J. M. Winogradow, Об одной общей теореме Варинга, *Матем. сб.*, 1924, том 31, 490–507

https://www.mathnet.ru/sm6908

Sur un théoreme général de Waring.

Par M. J. M. Winogradow (Leningrad).

Dans le travail présent nous proposons une méthode nouvelle de résoudre les questions qui ont été posés par Waring et qui ont été objets des travaux récents de Hilbert[1]), Hardy-Littlewood[2]), Kamke[3]) et Landau[4]). Nous démontrons l'affirmation de Waring la plus générale sur la représentation d'un nombre entier par une somme de valeurs d'un polynome entier à coefficients rationnels.

1. Nous démontrerons préalablement quelques lemmes généraux. Pour abréger les calculs nous n'apprécierons que grossièrement les limites supérieures des valeurs numériques des quantités que nous rencontrerons, ce qui sera tout à fait suffisant pour notre but.

Lemme I. *Soit a un entier positif, et $\tau_\nu(a)$ le nombre des solutions de l'équation indéfinie*

$$x_1\, x_2 \ldots x_\nu = a,$$

où $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ parcourent tous les nombres entiers positifs indépendamment les uns des autres. Alors, désignant par ε un nombre positif $\leqslant \frac{1}{2}$, nous aurons

$$\tau_\nu(a) < Ma^\varepsilon,\ M = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\nu e^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Nous commencerons par calculer la limite supérieure du nombre $\tau(a)$ des diviseurs du nombre a. En supposant $a \geqslant 2$ et en le représentant sous la forme

$$a = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

où $p_1, p_2, \ldots p_k$ sont les tous les diviseurs premiers différents du nombre a, disposés dans l'ordre croissant, nous aurons

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)\ (\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

D'où nous trouvons

$$\frac{\tau(a)}{a^\varepsilon} \leqslant \frac{\alpha_1 + 1}{2^{\varepsilon\alpha_1}} \cdot \frac{\alpha_2 + 1}{3^{\varepsilon\alpha_2}} \cdots \frac{\alpha_k + 1}{(k+1)^{\varepsilon\alpha_k}}.$$

---

1) Hilbert. Mathematische Annalen. 1909.
2) Hardy-Littlewood. Quarterly Journ. of Mathem. 1919.
3) Kamke. Mathematische Zeitschrift. 1922.
4) Landau. Mathematische Zeitschrift. 1922.

Nous décomposerons le produit à droite en deux produits partiels, le premier embrassant les facteurs de la forme $(\alpha_s+1)(s+1)^{-\varepsilon\alpha_s}$, pour lesquels $s+1<e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, et le second embrassant les facteurs restants, ou égal a 1, s'il n'y en a pas. Dans le premier produit le nombre des facteurs est $<e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, et chacun d'eux ne surpasse pas la plus prande valeur de la fonction $(x+1)\,2^{-\varepsilon x}\,(x\geqslant 1)$, qui est $<\frac{1}{\varepsilon}$. Dans le second produit (s'il n'est pas égal à 1) chaque facteur sera $\leqslant(\alpha_s+1)e^{-\alpha_s}$, et conséquemment ne surpassera pas la plus grande valeur de la fonction $(x+1)e^{-x}$ $(x\geqslant 1)$, qui est <1. On en conclut l'inégalité

$$\frac{\tau(a)}{a^{\varepsilon}}<\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{e^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

qui a également lieu pour $a=1$. De là le lemme I se laisse facilement vérifier.

2. Soit

$$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

un polynome à coéfficients réels, où $|a_0|>0$ et $n\geqslant 2$. Considérons la somme

$$S_0=\sum_{x=\alpha}^{x=\beta}e^{2\pi i\lambda\varphi(x)},$$

où λ est un nombre réel, $\beta-\alpha=k_1>0$, $2k_1+1\leqslant k$.

En multipliant la somme S par sa conjugée, on aura

$$|S_0|^2=\sum_{y=\alpha}^{y=\beta}e^{2\pi i\lambda\varphi(y)}\sum_{x=\alpha}^{x=\beta}e^{-2\pi i\lambda\varphi(x)}.$$

En groupant les facteurs de ce produit suivant les valeurs égales de $c_1=y-x$ et en posant $\varphi_1(x,c_1)=\varphi(x+c_1)-\varphi(x)=c_1na_0x^{n-1}+\cdots$, on aura

$$|S_0|^2=\sum_{c_1=0}^{c_1=k}\;\sum_{x=\alpha}^{x=\beta-c_1}e^{2\pi i\lambda\varphi_1(x,\,c_1)}+\sum_{c_1=-k}^{c_1=-1}\;\sum_{x=\alpha+c_1}^{x=\beta}e^{2\pi i\lambda\varphi_1(x,c_1)}.$$

L'égalité obtenue se laisse écrire sous la forme plus courte

$$|S_0|^2=\sum_{c_1=-k}^{c_1=k}S_1,$$

où S_1 est la somme

$$S_1=\sum_{x=\alpha_1}^{x=\beta_1}e^{2\pi i\lambda\varphi_1(x)},$$

dans laquelle α_1 et β_1 sont déterminés par la valeur de c_1 et satisfont aux conditions $\alpha\leqslant\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant\beta$, et où on a mis, pour abréger, $\varphi_1(x,c_1)=\varphi_1(x)$.

L'application de la méthode précédente à la somme S conduit à l'égalité

$$|S_1|^2 = \sum_{c_2=-k_1}^{c_2=k_1} S_2,$$

où S_2 est égale soit à zéro, soit à la somme

$$S_2 = \sum_{x=\alpha_2}^{x=\beta_2} e^{2\pi i\lambda\varphi_2(x)},$$

dans laquelle $\varphi_2(x) = n(n-1)\,a_0c_1c_2x^{n-2} + \cdots$ et $\alpha \leqslant \alpha_2 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta$.

L'application successive de ce procédé conduit à la suite des sommes S_3, $S_4, \ldots S_{n-2}$ et finalement à la somme S_{n-1}, qui est égale soit à la somme

$$S_{n-1} = \sum_{x=\alpha_{n-1}}^{x=\beta_{n-1}} e^{2\pi i\lambda\varphi_{n-1}(x)},$$

où $\alpha \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \beta_{n-1} \leqslant \beta$ et $\varphi_{n-1}(x) = n!\, a_0c_1c_2\cdots c_{n-1}\,x + \gamma$, avec γ indépendant de x.

Des inégalités

$$|S_0|^2 \leqslant \sum_{c_1=-k_1}^{c_1=k_1} |S_1|;\ |S_1|^2 \leqslant \sum_{c_2=-k_1}^{c_2=k_1} |S_2|;\ldots |S_{n-2}|^2 \leqslant \sum_{c_{n-1}=-k_1}^{c_{n-1}=k_1} |S_{n-1}|,$$

et de l'inégalité connue

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^2 \leqslant m(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)$$

on trouve, en remarquant que $2k_1 + 1 \leqslant k$

$$|S_0|^{2^{n-1}} \leqslant k^{2^{n-2}-1} \sum_{c_1=-k_1}^{c_1=k_1} |S_1|^{2^{n-2}}$$

$$|S_1|^{2^{n-2}} \leqslant k^{2^{n-3}-1} \sum_{c_2=-k_1}^{c_2=k_1} |S_2|^{2^{n-3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|S_{n-3}|^{2^2} \leqslant k^{2-1} \sum_{c_{n-2}=-k_1}^{c_{n-2}=k_1} |S_{n-2}|^2.$$

D'où l'on déduit

$$|S_0|^{2^{n-1}} \leqslant k^{2^{n-1}-n} \sum |S_{n-1}|,$$

où la somme s'étend sur toutes les valeurs possibles de la somme S_{n-1}.

3. Le produit $c_1c_2\cdots c_{n-1}$ peut recevoir $\leqslant k^{n-1}$ valeurs, qui se trouvent toutes dans la suite

$$-k_1^{n-1}, -k_1^{n-1}+1, \ldots -1, 0, 1\ldots, k_1^{n-1},$$

et d'après le lemme I ce produit ne reçoit chacune de ces valeurs que $2^{n-2}Mk^{(n-1)\varepsilon}$ fois au plus, excepté la valeur 0, qui ne se répète pas plus de $(n-1)k^{n-2}$ fois. ε désigne ici un nombre encore arbitraire qui satisfait aux conditions $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. $M = N^{(n-1)e^N}$, $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Mais de l'expression de la somme S_{n-1} il suit que

$$|S_{n-1}| \leq k_1 + 1, \; |S_{n-1}| \leq \frac{1}{2(\lambda n!\, a_0 c_1 c_2 \cdots c_{n-1})},$$

(z) étant le module de la différence entre z et le nombre entier le plus proche. Nous pourrons donc écrire

$$\sum |S_{n-1}| \leq 2^{n-2} M k_1^{(n-1)\varepsilon} \sum_{s=-k_1^{n-1}}^{s=k_1^{n-1}} R_s + (n-1) k^{n-2}(k_1+1),$$

où

$$0 \leq R_s \leq k_1 + 1; \quad R_s \leq \frac{1}{2(\lambda n!\, a_0 s)}$$

4. Soit maintenant q un entier, satisfaisant aux conditions $k_1 + 1 \leq q \leq k_1^{n-\frac{7}{8}}$; $k_1 \geq e^{20}$; $k = 2k_1 + 1$, enfin $\lambda n! a_0 = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, où a est un entier premier avec q, et $|\theta| < 1$.

Tous les nombres s se laissent partager en

$$\frac{2k_1^{n-1}+1}{q} + 1$$

groupes au plus dont chacun contient q valeurs successives de s (dans le cas $q > 2k_1^{n-1}$ il n'est pas nécessaire d'effectuer ce partage). Soit $t, t+1, \ldots t+r-1$ (où $r \leq q$) l'un de ces groupes. Considérons la somme

$$\Omega = \sum_{s=t}^{s=t+r-1} R_s.$$

En posant $s = t + z$, avec $0 \leq z \leq r-1$, nous pouvons écrire l'expression $\lambda n! a_0 s$ sous la forme

$$\lambda n! a_0 s = \lambda n! a_0 t + \frac{az}{q} + \frac{\theta z}{q^2} = \frac{m + \theta'}{q} + \frac{\theta z}{q^2},$$

m étant un entier, $|\theta'| < 1$ et le signe de θ' contraire au signe de θ (si aucune de ces valeurs n'est pas égale à 0). En introduisant le plus petit résidu positif σ du nombre m (Mod. q) on obtient

$$\lambda n! a_0 s = L_\sigma + \frac{\sigma}{q} + \frac{\theta_\sigma}{q}; \; |\theta_\sigma| < 1,$$

où L_σ est entier et σ reçoit dans un ordre certain toutes ou quelques unes des valeurs $0, 1, \ldots q-1$, lorsque z parcourt toutes ces valeurs, ou quelques unes d'entre elles. Nous pouvons donc écrire

$$\Omega = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=q-1} T_\sigma,$$

où
$$0 \leqslant T_\sigma \leqslant k_1 + 1\,;\; T_\sigma \leqslant \frac{1}{2\left(\frac{\sigma}{q} + \frac{\theta_\sigma}{q}\right)}.$$

Nous allons employer la première inégalité si $\sigma = -1,\ 0,\ 1$, et la seconde si $\sigma \equiv \pm \mu\ (\mathrm{Mod.}\ q)$, où $2 \leqslant |\mu| \leqslant \frac{1}{2}q$. De plus nous remplacerons la seconde inégalité par

$$T_\sigma \leqslant \frac{q}{2(\mu - 1)}.$$

Alors

$$|\Omega| < 3(k_1 + 1) + \sum_{u=1}^{u=q} \frac{q}{u} < 3(k_1 + 1) + q(\lg q + 1) < \frac{6}{5}\, q \lg q.$$

On aura donc

$$\sum_{s=-k_1^{n-1}}^{s=k_1^{n-1}} R_s < (2k_1 + 1 + q)\,\frac{6}{5}\lg q < \frac{7}{3}\, n k_1^{\,n-\frac{3}{4}}.$$

Soit maintenant $\varepsilon = (4n-4)^{-1}$. Alors dans le n° 3 on doit poser

$$M = (4n-4)^{(n-1)\, e^{4n-4}}.$$

Il vient alors

$$\sum |S_{n-1}| < 2^{n-2} M \cdot \frac{7}{3} n k_1^{\,n-\frac{1}{2}} + (n-1)\, k^{n-2}(k_1 + 1) < nMk^{n-\frac{1}{2}}.$$

D'où l'on aura

$$|S_0| < K k^{1-2^{-n}}\,;\; K = (nM)^{2^{-(n-1)}}.$$

5. Considérons maintenant la somme

$$S = \sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i \lambda \varphi(x)}$$

où $P - 1 \geqslant e^{20}$.

a) Soit $P \leqslant q \leqslant (P-1)^{n-\frac{7}{8}}$. En posant $P - 1 = k_1$, on trouve

$$|S| < 2KP^{1-2^{-n}}$$

b) Soit $e^{20} + 1 \leqslant q < P$. Dans ce cas on peut partager tout l'intervalle $1 \leqslant x \leqslant P$ en parties, dont le nombre ne dépassera pas $Pq^{-1} + 1 < 2Pq^{-1}$ et dont chacune contient q, ou un nombre plus petit de valeurs consécutives de x. La somme S sera conformément partagée en autant de sommes nouvelles. Posons $q - 1 = k_1$. Alors la limite supérieure du module de chaque somme nouvelle sera

$$2Kq^{1-2^{-n}}$$

et

$$|S| < 4KPq^{-2^{-n}}.$$

Nous pouvons formuler les résultats obtenus de la façon suivante.

Lemme II. *Soit*

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

un polynome à coefficients réels, où $a_0 > 0$ *et* $n \geqslant 2$, *et* λ *un nombre réel, satisfaisant à la condition*

$$\lambda n! a_0 = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

où a *et* q *sont des entiers premiers entre eux et* $|\theta| < 1$. *Soit encore* P *un entier satisfaisant à la condition* $P - 1 \geqslant e^{20}$ *et*

$$S = \sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i \lambda \varphi(x)}$$

Alors si $P \leqslant q \leqslant (P-1)^{n-\frac{7}{8}}$, *on aura* $|S| < TP^{1-2^{-n}}$
et si $e^{20} + 1 \leqslant q < P$, *on aura* $|S| < TPq^{-2^{-n}}$,
où

$$T = 4(nM)^{2^{-(n-1)}};\quad M = (4n-4)^{(n-1)e^{4n-4}}.$$

6. Tâchons d'apprécier la limite supérieure du module de la somme

$$\sum_{H=a}^{H=b} e^{2\pi i f(H)},$$

où $f(x)$ satisfait entre les limites de sommation à certaines conditions. Nous nous appuierons sur deux identités faciles à vérifier

$$(1)\quad \sum_{H=Q}^{H=R} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} e^{2\pi i F(H+x)}\, dx = \sum_{n=-m}^{n=m} \int_{Q-\frac{1}{2}}^{R+\frac{1}{2}} e^{2\pi i[-nx + F(x)]} dx,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} e^{2\pi i F(H+x)}\, dx = e^{2\pi i F(H)} +$$

$$+ e^{2\pi i F(H)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} (e^{2\pi i \psi(x)} - 1) dx,$$

où Q, R et m sont des entiers, $Q \leqslant R$, $m > 0$, $F(x) = f(x) + lx$, l étant un entier ; enfin $\psi(x) = F(H+x) - F(H)$.

Soit maintenant $U \geqslant 2$, $m = [4U^3 + 1]$, $\mu = (2m+1)^{\frac{1}{3}}$, $R - Q \leqslant U - 1$ et $f(x)$ une fonction qui, dans l'intervalle $Q - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant R + \frac{1}{2}$, admet une derivée seconde satisfaisant aux conditions $0 \leqslant f''(x) \leqslant 1$.

Il est aisé de voir que $\mu \geqslant 2U$, et q'on peut choisir le nombre l de façon que dans tout l'intervalle $Q - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant R + \frac{1}{2}$ on aie

$$\mu \leqslant F'(x) \leqslant 2\mu,$$

ce que nous supposerons toujours dans la suite.

L'intégration par parties donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2\pi i\varphi(x)}-1}{\sin \pi x} \sin (2m+1)\pi x dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos (2m+1)\pi x}{\pi\mu^3} \cdot \frac{\sin \pi x \cdot 2\pi i\psi'(x)e^{2\pi i\varphi(x)} - (e^{2\pi i\varphi(x)}-1)\pi \cos \pi x}{\sin^2 \pi x} dx.$$

En remarquant, que $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et en appliquant la formule de Taylor nous trouvons

$$\sin \pi x = \theta\pi x = \pi x - \theta_1 \frac{\pi^3 x^3}{6}; \quad \psi'(x)e^{2\pi i\varphi(x)} = \psi'(0) + 8\tfrac{1}{48}\theta_2\pi\mu^2 x;$$

$$(e^{2\pi i\varphi(x)}-1)\cos \pi x = 2\pi i\psi'(0)x - 18\tfrac{1}{6}\theta_3\pi^2\mu^2 x^2,$$

où les nombres θ, θ_1, θ_2, θ_3 ne dépassent pas 1 en valeur absolue.

En tenant compte de l'inégalité $|\sin \pi x| \geqslant 2x$, valable pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, on verra que la dernière fonction à intégrer et l'intégrale elle-même seront plus petites en valeur absolue que $87\mu^{-1} < 44U^{-1}$. Donc l'égalité (1) peut s'écrire comme il suit

$$(2) \qquad \sum_{H=Q}^{H=R} e^{2\pi i f(H)} = \sum_{n=-m}^{n=m} \int_{Q-\frac{1}{2}}^{R+\frac{1}{2}} e^{2\pi i[-nx+F(x)]}dx + 44\sigma; \ |\sigma| < 1.$$

En posant pour abréger $Q - \frac{1}{2} = \alpha$, $R + \frac{1}{2} = \beta$, $-nx + F(x) = \eta_n(x)$, passons à l'appréciation de l'ordre de grandeur de l'intégrale

$$J = \int_\alpha^\beta e^{2\pi i\eta_n(x)}dx.$$

Admettons que dans l'intervalle $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ on a

$$\tau \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \tau_1,$$

où $\tau > 0$, $\tau_1 > 0$. Alors il est aisé de voir, que pour tout l'intervalle $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ on aura $\tau - n - l \leqslant \eta_n'(x) \leqslant 1 - \tau_1 + n + l$. D'où il est clair, que pour $n \leqslant l$ on aura $\eta_n'(x) > 0$ et pour $n > l$ on aura $\eta_n'(x) < 0$ dans tout l'intervalle $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

a) Admettons que $n > l$. En posant alors dans l'intégrale J $\eta_n(x) = z$, et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire on trouve:

$$J = \int_{\eta_n(\alpha)}^{\eta_n(\beta)} \frac{\cos 2\pi z}{\eta_n'(x)} dz + i \int_{\eta_n(\alpha)}^{\eta_n(\beta)} \frac{\sin 2\pi z}{\eta_n'(x)} dz,$$

où $\eta_n'(x)$ doit être considéré comme une fonction de z. En tenant compte de l'interprétation géométrique des intégrales obtenues et de ce que la fonction $[\eta_n'(x)]^{-1}$ ne croit pas avec x et par conséquence ne croit pas non plus avec z, nous trouverons sans peine, que dans le cas envisagé

$$|J| < \frac{2}{\pi\eta_n'(\alpha)} < \frac{2}{3(\tau - n + l)}.$$

b) Admettons maintenant, que $n > l$. En posant $x = -\xi$, nous ramènerons l'intégrale J au type qui vient d'être considéré, d'où nous verrons que dans ce cas:

$$\left| J \right| < \frac{2}{\pi \left| r'_{ln}(\beta) \right|} < \frac{2}{3(\tau_1 + n - l - 1)}.$$

En appliquant les résultats obtenus a l'égalité (2) on a

$$\left| \sum_{H=Q}^{H=R} e^{2\pi i f(H)} \right| < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} + 2\sum_{u=1}^{u=m} \frac{1}{u}\right) + 44 < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} + 2 \lg (m+1)\right) + 44 <$$

$$< \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1}\right) + 4 \lg U + 48.$$

Si l'on prend maintenant au lieu des nombres Q et R, des nombres arbitraires a et b, qui ne satisfont qu'à la condition $b - a \geqslant 5$ et si l'on pose $b - a = U$, $Q = [a] + 2$, $R = [b] - 1$, on est conduit au lemme suivant:

L e m m e III. *Soient a et b des nombres arbitraires, satisfaisant à la condition $b - a > 5$, et soit $f(x)$ une fonction dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ admettant les dérivées première et seconde, qui satisfassent aux conditions*:

$$0 < \tau \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \tau_1 < 1\,; \quad 0 \leqslant f''(x) \leqslant 1.$$

Alors

$$\left| \sum_{H > a}^{H \leqslant b} e^{2\pi i f(H)} \right| < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1}\right) + 4 \lg (b - a) + 50.$$

7. Soit

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

un polynome à coefficients réels, dont chacun ne dépasse pas A en valeur absolue, $n \geqslant 2$, $a_0 \geqslant 1$. Soit encore P un entier satisfaisant à la condition

$$P \geqslant 3n(n-1)\, a_0 (180\, A)^n$$

et Y un nombre réel, satisfaisant aux conditions

$$3n(n-1)\, a_0 P^{n-1} \leqslant Y \leqslant P^n.$$

Il est aisé de voir que pour $x \geqslant 4A$ il y aura,

$$\frac{2}{3}\, n\, a_0\, x^{n-1} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{4}{3}\, n\, a_0\, x^{n-1},$$

$$\frac{2}{3}\, n(n-1)\, a_0\, x^{n-2} \leqslant \varphi''(x) \leqslant \frac{4}{3}\, n(n-1)\, a_0\, x^{n-2}.$$

De plus il est aisé de voir que

$$Y > (4A)^n; \quad Y > (180\, A)^n; \quad P \leqslant Y^{\frac{2}{n}}.$$

Considérons la somme:

$$S = \sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i \frac{\varphi(x)}{Y}}.$$

Soit 2^s la plus grande puissance de 2, qui est $< PY^{-\frac{1}{n}}$. Décomposons la somme S en sommes nouvelles, correspondant aux intervalles:

$$0 \leqslant x \leqslant Y^{\frac{1}{n}}, \quad Y^{\frac{1}{n}} \leqslant x \leqslant 2Y^{\frac{1}{n}}, \quad 2Y^{\frac{1}{n}} \leqslant x \leqslant 4Y^{\frac{1}{n}}, \ldots, \quad 2^s Y^{\frac{1}{n}} \leqslant x \leqslant P.$$

Soit

$$\Omega = \sum_{x > C}^{x \leqslant D} e^{2\pi i \frac{\varphi(x)}{Y}},$$

la somme, qui correspond à l'un de ces intervalles, à l'exception du premier. Il est alors évident que $D \leqslant 2C$ et que pour tout l'intervalle $C \leqslant x \leqslant D$

$$\tau \leqslant \frac{\varphi'(x)}{Y} < \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \frac{\varphi''(x)}{Y} \leqslant 1, \quad \tau = \frac{2}{3} \frac{na_0 C^{n-1}}{Y}.$$

De plus si l'on pose $U = C$, on aura $U \geqslant D - C$. Donc en posant

$$\frac{\varphi(x)}{Y} = f(x), \quad C = a, \quad D = b,$$

nous pouvons appliquer le lemme III à la somme Ω. En supposant $D - C \geqslant 5$ nous obtiendrons l'inégalité:

$$\left|\Omega\right| < \frac{Y}{na_0 C^{n-1}} + 4 \lg P + 51\tfrac{1}{3},$$

laquelle évidemment a aussi lieu pour $D - C < 5$. D'où on trouve aisément:

$$\left|S\right| < Y^{\frac{1}{n}} + \frac{Y^{\frac{1}{n}}}{na_0}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^s}\right) + (s+1)\left(4 \lg P + 51\frac{1}{3}\right) <$$
$$< \frac{3}{2} Y^{\frac{1}{n}} + \frac{5}{3} \lg Y^{\frac{1}{n}}\left(8 \lg Y^{\frac{1}{n}} + 51\tfrac{1}{3}\right) < 6Y^{\frac{1}{n}}.$$

En remarquant que $|S|$ ne change pas si l'on y remplace Y par $-Y$ nous pouvons exprimer les résultats obtenus de la façon suivante.

Soit

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

un polynome à coefficients réels, dont chacun ne dépasse pas A en valeur absolue, $n \geqslant 2$, $a_0 \geqslant 1$. Soit encore P un entier, satisfaisant aux conditions:

$$3n(n-1)a_0 P^{n-1} \leqslant |Y| \leqslant P^n.$$

Alors

$$\left|\sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i \frac{\varphi(x)}{Y}}\right| < 6|Y|^{\frac{1}{n}}.$$

8. Gardons toutes les notations du n° précédent de même que les conditions de ce n° à l'exception des inégalités qui limitent la valeur de $|Y|$, que nous remplacerons par les suivantes:

$$e^{21} n! a_0 \leqslant |Y| \leqslant P^n.$$

En posant $\left[\frac{Y}{n!a_0}\right]=q$ on aura

$$\frac{n!a_0}{Y}=\frac{\varepsilon}{q}+\frac{\theta}{q^2};\ \varepsilon=\pm 1,\ |\theta|<1.$$

De plus il est aisé de prouver que

$$\frac{3P^{n-1}}{(n-2)!}\leqslant (P-1)^{n-\frac{7}{8}}.$$

Donc d'après le lemme II et le n° 7 il vient:

α) si $e^{21}\leqslant\left|\frac{Y}{n!a_0}\right|\leqslant P$, on a $e^{20}+1<q\leqslant P$ et $|S|<TPq^{-2^{-n}}<$

$$<2TP\left(\frac{n!a_0}{Y}\right)^{2^{-n}};$$

β) si $P\leqslant\left|\frac{Y}{n!a_0}\right|\leqslant\frac{3P^{n-1}}{(n-2)!}$, on a $P\leqslant q\leqslant\frac{3P^{n-1}}{(n-2)!}$ et $|S|<TP^{1-2^{-n}}$;

γ) si $\frac{3P^{n-1}}{(n-2)!}<\left|\frac{Y}{n!a_0}\right|<\frac{P^n}{n!a_0}$, on a $|S|<6Y^{\frac{1}{n}}$.

En posant $Y^{-1}=Z$ nous pouvons exprimer les résultats trouvés comme il suit.

L e m m e IV. *Soit*

$$\varphi(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

un polynome à coefficients réels, dont chacun ne dépasse pas A en valeur absolue, $n\geqslant 2$, $a_0\geqslant 1$. *Soit encore P un entier, Z un nombre réel et*:

$$P\geqslant 3n(n-1)a_0(180A)^n,\quad \frac{1}{e^{21}n!\,a_0}\geqslant Z\geqslant\frac{1}{P^n}.$$

Alors en posant

$$S=\sum_{x=1}^{x=P}e^{2\pi iZ\varphi(x)};\ T=4(nM)^{2^{-(n-1)}},\ M=(4n-4)^{(n-1)e^{4n-4}},$$

on a

α) $|S|<2TP(n!a_0Z)^{2^{-n}}$ *si* $\frac{1}{e^{21}}\geqslant\left|n!a_0Z\right|\geqslant\frac{1}{P}$;

β) $|S|<TP^{1-2^{-n}}$, *si* $\frac{1}{P}\geqslant\left|n!a_0Z\right|\geqslant\frac{(n-2)!}{3P^{n-1}}$;

γ) $|S|<6Z^{-\frac{1}{n}}$, *si* $\frac{(n-2)!}{3P^{n-1}}\geqslant\left|n!a_0Z\right|\geqslant\frac{n!a_0}{P^n}$.

9. Soit:

$$\Phi(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n$$

un polynome à coefficients entiers, dont chacun ne dépasse pas C en valeur absolue, $n\geqslant 2$, $c_0\geqslant 1$. Conservons à T la signification qu'il possède dans le lemme IV et soit U un entier premier avec le produit $c_0\,.\,1\,.\,2\ldots T^r$ et satisfaisant à la condition:

$$U\geqslant[(2n!c_0)^{2n}T^{2r}]^{n^2},$$

où $r = 2^{n+2} n(n-1)$. Soit enfin :

$$P = \left[n! c_0 T^{2r} U^{\frac{1}{n}} \right] + 1, \; S_m = \sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i m \frac{\Phi(x)}{U}}.$$

Celà posé, cherchons la limite supérieure de la somme :

$$\Delta = \sum_{m=1}^{m=U-1} \left| S_m \right|^r.$$

Il est toujours possible de trouver deux entiers premiers entre eux a et q, tels que :

$$\frac{mn!c_0}{U} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{qU^{\frac{1}{n}}}; \; |\theta| < 1, \; 0 < q < U^{\frac{1}{n}}.$$

Nous allons d'abord calculer la limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, qui correspondent aux valeurs de $q \geqslant U^{n^{-2}}$. Pour ces valeurs de q le nombre de toutes les valeurs de m, qui correspond à un couple quelconque de valeurs des nombres a et q ne dépasse évidemment pas :

$$\frac{2U^{\frac{n-1}{n}}}{n!c_0 q} + 1 < \frac{2U^{\frac{n-1}{n}}}{q}.$$

Quant au nombre de valeurs de a, qui correspond à une valeur quelconque de q, il ne dépasse évidemment pas $n!c_0 q$. Donc a une valeur donnée de $q \geqslant U^{n^{-2}}$ il ne correspond que $2n!c_0 U^{\frac{n-1}{n}}$ de valeurs différentes de m au plus. Or, puisque $q < U^{\frac{1}{n}} < P$, il est permis pour $q > e^{20} + 1$ (et à plus forte raison pour $q \geqslant U^{n^{-2}}$) d'appliquer le lemme II.

On trouve :

$$\left| S_m \right|^r < \frac{T^r P^r}{q^{4n(n-1)}}. \tag{3}$$

Celà étant, il est aisé de prouver que la somme $\sum |S_m|^r$ etendue à toutes les valeurs de m, qui correspondent aux valeurs de $q \geqslant U^{n^{-2}}$, a une valeur :

$$< 2n! c_0 U^{\frac{n-1}{n}} T^r P^r \sum_{q \geqslant U^{n^{-2}}}^{q < U^{n^{-1}}} \frac{1}{q^{4n(n-1)}} < 0{,}001 \cdot P^r.$$

10. Soit maintenant $1 \leqslant q \leqslant U^{n^{-2}}$. Outre la formule (3) qui a lieu pour les $e^{20} + 1 \leqslant q < P$ nous avons encore besoin d'une autre formule, que nous allons maintenant déduire.

Si l'on pose $x = n!c_0 qu - v$, on trouve :

$$S_m = \sum_{v=0}^{v=n!c_0 q - 1} \; \sum_{u=1}^{u=\left[\frac{P+v}{n!c_0 q}\right]} e^{2\pi i \frac{m\Phi(n!c_0 qu - v)}{U}}.$$

Mais

$$\Phi(n!c_0qu - v) = \Phi(-v) + n!c_0qu\Phi'(-v) + \cdots + (n!c_0qu)^n \frac{\Phi^n(-v)}{n!} =$$

$$= (n!c_0q)^n (a_0u^n + a_1u^{n-1} + \cdots + a_n)$$

où $a_0 = c_0$ et tous les coefficients ne dépassent pas $A = 2n!c$ en valeur absolue Posons pour abréger

$$\left[\frac{P+v}{n!c_0q}\right] = P_1\,;\ a_0u^n + a_1u^{n-1} + \cdots + a_n = \varphi(u)\,;\ \Omega = \sum_{u=1}^{u=P_1} e^{2\pi i m \frac{(n!a_0q)^n \varphi(u)}{U}}.$$

Il vient

$$\frac{m(n!c_0q)^n}{U} = a(n!c_0q)^{n-1} + Z, \qquad Z = \frac{\Theta(n!c_0q)^{n-1}}{U^{\frac{1}{n}}}\,; \qquad \Omega = \sum_{u=1}^{u=P_1} e^{2\pi i Z \varphi(u)}.$$

Il est aisé de voir q'une variation de m égale à l'unité entraine une variation de Z égale à

$$h = \frac{(n!c_0q)^n}{U},$$

donc pour tout

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \left[\frac{U^{\frac{n-1}{n}}}{n!c_0q}\right],$$

et pour ces valeurs de l seulement il y a 2 valeurs de m au plus pour lesquelles

$$lh \leqslant |Z| < (l+1)h.$$

Si $q \geqslant T^r$, $l \leqslant q$, nous appliquerons la formule (3) du n° 9. Pour la limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, correspondant à ces conditions on peut évidemment prendre:

$$\sum_{q \geqslant T^r}^{q \leqslant U^{n-2}} \frac{(4q+2)T^rP^r}{q^{4n(n-1)}} n!c_0q < 0{,}001 \cdot P^r.$$

Passons aux sommes restantes. Nous remarquerons d'abord que

$$P_1 > 3n(n-1)c_0(180A)^n.$$

Calculons maintenant la limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, qui correspondent aux conditions $q < T^r$, $l = 0$. Si ces conditions sont satisfaites, on a

$$\frac{n!\,c_0}{P_1{}^n} < \frac{n!\,c_0}{U} \leqslant \left| n!c_0Z \right| < n!\,c_0 \frac{(n!\,c_0q)^n}{U} < \frac{(n-2)!}{3P_1{}^{n-1}}.$$

On peut donc appliquer l'inégalité γ) du lemme IV. On trouve d'abord $|\Omega| < 6U^{\frac{1}{n}}$ et ensuite:

$$\left|S_m\right| < 6U^{\frac{1}{n}} T^r n!c_0 < \frac{6P}{T^r}\,;\ \left|S_m\right|^r < \frac{6^rP^r}{T^{r^2}}.$$

Or, le nombre des sommes de la forme considérée ne surpasse pas T^r. Donc la somme des membres correspondants de la somme Δ sera plus petite que $0{,}001.P^r$.

11. Tous les membres restants de la somme Δ se laissent partager en trois groupes, dont les limites supérieures se laissent evaluer au moyen du lemme IV.

On trouve:

1) $\left|\Omega\right| < 2TP_1(n!c_0Z)^{2^{-n}}$ pour $\dfrac{n!c_0(n!c_0q)^{n-1}}{U^{\frac{1}{n}}} \geqslant \left|n!c_0Z\right| \geqslant \dfrac{1}{P_1}$;

2) $\left|\Omega\right| < TP_1^{1-2^{-n}}$ pour $\dfrac{1}{P_1} \geqslant \left|n!c_0Z\right| \geqslant \dfrac{(n-2)!}{3P^{n-1}}$;

3) $\left|\Omega\right| < 6Z^{-\frac{1}{n}}$ pour $\dfrac{(n-2)!}{3P_1^{n-1}} \geqslant \left|n!c_0Z\right| \geqslant \dfrac{n!c_0\,(n!c_0q)^n}{U}$,

car il est aisé de voir que:

$$e^{-21} > \frac{n!c_0(n!c_0q)^{n-1}}{U^{\frac{1}{n}}}\;;\quad \frac{n!c_0\,(n!c_0q)^n}{U} > \frac{n!c_0}{P_1^n}.$$

Il est aisé de voir aussi, que

dans le cas 1) on a $l \leqslant \dfrac{U^{\frac{n-1}{n}}}{n!c_0}$; $\left|S_m\right| < 4TP\left(\dfrac{n!c_0(n!c_0q)^{n-1}}{U^{\frac{1}{n}}}\right)^{2^{-n}}$;

dans le cas 2) on a $l \leqslant \dfrac{2U}{P(n!c_0q)^{n-1}}$; $\left|S_m\right| < 2TP\left(\dfrac{P}{n!c_0q}\right)^{-2^{-n}}$;

dans le cas 3) on a $l \leqslant 1$ pour $q < T^r$, $l > q$ pour $q \geqslant T^r$ et on a toujours $\left|S_m\right| < \dfrac{6U^{\frac{1}{n}}}{l^{\frac{1}{n}}}$.

Donc la limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, qui correspondent au cas 1), sera

$$U^{n^{-2}}\frac{2U^{\frac{n-1}{n}}}{n!c_0q}(n!c_0q+1)4^rT^rP^r\left(\frac{n!c_0(n!c_0q)^{n-1}}{U^{\frac{1}{n}}}\right)^{4n(n-1)} < 0{,}001.P^r.$$

La limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, qui correspondent au cas 2), sera

$$U^{n^{-2}}\frac{4U}{P(n!c_0q)^{n-1}}(n!c_0q+1)2^rT^rP^r\left(\frac{P}{n!c_0q}\right)^{-4n(n-1)} < 0{,}001\,.P^r.$$

La limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, qui correspondent au cas 3) et à la condition $q < T^r$, sera

$$T^r(n!c_0T^r+1)\,2\sum_{l\geqslant 1}\frac{6^rU^{\frac{r}{n}}}{l^{2^n(n-1)}} < 0{,}001.P^r.$$

Enfin la limite supérieure de la somme des membres de la somme Δ, qui correspondent au cas 3) et à la condition $q \geqslant T^r$, sera

$$\sum_{q \geqslant T^r}^{q \leqslant U^{n^{-2}}} n!c_0 q \cdot 2 \sum_{l \geqslant q} \frac{6^r U^{\frac{r}{n}}}{l^{2^n(n-1)}} < 0{,}001 . P^r.$$

En résumant les résultats des n°n° 9, 10, 11 nous trouverons

$$\Delta < 0{,}006 \cdot P^r < 0{,}01 \cdot P^r.$$

Les résultats trouvés se laissent exprimer comme il suit

Lemme V. *Soit:*

$$\Phi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n ,$$

un polynome à coefficients entiers, dont chacun ne dépasse pas c en valeur absolue, $n \geqslant 2$, $c_0 \geqslant 1$. *Soit encore:*

$$r = 2^{n+2} n(n-1), \quad T = 4(nM)^{2^{-(n-1)}}, \quad M = (4n-4)^{(n-1)e^{4n-4}},$$

U un entier premier avec le produit $c_0 \cdot 1 \cdot 2 \cdots T^r$ *et satisfaisant à la condition:*

$$U \geqslant [(2n!c_0)^{2n} T^{2r}]^{n^2}$$

enfin

$$P = \left[n!c_0 T^{2r} U^{\frac{1}{n}} \right] + 1, \quad S_m = \sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i m \frac{\Phi(x)}{U}} .$$

On a alors l'inégalité

$$\sum_{m=1}^{m=U-1} |S_m|^r < 0{,}01 \cdot P^r.$$

12. Dans ce qui va suivre nous aurons bésoin du lemme suivant:

Lemme VI. *Soit*

$$\Phi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

une fonction entière à coefficients entiers dont chacun ne dépasse pas c en valeur absolue, $n \geqslant 2$, $c_0 \geqslant 1$. *Admettons encore que tous les coefficients du reste de la division de* $\Phi(x)$ *par* $x^p - x$, *où p est un nombre premier quelconque, ne sont pas tous à la fois divisibles par p.*

Alors pour tout Q entier $\geqslant 1$ *et pour tout* $N \geqslant (4nc^2 Q)^n$ *on peut choisir un entier x tel, que* $\Phi(x)$ *soit premier avec Q et*

$$N \leqslant \Phi(x) \leqslant 2N.$$

Soit p un des diviseurs premiers du nombre Q. Si l'on admettait que la congruence $\Phi(x) \equiv 0$ (Mod. p) a lieu pour toutes les valeurs de x, on trouverait d'après le théorème de Lagrange que tous les coefficients du reste de la division de $\Phi(x)$ par $x^p - x$ sont simultanément divisibles par p, ce qui est impossible. Donc à tout diviseur premier p du nombre Q correspond un nombre x_p tel, que $x \equiv x_p$ (Mod. p), $\Phi(x)$ n'est pas divisible par p. En résolvant le système de congruences $x \equiv x_p$ (Mod. p), où p parcourt la suite des diviseurs premiers du nombre Q, nous trouverons un nombre au moins x_0 tel, que pour tout $x \equiv x_0$ (Mod. Q) $\Phi(x)$ sera premier avec Q.

Admettons maintenant que $x \geqslant 6c$. Il est alors aisé de prouver les inégalités

$$\frac{4}{5} c_0 x^n \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{6}{5} c_0 x^n.$$

Pour démontrer le lemme VI il suffit évidemment de démontrer la possibilité de satisfaire aux conditions

$$x \geqslant 6c \,;\; N \leqslant \frac{4}{5} c_0 x^n \,;\; \frac{6}{5} c_0 x^n \leqslant 2N \,;\; x \equiv x_0 \text{ (Mod. } Q),$$

dont la première peut être omise car elle est une conséquence de la seconde. En posant

$$x = x_0 + Qt,\; a = \frac{x_0}{Q},$$

nous pouvons remplacer ces conditions par les suivantes

$$\sqrt[n]{\frac{5N}{4c_0 Q^n}} < a + t \leqslant \sqrt[n]{\frac{5N}{3c_0 Q^n}}$$

où t doit être entier. Or ces conditions sont évidemment satisfaites puisque:

$$\sqrt[n]{\frac{5N}{3c_0 Q^n}} - \sqrt[n]{\frac{5N}{4c_0 Q^n}} \geqslant 4n\left(\sqrt[n]{\frac{5}{3}} - \sqrt[n]{\frac{5}{4}}\right) > 1.$$

13. Soit U un entier $\geqslant 2$, h un autre entier satisfaisant à la condition $0 \leqslant h \leqslant U$ et $\Delta = U^{-1}$. Considérons une fonction périodique $\psi(x)$ de période 1, définie par les égalités:

a) $\psi(x) = U(x - t) - h + 1$, si $t + \Delta(h-1) \leqslant x \leqslant t + \Delta h$, où t est entier;

b) $\psi(x) = h + 1 - U(x - t)$, si $t + \Delta h \leqslant x \leqslant t + \Delta(h+1)$;

c) $\psi(x) = 0$ dans les cas restants.

D'après les régles connues la fonction $\psi(x)$ se laisse représenter par la série trigonométrique suivante:

$$\psi(x) = \Delta + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos 2\pi kx + B_k \sin 2\pi kx)$$

où

$$A_k = \frac{U[2\cos 2\pi kh\Delta - \cos 2\pi k(h-1)\Delta - \cos 2\pi k(h+1)\Delta]}{2\pi^2 k^2};$$

$$B_k = \frac{U[2\sin 2\pi kh\Delta - \sin 2\pi k(h-1)\Delta - \sin 2\pi k(h+1)\Delta]}{2\pi^2 k^2}.$$

Il est aisé de voir que

$$|A_k| \leqslant 2\Delta;\; |B_k| \leqslant 2\Delta;\; |A_k| \leqslant \frac{2U}{\pi^2 k^2};\; |B_k| \leqslant \frac{2U}{\pi^2 k^2}.$$

Si $k \leqslant U$ nous allons nous servir des deux premières de ces inégalités, et si $k > U$ nous aurions recours deux dernières. Il est aisé de voir aussi que dans le cas, où k est divisible par U on a $A_k = B_k = 0$.

Admettons maintenant, que x ne reçoit que des valeurs de la forme $a\Delta$, où a est entier. Dans ce cas, si l'on groupe ensemble les membres du développement de la fonction $\psi(x)$, qui correspondent aux valeurs de k, rentrant dans des progressions arithmétiques de la forme $m + Uz$, où $0 < m < U$, on aura

$$\psi(x) = \Delta + \sum_{m=1}^{m=U-1} (C_m \cos 2\pi m x + D_m \sin 2\pi m x), \tag{4}$$

où

$$|C_m| \leqslant 2\Delta + \sum_{z=1}^{z=\infty} \frac{U}{2\pi^2(m+Uz)^2} < 3\Delta\,; \quad |D_m| < 3\Delta.$$

14. Admettons maintenant que toutes les conditions du lemme V sont satisfaites, et q'en outre, pour tout p premier, tous les coefficients du reste de la division de $\Phi(x)$ par $x^p - x$ ne sont pas simultanément divisibles par p. Considérons une somme r-ple:

$$S = \Sigma\Sigma \cdots \Sigma\psi\left(\frac{\Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_r)}{U}\right),$$

où $x_1, x_2, \ldots x_r$ parcourent les valeurs $1, 2, \ldots P$ indépendamment les uns des autres. En appliquant à cette somme la formule (4) on a

$$S = P^r\Delta + \sum_{m=1}^{m=U-1} (C_m E_m + D_m F_m),$$

où E_m et F_m sont la partie réelle et le coefficient de la partie imaginaire de l'expression $(S_m)^r$ du lemme V. On a donc $|E_m| < 0{,}01 \cdot P^r$, $|F_m| < 0{,}01 \cdot P^r$. En tenant compte des inégalités pour $|C_m|$ et $|D_m|$ on trouve en même temps:

$$S = \Delta P^r(1 + 0{,}06 \cdot \theta)\,; \quad |\theta| < 1.$$

L'égalité obtenue montre que $S > 0$. Or, d'après la définition de la fonction $\psi(x)$ les membres de la somme S, pour lesquelles

$$\frac{\Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_r)}{U} = C + \frac{h}{U},$$

où C est entier, sont seuls différents de 0. Donc, il existe un système de valeurs $x_1, x_2, \ldots x_r$ tel que

$$\Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_r) = CU + h,$$

où C est entier.

D'ailleurs il est aisé de voir que pour $x \leqslant P$ on a $|\Phi(x)| < 2cP^r$. D'où on trouve aisément que

$$-4cr(n!c_0T^{2r})^n < C < 4cr(n!c_0T^{2r})^n.$$

15. Soit maintenant H un entier, satisfaisant à la condition

$$H \geqslant 8cr(n!c_0T^{2r})^n\ (4nc^{2n}T^{r^2})^n.$$

Posons

$$Q = c_0 \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots T^r\,; \quad N \geqslant (4nc^{2n^2}T^{r^2})^n \ [\text{ce qui est} > (4nc^2Q)^n].$$

et soit x' un nombre tel, que $\Phi(x')$ soit premier avec Q et

$$N \leqslant \Phi(x') \leqslant 2N.$$

Si l'on pose alors $\Phi(x') = U$, on aura

$$U \geqslant [(2n!c_0)^{2^n} T^{2r}]^{n^2}.$$

Soit maintenant

$$N = \frac{H}{8cr(n!c_0T^{2r})^n}.$$

Alors

$$N \geqslant (4nc^{2r^2}T^{r^2})^n, \quad 4cr(n!c_0T^{2r})^n \leqslant \frac{H}{U} \leqslant 8cn(n!c_0T^{2r})^n.$$

Donc le quotient C' de la division de H par U sera $> 4cr(n!c_0T^{2r})^n$. Désignons le reste de cette division par la lettre h. En appliquant les résultats du n^o 14 nous verrons qu'il existe un système de nombres $x_1, x_2, \ldots x_r$ tel que

$$\Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_r) = CU + h = C\Phi(x') + h,$$

d'où

(5) $H = C'\Phi(x') + h = (C' - C)\Phi(x') + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_r); \; C' - C \geqslant 0.$

Donc tout nombre entier:

$$H \geqslant 8cr(4nc_0n!c^{2n^2}T^{r^2+2r})^n = K,$$

peut être représenté par une somme, dont les termes sont de la forme $\Phi(x)$ où x est un entier, et dont le nombre ne dépasse pas

$$12cr(n!c_0T^{2r})^n + r = L.$$

Les résultats obtenus se laissent exprimer comme il suit:

Théorème I. *Soit*

$$\Phi(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$$

un polynome à coefficients entiers, dont chacun ne dépasse pas c en valeur absolue, $n \geqslant 2$, $c_0 \geqslant 1$, *et admettons que pour tout p premier tous les coefficients du reste de la division de* $\Phi(x)$ *par* $x^p - x$ *ne sont pas simultanément divisibles par p.*

Alors on peut indiquer deux quantités constantes K et L, complètement déterminées par les nombres c_0, *c et n, telles que tout nombre entier* $H \geqslant K$ *se laisse représenter par une somme de termes de la forme* $\Phi(x)$, *où x est entier, dont le nombre ne dépasse pas L.*

Comme corollaire immèdiat du théorème I on trouve

Théorème II. *Soit*

$$\Phi(x) = c_0x^n + cx^{n-1} + \cdots + c_n$$

un polynome à cofficients rationnels, $n \geqslant 2$, $c_0 > 0$. *Admettons de plus que pour toutes les valeurs de x cette fonction reçoit des valeurs entières, et soit d le plus grand entier tel, que la congruence* $\Phi(x) \equiv 0$ (Mod. *d*) *soit satisfaite par toutes les valeurs de x.*

Alors on peut indiquer deux quantités constantes V et W, complètement déterminées par la forme de la fonction $\Phi(x)$, *tels que tout nombre entier* $H \geqslant V$

multiple de d se laisse représenter par une somme de termes de la forme $\Phi(x)$, où x est un entier, et dont le nombre ne dépasse pas W.

Nous obtiendrons ce théorème en appliquant le théorème I à la fonction

$$F(z) = \frac{\Phi(x' + z\delta d)}{d},$$

où δ est le produit des diviseurs premiers différents du nombre d, et x' un entier tel que le quotient

$$\frac{\Phi(x')}{d}$$

est premier avec d.

N o t e. Dans le cas, où $\Phi(x) = x^n$ on peut remplacer le nombre L du théorème I par un nombre plus petit, en partageant la différence $C' - C$ de la formule (5) en parties de la forme x^n.

Об одной общей теореме Варинга.

И. М. Виноградов (Ленинград).

(Резюме.)

В этой работе дается новый метод решения вопросов, поставленных В а р и н г о м и разрабатывавшихся в последнее время Г и л ь б е р т о м, Л а н д а у и др.; вместе с тем дается доказательство наиболее общего утверждения В а р и н г а о представимости целого числа суммою значений целого многочлена с рациональными коэффициентами.
