Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Я. П. Лумельский, Л. М. Цирульникова, Вероятностное доказательство комбинаторных тождеств,
Изв. вузов. Матем., 1976, номер 7, 52–55

https://www.mathnet.ru/ivm6181

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.171
20 января 2026 г., 06:14:04

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1976 МАТЕМАТИКА № 7 (170)

УДК 519.24

Я. П. Лумельский, Л. М. Цирульникова

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОМБИНАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ

Тождества, доказываемые комбинаторными методами, используются в веротностной теории (см. [1], [2]). С другой стороны, вероятностные методы позволяют получать комбинаторные тождества, доказательство которых при ином подходе связано со значительными трудностями (см. [3], [4]).

В настоящей работе на основе общей схемы случайных блужданий, предложенной в [5], получены некоторые комбинаторные тождества.

Ниже доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть m_i — натуральные числа, $i=\overline{1, l}$, α — некоторое действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha\sum_{i=1}^{l} m_i \geqslant -1$, а числа $p_i (i=\overline{1, l})$ таковы, что $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$. Тогда верно следующее тождество:*

$$\sum_{h=1}^{l}\left\{\sum_{t_1=0,\dots,t_l=0}^{m_1,\dots,m_l}{}^{\bar h} \frac{\left(m_h+\sum_{s=1}^{l}{}_{\bar h} t_s\right)!}{m_h!\prod_{s=1}^{l}{}_{\bar h} t_s!}\,\frac{\prod_{j=0}^{m_h}(p_h+\alpha j)\prod_{s=1}^{l}{}_{\bar h}\prod_{j=0}^{t_s-1}(p_s+\alpha j)}{\prod_{j=0}^{m_h+\sum_{s=1}^{l}{}_{\bar h} t_s}(1+\alpha j)}\right\}=1, \qquad (1)$$

где $\Pi_{\bar h}$, $\Sigma_{\bar h}$ соответственно означают, что произведение и сумма берутся по всем индексам, за исключением h, а $\prod_{j=0}^{t_s-1}(p_s+\alpha j)=1$, если $t_s=0$.

Предположения теоремы о неотрицательности величин p_i $(i=\overline{1, l})$ могут быть ослаблены; они связаны лишь с веротностным методом доказательства.

Пусть в формуле (1) $\alpha=0$, а $p_i=a_i\Big/\sum_{i=1}^{l} a_i$, $i=\overline{1, l}$, где действительные числа $a_i (i=\overline{1, l})$ одного знака. Тогда получим в качестве следствия тождество

$$\sum_{h=1}^{l}\left\{\sum_{t_1=0,\ldots,t_l=0}^{m_1,\ldots,m_l}{}_{\bar h}\frac{\left(m_h+\sum\limits_{s=1}^{l}{}_{\bar h}t_s\right)!}{m_h!\prod\limits_{s=1}^{l}{}_{\bar h}t_s!}\times\right.$$

$$\times a_h^{m_h+1}\prod_{s=1}^{l}{}_{\bar h}a_s^{t_s}\left(\sum_{s=1}^{l}a_s\right)^{\sum\limits_{s=1}^{l}{}_{\bar h}(m_s-t_s)}=\left(\sum_{s=1}^{l}a_s\right)^{\sum\limits_{s=1}^{l}m_s+1}. \tag{2}$$

Тождества, доказанные в работе [2] (см. теоремы 1 и 2) комбинаторными методами при более общих предположениях относительно $a_1,\ldots,a_l$, совпадают с формулой (2), если $l=r+1$, а в случае теоремы 1 [2], кроме того, $m_i=m$, $i=\overline{0,r}$.

Пусть в формуле (1)

$$\alpha=\frac{1}{N},\quad p_i=\frac{N_i}{N},\quad i=\overline{1,l};\quad \sum_{i=1}^{l}N_i=N, \tag{3}$$

где N_i — целые неотрицательные числа. Тогда получим следующее тождество:

$$\sum_{h=1}^{l}N_h\binom{N_h-1}{m_h}\sum_{t_1=0,\ldots,t_l=0}^{m_1,\ldots,m_l}{}_{\bar h}\frac{\prod\limits_{s=1}^{l}{}_{\bar h}\binom{N_s}{t_s}}{\binom{N-1}{m_h+\sum\limits_{s=1}^{l}{}_{\bar h}t_s}}=N. \tag{4}$$

Аналогично, полагая

$$\alpha=\frac{1}{\beta},\quad p_i=\frac{\beta_i}{\beta},\quad \beta_i\leqslant\beta,\quad \sum_{i=1}^{l}\beta_i=\beta, \tag{5}$$

преобразуем выражение (1) в тождество для бета-функций:

$$\sum_{h=1}^{l}\sum_{t_1=0,\ldots,t_l=0}^{m_1,\ldots,m_l}{}_{\bar h}\frac{B\left(\beta,m_h+\sum\limits_{s=1}^{l}{}_{\bar h}t_s+1\right)}{B(\beta_h,m_h+1)}\prod_{s=1}^{l}{}_{\bar h}\frac{1}{t_sB(\beta_s,t_s)}=1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть n — целое положительное число, α — действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha n\geqslant-1$, а числа $p_i\,(i=\overline{1,l})$ таковы, что $0\leqslant p_i\leqslant1$, $\sum\limits_{i=1}^{l}p_i=1$. Тогда верно следующее тождество:*

$$\sum_{\substack{t_1=0,\ldots,t_{l-1}=0\\ \sum\limits_{s=1}^{l}t_s=n}}^{n}\prod_{s=1}^{l}\frac{\prod\limits_{j=0}^{t_s-1}(p_s+\alpha j)}{t_s!}=\frac{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(1+\alpha j)}{n!}. \tag{7}$$

В частном случае при $\alpha = 0$ формула (7) сводится к известному соотношению

$$\sum_{\substack{t_1=0,\ldots,t_{l-1}=0\\ \sum_{s=1}^{l} t_s=n}}^{n} \prod_{s=1}^{l} \frac{p_s^{t_s}}{t_s!} = \frac{1}{n!}. \tag{8}$$

При выполнении условий (3) тождество (7) принимает следующий вид:

$$\sum_{\substack{t_1=0,\ldots,t_{l-1}=0\\ \sum_{s=1}^{l} t_s=n}}^{n} \binom{N-\sum_{s=1}^{l-1} N_s}{n-\sum_{s=1}^{l-1} t_s} \prod_{s=1}^{l-1} \binom{N_s}{t_s} = \binom{N}{n}. \tag{9}$$

Формула (9), устанавливающая связь между сочетаниями, является обобщением известного тождества Вандермонда, непосредственно следующего из (9) при $l = 2$.

Наконец, задание α и p_i через условия (5) превращает соотношение (7) в тождество для бета-функций:

$$\sum_{\substack{t_1=0,\ldots,t_{l-1}=0\\ \sum_{s=1}^{l} t_s=n}}^{n} \prod_{s=1}^{l} \frac{1}{t_s B(\beta_s, t_s)} = \frac{1}{nB(\beta, n)}. \tag{10}$$

Для доказательства теорем 1 и 2 рассмотрим в l-мерном евклидовом пространстве случайное блуждание точки из начала координат вдоль осей $OT_i (i = \overline{1, l})$ в точки с неотрицательными целочисленными координатами (см. [5]). Пусть вероятность того, что за первый шаг частица, выходящая из начала координат, продвинется на единицу по оси OT_i, равна $p_i \left(0 < p_i < 1,\ i = \overline{1, l},\ \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\right)$, а вероятность перехода за один шаг из точки $D_1(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_l)$ в точку $D_2(t_1, t_2, \ldots, t_i + 1, \ldots, t_l)$ равна $(p_i + \alpha t_i)/(1 + \alpha\tau(D_1))$, где $\tau(D_1)$ обозначает сумму координат точки D_1, а α — некоторый скалярный параметр.

При сделанных выше предположениях вероятность перехода из начала координат в любую достижимую точку $F(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ (по поводу понятия „достижимая точка" и ряда других понятий см. [6], гл. 12) имеет следующий вид:

$$P_{p,\alpha}(O, F) = K(O, F) \frac{\prod_{s=1}^{l} \prod_{j=0}^{t_s-1} (p_s + \alpha j)}{\prod_{j=0}^{\tau(F)-1} (1 + \alpha j)}, \tag{11}$$

где $K(A, C)$ — число различных траекторий в области блужданий, соединяющих точки A и C.

Для замкнутого плана с границей остановки G в параметрической области замкнутости плана верно соотношение

$$\sum_{\Gamma \in G} P_{p,\alpha}(O, \Gamma) = 1. \tag{12}$$

Ограниченный план замкнут при всех $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ $(i = \overline{1, l-1})$ и при любых α таких, что выражения (11) неотрицательны.

Пусть граница остановки G имеет вид l-мерного параллелепипеда (планы с такой границей рассмотрены в [7]), ограниченного координатными плоскостями и плоскостями $t_i = m_i + 1$, где m_i — целые положительные числа. Условие $\alpha \sum_{i=1}^{l} m_i \geqslant -1$ обеспечивает неотрицательные выражения (11). Соотношение (12) для такой границы и дает теорему 1.

В случае границы G: $\sum_{i=1}^{l} t_i = n$, где n — натуральное число, из формулы (12) следует теорема 2.

Формула (11) и теорема 3 работы [5] о несмещенных оценках позволяют получить другие комбинаторные тождества, если рассмотреть планы, отличные от использованных выше.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М., „Мир", 1964.

2. Сарманов О. В., Севастьянов Б. А., Тараканов В. Е. Некоторые комбинаторные тождества. Матем. заметки, т. 11, № 1, 1972, с. 121—127.

3. Dubey S. D. Statistical solutions of a combinatorial problem. Amer. Statist., v. 19, № 4, 1965, p. 30—31.

4. Rubin E. Some usebul formulas relating to profability theory. Amer. Statist., v. 19, № 4, 1965, p. 37—38.

5. Лумельский Я. П. Случайные блуждания, отвечающие обобщенным урновым схемам. ДАН СССР, т. 209, № 6, 1973, с. 1281—1284.

6. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., „Наука", 1972.

7. Лумельский Я. П. Несмещенные оценки для укороченных планов статистического контроля типа последовательного анализа. В сб. „Адаптивные системы. Большие системы". М., „Наука", 1971, с. 206—212.

г. Пермь

Поступила
28 XI 1972