Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

L. M. Simuni, Motion of a viscous incompressible fluid in a plane pipe,
*Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1965, Volume 5, Number 6, 1138–1141

https://www.mathnet.ru/eng/zvmmf8510

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
July 9, 2025, 22:39:44

Рассмотрение полученного класса функций показывает, что не всякая $\psi(\Delta t)$, удовлетворяющая условию (8), одновременно удовлетворяет и условию (9). Так, например, $\psi(\Delta t) = -\ln \Delta t$, $\psi(\Delta t) = \sqrt{-\ln \Delta t}$, удовлетворяют условию (9), а $\psi(\Delta t) = \ln \ln (1 / \Delta t)$ и $\psi(\Delta t) = \sqrt{\ln \ln (1 / \Delta t)}$ уже ему не удовлетворяют.

Но легко проверить, что

$$\psi(\Delta t) = b\Delta t^{-\alpha} \tag{21}$$

удовлетворяет (8) и (9) при любом $\alpha > 0$ и $b > 0$.

Отсюда и из (7) следует, что порядок ширины зоны влияния сколько угодно близок к $\Delta t^{1/2}$.

Все известные явные разностные схемы для уравнения теплопроводности имеют условие устойчивости вида

$$\Delta x \geqslant B\Delta t^{1/2}, \qquad B > 0. \tag{22}$$

Сравнивая (7) и (21) с условием (22), мы видим, что условие (22), являясь, с одной стороны, свойством разностной схемы, также соответствует закономерностям распространения тепла, которые описываются точным решением задачи (1), (2).

*Поступила в редакцию*
*6.07.1964*

**Цитированная литература**

1. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II. М.— Л., Гостехиздат, 1952.

---

УДК 517.9 : 532

# ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ

*Л. М. СИМУНИ*

*(Ленинград)*

В работах по исследованию развития профиля скорости в плоской трубе обычно используются приближенные уравнения движения, справедливые для больших чисел Рейнольдса (см. [1] — [4]). Представляет интерес сравнение решения приближенных уравнений и решения полных уравнений Навье — Стокса. Приближенные уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad P = P(\xi) \end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \qquad v = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } \eta = 1,$$
$$u = 1 \text{ при } \xi = 0 \qquad (0 < \eta < 1).$$

В системе (1) введены обозначения $u = v_x / V$, $v = v_y \operatorname{Re} / V$, $\xi = x / h \operatorname{Re}$, $\eta = y / h$, $P = p / \rho V^2$, $\operatorname{Re} = Vh / \nu$, $V = \text{const}$, $h$ — ширина канала. Для решения уравнения (1) воспользуемся методом конечных разностей (см. [3] — [4]), причем используем условие, определяющее расход жидкости:

$$\int_0^1 u\, d\eta = 1. \tag{2}$$

Заменяя производные конечноразностными отношениями, получим разностную систему

$$u_{i+1,\,k+1}-\left[2+\frac{u_{i,\,k}(\Delta\eta)^2}{\Delta\xi}\right]u_{i+1,\,k}+u_{i+1,\,k-1}=$$

$$=-\frac{u_{i,\,k}^2(\Delta\eta)^2}{\Delta\xi}+v_{i,\,k}\frac{(u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k-1})\Delta\eta}{2}+\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_{i+1}(\Delta\eta)^2,$$

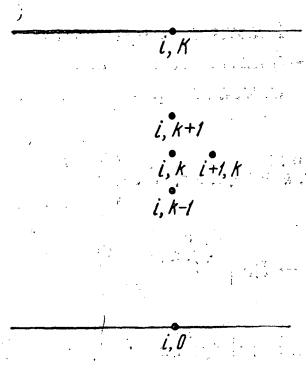
$$\Delta\eta\left(\frac{1}{2}u_{i+1,\,0}+u_{i+1,\,1}+\ldots+u_{i+1,\,K-1}+\frac{1}{2}u_{i+1,\,K}\right)=1, \tag{3}$$

$$v_{i+1,\,k+1}=v_{i+1,\,k}-\frac{\Delta\eta}{2\Delta\xi}(u_{i+1,\,k+1}+u_{i+1,k}-u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k})$$

с нулевыми краевыми условиями. Расположение точек показано на фиг. 1. Второе уравнение системы (3) получено заменой интеграла в формуле (2) суммой по квадратурной формуле. Аналогичная разностная схема использовалась в работе [3]. Ищем решение в виде

$$u_{i+1,\,k}=z_{i+1,\,k}+\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_{i+1}w_{i+1,\,k}, \tag{4}$$

причем величины $z_{i+1,\,k}$ и $w_{i+1,\,k}$ удовлетворяют уравнениям



Фиг. 1

$$z_{i+1,\,k+1}-\left[2+\frac{u_{i,\,k}(\Delta\eta)^2}{\Delta\xi}\right]z_{i+1,\,k}+z_{i+1,\,k-1}= \tag{5}$$

$$=-\frac{u_{i,\,k}^2(\Delta\eta)^2}{\Delta\xi}+v_{i,\,k}\frac{(u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k-1})\Delta\eta}{2},$$

$$w_{i+1,\,k+1}-\left[2+\frac{u_{i,\,k}(\Delta\eta)^2}{\Delta\xi}\right]w_{i+1,\,k}+w_{i+1,\,k-1}=(\Delta\eta)^2 \tag{6}$$

с нулевыми граничными условиями. Если $u_{i,\,k}$, $v_{i,\,k}$ известны, то, решая уравнения (5) и (6), находим $z_{i+1,\,k}$ и $w_{i+1,\,k}$. Подставляя (4) во второе уравнение (3), находим, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_{i+1}=\frac{1-\Delta\eta\left(\frac{1}{2}z_{i+1,\,0}+z_{i+1,\,1}+\ldots+z_{i+1,\,K-1}+\frac{1}{2}z_{i+1,\,K}\right)}{\Delta\eta\left(\frac{1}{2}w_{i+1,\,0}+w_{i+1,\,1}+\ldots+w_{i+1,\,K-1}+\frac{1}{2}w_{i+1,\,K}\right)}.$$

Таким образом определяются $(\partial P/\partial\xi)_{i+1}$ и (по формуле (4)) величины $u_{i+1,\,k}$. После этого по третьему уравнению (3) определяем $v_{i+1,\,k}$.

Разностные уравнения (5) и (6) решались методом прогонки.

Развитие профиля скорости в плоской трубе также исследовалось при помощи численного решения полных уравнений Навье — Стокса методом установления. Введением функции тока система уравнений Навье — Стокса приводится к виду

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial\bar{x}}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial\eta}\right)=\nabla^2(\nabla^2\psi). \tag{7}$$

Функция $\psi$ связана с безразмерной скоростью соотношениями $u=\partial\psi/\partial\eta$, $v=-\partial\psi/\partial\bar{x}$, $\bar{x}=x/h$, $\nabla^2$ — оператор Лапласа. Решаем уравнение (7) так же, как это сделано в [5] для некоторых других задач движения вязкой жидкости. Заме-

няем уравнение (7) системой

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)=\nabla^2\varphi,\qquad \nabla^2\psi=\varphi. \tag{8}$$

Систему (8) решаем при краевых условиях

$$\psi=(1-e^{-k\tau})\eta,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}=0\qquad \text{при } \bar{x}=0;$$

$$\psi=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0\qquad \text{при } \eta=0;$$

$$\psi=1-e^{-k\tau},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0\qquad \text{при } \eta=1.$$

Величина $1-e^{-k\tau}$ введена в краевое условие для смягчения установления, $\tau$ — фиктивное время. В расчетах принималось $k=1$.

Заменяя производные конечноразностными отношениями, получим систему

$$\varphi_{i,k}^{n+1}=\varphi_{i,k}^{n}+\Delta\tau\left\{\frac{\varphi_{i,k+1}^{n}+\varphi_{i,k-1}^{n}}{(\Delta\eta)^2}+\frac{\varphi_{i+1,k}^{n}+\varphi_{i-1,k}^{n}}{(\Delta\bar{x})^2}-\frac{2[(\Delta\bar{x})^2+(\Delta\eta)^2]}{(\Delta\bar{x})^2(\Delta\eta)^2}\varphi_{i,k}^{n}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{Re}\left(\frac{\psi_{i,k+1}^{n}-\psi_{i,k-1}^{n}}{2\Delta\eta}\,\frac{\varphi_{i+1,k}^{n}-\varphi_{i-1,k}^{n}}{\Delta\bar{x}}-\frac{\psi_{i+1,k}^{n}-\psi_{i-1,k}^{n}}{2\Delta\bar{x}}\,\frac{\varphi_{i,k+1}^{n}-\varphi_{i,k-1}^{n}}{2\Delta\eta}\right)\right\},$$

$$(\psi_{i,k+1}^{n+1}+\psi_{i,k-1}^{n+1})(\Delta\bar{x})^2+(\psi_{i+1,k}^{n+1}+\psi_{i-1,k}^{n+1})(\Delta\eta)^2-$$

$$-2[(\Delta\bar{x})^2+(\Delta\eta)^2]\psi_{i,k}^{n+1}=\varphi_{i,k}^{n+1}(\Delta\bar{x})^2(\Delta\eta)^2 \tag{9}$$

$$(\tau_n=n\Delta\tau,\qquad \bar{x}_i=i\Delta\bar{x},\qquad \eta_k=k\Delta\eta).$$

Примем, что при $\bar{x}\to\infty$ устанавливается не зависящий от $\bar{x}$ профиль скорости, т. е. что при $\bar{x}\to\infty$ система (8) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\varphi_\infty}{\partial\eta^2},\qquad \frac{\partial^2\psi_\infty}{\partial\eta^2}=\varphi_\infty \tag{10}$$

с теми же, что и для системы (8), краевыми условиями по $\eta$. Разностный аналог системы (10) имеет вид

$$\varphi_{\infty,k}^{n+1}=\varphi_{\infty,k}^{n}+\Delta\tau\frac{\varphi_{\infty,k+1}^{n}+\varphi_{\infty,k-1}^{n}-2\varphi_{\infty,k}^{n}}{(\Delta\eta)^2},$$

$$\varphi_{\infty,k+1}^{n+1}+\psi_{\infty,k-1}^{n+1}-2\psi_{\infty,k}^{n+1}=\varphi_{\infty,k}^{n+1}(\Delta\eta)^2. \tag{11}$$

Если в некоторый момент времени $\tau_n$ величины $\varphi_{i,k}^{n}$, $\psi_{i,k}^{n}$ известны, из первого уравнения (9) находим $\varphi_{i,k}^{n+1}$, а из решения второго уравнения (9) — величины $\psi_{i,k}^{n+1}$. При определении $\psi_{i,k}^{n+1}$ краевым условием при некотором $i=I$ служат значения $\psi_{\infty,k}^{n+1}$, найденные из системы (11). Второе уравнение (9) решалось итерациями по Зейделю. Значения величин $\varphi_{i,k}^{n+1}$ на границе определялись по формулам, полученным в [6], которые для границы $\eta=0$ имеют вид $\varphi_{i,0}^{n+1}=2\psi_{i,1}^{n+1}/(\Delta\eta)^2$ (принято $\psi_{i,0}=0$). Число $I$ выбирается так, чтобы его увеличение с заданной точностью не сказывалось на результатах.

При выходе на стационарный режим давление определялось численно, исходя из формулы

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right).$$

На фиг. 2 показаны некоторые результаты, из которых видно, что при малых числах Рейнольдса в начальном участке существуют значительные осевые перепады давления. Этот результат совпадает с выводом работы [7]. В таблице приведены значения величины $l = x / \mathrm{Re}\, h$, начиная с которой скорость на оси отличается от своего предельного по $x$ значения меньше чем на 2%. Из расчетов, проведенных для системы (1), следует, что $l \approx 0.03$.

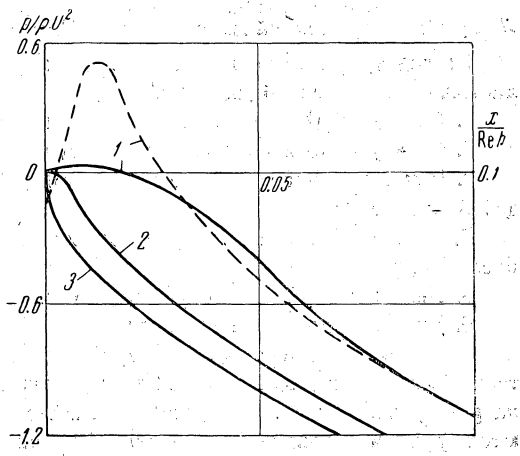
| Re | 1 | 10 | 50 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | 0.6 | 0.07 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.03 |

Видно, что приближенные уравнения движения справедливы начиная с $\mathrm{Re} \approx 100$.

При расчетах в системе (3) принималось $\Delta\eta = 0.05$, $\Delta\xi = 0.002$. Дальнейшее дробление шагов в трех значащих цифрах результата не меняло.

Расчеты для системы (9) проводились при $\Delta\eta = 0.1$ и 0.05 для $\Delta\bar{x} / \mathrm{Re} = 0.005$ и 0.003, причем принималось $I = 20$ и 25. При таком изменении числа $I$ результаты сколько-нибудь заметно не менялись; при изменении величин $\Delta\eta$ и $\Delta\bar{x}$ значения функции тока менялись на 4—6%, но величина начального участка практически не менялась. Для сохранения устойчивости счета принималось $\Delta\tau = A(\Delta\bar{x})^2$, где $A$ подбиралось экспериментально (от $1/4$ до $1/16$, в зависимости от числа Re).

В качестве «начальных» значений при $\mathrm{Re} = 1$ и $\mathrm{Re} = 10$ принимались нулевые значения функции тока, а при остальных числах Рейнольдса — значения функции тока для ближайшего числа Рейнольдса.




Фиг. 2. *1* — Re = 10, решение уравнения (7), ——— для $y / h = 0.5$, — — — для $y / h = 0.2$; *2* — Re = 100, решение уравнения (7); *3* — из решения системы (1)

Все расчеты выполнены на машине БЭСМ-2 Вычислительного центра Ленинградского отделения Математического института АН СССР.

Автор благодарен Л. А. Чудову за внимание к данной работе.

*Поступила в редакцию*
*31.08.1964*

**Цитированная литература**

1. Л. С. Лейбензон. Руководство по нефтепромысловой гидравлике. Ч. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1931.
2. С. М. Тарг. Основные задачи теории ламинарных течений. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
3. I. R. Bodoia, I. F. Osterle. Finite difference analysis of plane Poiseuille and Couette flow developments. Appl. Scient. Res., 1961, **A10**, № 3—4, 265—276.
4. Л. М. Симуни. Численное решение некоторых задач движения жидкости с переменной вязкостью. В сб. «Тепло и массоперенос». Т. 5. Минск, Изд-во АН БССР, 1963, 216—222.
5. Л. М. Симуни. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инж. ж., 1964, 4, вып. 3, 446—450.
6. A. Tom, C. Appelt. Field computation in engeneering and physics. New York — London, Van Nostrand, 1961.
7. P. A. Longwell. Laminnar flow in the inlet section of parallel plates. Amer. Inst. Chem. Engng J., 1964, **10**, № 3, 323—329.