдингера с достаточно общими потенциалами на периодических графах.

Заметим, что в работах [9], [10] с помощью формулы (4) было дано описание существенного спектра операторов Шрёдингера на графах, периодических относительно действия группы $\mathbb{Z}^n$. В частности, было дано описание существенного спектра дискретных операторов Шрёдингера на гексагональных и зигзагообразных графах, важных в теории наноструктур, а также описание существенного спектра операторов многочастичных проблем на графах, периодических относительно $\mathbb{Z}^n$.

Краткость заметки не позволяет дать приложения формулы (1) к оператору Шрёдингера на периодических некоммутативных структурах. Мы собираемся сделать это в последующих статьях.

Литература

[**1**] P. Exner, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Thèor., **66**:4 (1997), 359–371. [**2**] P. Harris, *Carbon Nanotubes and Related Structure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001. [**3**] E. Korotyaev, I. Lobanov, Ann. Inst. H. Poincare, **8**:6 (2007), 1151–1176. [**4**] E. Korotyaev, Lett. Math. Phys., **83**:1 (2008), 83–95. [**5**] P. Kuchment, O. Post, Commun. Math. Phys., **275**:3 (2007), 805–826. [**6**] Y. Last, B. Simon, J. Anal. Math., **98** (2006), 183–220. [**7**] V. Georgescu, A. Iftimovichi, Rev. Math. Phys., **18**:4 (2006), 417–483. [**8**] V. S. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, *Limit Operators and Their Applications in Operator Theory*, Birkhäuser, Basel, 2004. [**9**] V. S. Rabinovich, S. Roch, J. Phys. A: Math. Gen., **39** (2006), 8377–8394. [**10**] V. S. Rabinovich, S. Roch, J. Phys. A: Math. Theor., **40**:33 (2007), 10109–10128. [**11**] V. S. Rabinovich, Russian J. Math. Phys., **12**:1 (2005), 62–80. [**12**] J. Roe, Integral Equations Operator Theory, **51**:3 (2005), 411–416. [**13**] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, Univ. Lecture Ser., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. [**14**] М. А. Шубин, Изв. АН СССР, **49**:3 (1985), 652–671.

Instituto Politécnico Nacional, ESIME Zacatenco, Mexico
e-mail: vladimir.rabinovich@gmail.com

Technische Universität Darmstadt, Germany
e-mail: roch@mathematik.tu-darmstadt.de

Поступило в редакцию
6 июня 2007 г.