

ПРИЗНАК КОМПАКТНОСТИ СЛОЕНИЯ

И. А. Мельникова

В статье изучаются слоения на гладких компактных многообразиях, определяемые замкнутой 1-формой с морсовскими особенностями. Задача об изучении топологической структуры поверхностей уровня таких форм была поставлена С. П. Новиковым в работе [1]. Этот вопрос изучался в работах [2]–[5]. В данной статье исследуется проблема компактности поверхностей уровня, вводится понятие степени компактности слоения и в этих терминах доказывается признак компактности.

В пункте 1 приводятся необходимые далее определения и вводится понятие степени компактности слоения. Основной результат работы – признак компактности слоения морсовской формы – доказывается в пункте 2. В пункте 3 рассматриваются некоторые следствия: связь степени компактности слоения и степени иррациональности формы, а также, более подробно, двумерный случай.

Настоящая работа является естественным продолжением [6].

1. Предварительные определения. Рассмотрим гладкое компактное n -мерное многообразие M и определенную на нем замкнутую 1-форму ω , обладающую невырожденными изолированными особенностями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [7]. Точка $p \in M$ называется *регулярной особенностью* ω , если в некоторой окрестности $O(p)$ $\omega = df$, где f – функция Морса, имеющая особенность в p . Следовательно, существуют координаты x^1, \dots, x^n такие, что в этой окрестности

$$\omega = \sum_{i=1}^k x_i dx^i - \sum_{i=k+1}^n x_i dx^i.$$

Число $\min(k, n - k)$ называется *индексом* особой точки.

Форма ω определяет на множестве $M - \text{Sing } \omega$ слоение \mathcal{F}_ω коразмерности 1. Если индекс особой точки P равен нулю, то некоторая окрестность P слоится на сферы. Если $\text{ind } P = 1$, то существует слой, который может

быть сделан локально линейно связанным добавлением к нему особенности P . Он называется коническим слоем. Если $\text{ind } P > 1$, тогда все слои в окрестности P локально линейно связанны.

Слоение \mathcal{F}_ω состоит из трех типов слоев [7]:

- 1) компактные слои, допускающие окрестность, состоящую из диффеоморфных слоев;
- 2) конические слои, т.е. слои, которые могут быть сделаны локально линейно связанными около особенности индекса 1 добавлением этой особенности к слою;
- 3) оставшиеся некомпактные слои.

В дальнейшем мы будем считать, что особая точка P принадлежит слою и канонические слои являются, таким образом, линейно связанными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим γ – компактный слой \mathcal{F}_ω и отображение $\gamma \rightarrow [\gamma] \in H_{n-1}(M)$. Тогда образ множества компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее H_ω и назовем $\text{rk } H_\omega$ степенью компактности слоения \mathcal{F}_ω .

Поскольку $H_\omega \subseteq H_{n-1}(M)$, то $0 \leq \text{rk } H_\omega \leq \beta_{n-1}$, где $\beta_{n-1} = \text{rk } H_{n-1}(M)$. Если все слои \mathcal{F}_ω некомпактны, то $\text{rk } H_\omega = 0$. Обратное неверно: могут существовать компактные слои, гомологичные нулю. Более того, существуют компактные слоения с $\text{rk } H_\omega = 0$. Для этого достаточно рассмотреть многообразие с условием $H_{n-1}(M) = 0$. Очевидно, слоение всякой замкнутой формы компактно и все слои гомологичны нулю.

Рассмотрим группу $H_{n-1}(M)$ и операцию пересечения гомологических классов $H_{n-1}(M) \times H_{n-1}(M) \rightarrow H_{n-2}(M)$, определенную следующим образом [8].

Пусть $x, y \in H_{n-1}(M)$, D – оператор двойственности Пуанкаре, тогда $x \circ y = Dx \cap y$. Если гомологические классы x и y реализуются подмногообразиями X и Y , то $x \circ y$ представляет собой гомологический класс $X \cap Y$. Эта операция обладает свойством косо́й симметрии: $x \circ y = -y \circ x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рассмотрим подгруппу $H \subset H_{n-1}(M)$ такую, что $\forall x, y \in H \quad x \circ y = 0$. Назовем H *изотропной подгруппой* относительно операции пересечения циклов. Изотропная подгруппа H называется *максимальной*, если $\forall x \in H$ и $\forall y \notin H \quad x \circ y \neq 0$.

Очевидно, подгруппа компактных слоев H_ω является изотропной подгруппой в $H_{n-1}(M)$.

Обозначим через M_ω множество, полученное выбрасыванием всех максимальных окрестностей, состоящих из диффеоморфных компактных слоев и всех слоев, которые могут быть компактифицированы добавлением особых точек.

2. Основная теорема. Докажем следующий признак.

ТЕОРЕМА. Если подгруппа H_ω , порожденная компактными слоями, является максимальной изотропной подгруппой в $H_{n-1}(M)$, то $M_\omega = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подгруппа H_ω имеет максимальный ранг, и $H_\omega = \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_N] \rangle$, где γ_i — слои \mathcal{F}_ω . Разрезая M по слоям $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, получим M' — многообразие с краем.

Пусть $\varphi: M' \rightarrow M$ — отображение склейки, $i: \partial M' \rightarrow M'$ — отображение вложения края.

ЛЕММА 1. Если H_ω — максимальная изотропная подгруппа, то отображение $i_*: H_{n-1}(\partial M') \rightarrow H_{n-1}(M')$ сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение склейки $\varphi: M' \rightarrow M$ индуцирует отображение пар $\varphi: (M', \partial M') \rightarrow (M, \cup \gamma_i)$. Обозначим $\varphi|_{\partial M'} = \varphi_*$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\partial M') & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(M') \\ \downarrow \varphi_{1*} & & \downarrow \varphi_* \\ H_{n-1}(\cup \gamma_i) & \xrightarrow{j} & H_{n-1}(M). \end{array}$$

Покажем, что: 1) отображение j инъективно, 2) φ_{1*} сюръективно, 3) $\ker \varphi_* \subset \text{im } i_*$.

1) Поскольку слои γ_i не пересекаются: $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, то из последовательности Майера–Виеториса получим:

$$H_{n-1}(\cup \gamma_i) = \oplus H_{n-1}(\gamma_i).$$

По предположению циклы $[\gamma_i]$ независимы в M , следовательно,

$$\oplus H_{n-1}(\gamma_i) = \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_N] \rangle = H_\omega$$

и отображение $j: H_\omega \rightarrow H_{n-1}(M)$ является вложением.

2) Поскольку $\varphi(\partial M') = \cup \gamma_i$, то φ_{1*} сюръективно.

3) Если $\varphi_* z' = 0$, то $\varphi(z') = \partial S$, где $S \subset M$. При разрезании S ограничивают z' и те γ_i , для которых $S \cap \gamma_i \neq \emptyset$. Таким образом, $z' \in \text{im } i_*$.

Рассмотрим $z' \in H_{n-1}(M')$, тогда $z' \cap \partial M' = \emptyset$, следовательно, $\varphi(z') \cap \gamma_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, N$, и значит, $\varphi_* z' \circ \gamma_i = 0$, $i = 1, \dots, N$. По условию H_ω максимальна, следовательно, $\varphi_* z' \in H_\omega$. Поскольку

$j: H_\omega \rightarrow H_{n-1}(M)$ вложение, то существует $z \in j^{-1}(\varphi_* z')$. Отображение φ_{1*} сюръективно, значит, элемент z имеет прообраз в $H_{n-1}(\partial M')$: $z_0 = \varphi_*^{-1}(z)$. Тогда в силу коммутативности диаграммы:

$$\varphi_* i_* z_0 = j \varphi_{1*} z_0 = j(z) = \varphi_* z'.$$

Следовательно, $z' - i_* z_0 \in \ker \varphi_*$. В силу доказанного выше, $\ker \varphi_* \subset \text{im } i_*$, значит, $z' - i_* z_0 \in \text{im } i_*$ и $z' \in \text{im } i_*$. Следовательно, отображение i_* сюръективно. Лемма доказана.

Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$0 \rightarrow Z \rightarrow H_{n-1}(\partial M') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M') \rightarrow 0,$$

где $Z = \ker i_*$, и применим к ней функтор $\otimes \mathbb{R}$, который является ковариантным и точным справа [8]. Получим точную последовательность:

$$Z \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_{n-1}(\partial M') \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{i_R} H_{n-1}(M') \otimes \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

где отображение i_R также сюръективно.

Согласно теореме об универсальных коэффициентах $H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M) \otimes \mathbb{R}$. Таким образом, из леммы 1 следует, что для гомологий с коэффициентами в \mathbb{R} отображение

$$i_*: H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-1}(M', \mathbb{R})$$

тоже сюръективно.

ЛЕММА 2. Пусть $i: \partial M' \rightarrow M$ отображение вложения. Если отображение $i_*: H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-1}(M', \mathbb{R})$ сюръективно, то отображение $j: H_1(\partial M', \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M', \mathbb{R})$ также сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму (гомологии с коэффициентами в \mathbb{R}):

$$\begin{array}{ccc} H_1(M', \partial M') & \xrightarrow{\partial} & H_0(\partial M') \\ \downarrow D & & \downarrow D \\ H^{n-1}(M', \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_*} & H^{n-1}(\partial M', \mathbb{R}). \end{array} \quad (1)$$

Здесь D – оператор двойственности Пуанкаре для многообразия с краем. По условию, отображение $i_*: H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-1}(M', \mathbb{R})$ сюръективно.

Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$0 \rightarrow Z \rightarrow H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M', \mathbb{R}) \rightarrow 0,$$

где $Z = \ker i_*$. Поскольку $H^{n-1}(\partial M', \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}), \mathbb{R})$ и, аналогично, $H^{n-1}(M', \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_{n-1}(M', \mathbb{R}), \mathbb{R})$, то применим к этой последовательности функтор $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{R})$, который является контрвариантным и точным справа [8]. Получим точную последовательность:

$$\text{Hom}(Z, \mathbb{R}) \leftarrow \text{Hom}(H_{n-1}(\partial M', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \xleftarrow{i_*} \text{Hom}(H_{n-1}(M', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \leftarrow 0,$$

из которой следует, что отображение i_* инъективно. Тогда в диаграмме (1) $\ker \partial = 0$.

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары

$$\rightarrow H_1(\partial M') \xrightarrow{j} H_1(M') \xrightarrow{l} H_1(M', \partial M') \xrightarrow{\partial} H_0(\partial M') \rightarrow.$$

Так как $\ker \partial = \text{im } l = 0$, то $\ker l = H_1(M')$. Поскольку $\text{im } j = \ker l = H_1(M')$, то отображение j сюръективно. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим отображение $\varphi: M' \rightarrow M$ и $\omega' = \varphi^*\omega$ — ограничение ω на M' . Для всякого $z' \in H_1(M')$ имеем:

$$\int_{z'} \omega' = \int_{z'} \varphi^*\omega = \int_{\varphi_* z'} \omega.$$

По лемме 2 $z' \in H_1(\partial M')$, следовательно, $\varphi(z') \in \bigcup \gamma_i$. Тогда $\int_{\varphi(z')} \omega = 0$. Итак, $\forall z' \in H_1(M') \int_{z'} \omega' = 0$, и, поскольку ω — морсовская форма, на M' слоение компактно, а значит, компактно и слоение на M . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В обратную сторону утверждение теоремы в размерности выше второй неверно. Так, на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ существует компактное слоение, все слои которого гомологичны нулю, т.е. подгруппа H_ω не является максимальной.

3. Некоторые следствия. Ранг максимальной изотропной подгруппы в $H_{n-1}(M)$ является характеристикой многообразия и не зависит от слоения. Обозначим его h_0 . В двумерном случае ранг максимальной изотропной подгруппы равен числу ручек многообразия: $h_0(M_g^2) = g$. В работе [6] был доказан следующий критерий: *слоение \mathcal{F}_ω на M_g^2 компактно, если и только если $\text{rk } H_\omega = g$* . Степень компактности слоения морсовской формы связана со степенью иррациональности формы ω . Скажем, на M_g^2 справедливо неравенство: $\text{dirr } \omega + \text{rk } H_\omega \leq 2g - 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть ω – замкнутая 1-форма с морсовскими особенностями, определяющая на компактном многообразии M^n слоение \mathcal{F}_ω . Если H_ω – максимальная изотропная подгруппа, то $\dim \omega < \text{rk } H_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если H_ω – максимальная изотропная подгруппа, $\text{rk } H_\omega = h_0(M)$, то, как следует из доказательства теоремы, 1-форма ω может иметь нетривиальные интегралы только по тем циклам, которые трансверсальны слоям γ_k . Следовательно, $\dim \omega \leq \text{rk } H_\omega - 1 = h_0(M) - 1$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. На M_g^2 слоение морсовской формы ω имеет некомпактный слой, если $\dim \omega \geq g$.

Действительно, в силу критерия компактности слоения на M_g^2 , если \mathcal{F}_ω компактно, то H_ω максимальна. Тогда из предыдущего утверждения вытекает, что $\dim \omega \leq h_0(M_g^2) - 1$. Следствие доказано.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
31.05.93

Переработанный вариант
30.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49.
- [2] Новиков С. П. Критические точки и поверхности уровня многозначных функций // Тр. МИАН. 1984. Т. 166. С. 201–209.
- [3] Зорич А. В. Квазипериодическая структура поверхностей уровня морсовской 1-формы, близкой к рациональной, – задача С. П. Новикова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №6. С. 1322–1344.
- [4] Ле Т. К. Т. Структура поверхностей уровня морсовской формы // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №1. С. 124–133.
- [5] Алания Л. А. О топологической структуре поверхностей уровня морсовских 1-форм // УМН. 1991. Т. 46. №3. С. 179–180.
- [6] Мельникова И. А. Признак некомпактности слоения на M_g^2 // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №3. С. 158–160.
- [7] Henc Damir. Ergodicity of foliations with singularities // J. Func. Anal. 1987. V. 75. №2.
- [8] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.