УДК 514.764.2

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С КОММУТИРУЮЩИМ НОРМАЛЬНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

В. А. Мирзоян

ВВЕДЕНИЕ

Среди подмногообразий M_m в пространстве постоянной кривизны $K_n(c)$ интересный класс составляют подмногообразия с полем нормальных p-направлений, параллельным в нормальной связности ($1 \leqslant p < n-m$). В обзорной статье Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазяна [13] дано сводное изложение цикла работ по подмногообразиям этого класса, включающее ряд исследований самих авторов, и сделан обзор работ о подмногообразиях M_m произвольного риманова многообразия K_n, в которых была использована нормальная связность.

Недавно автором [15], [16] было установлено, что исследование строения подмногообразия M_m с параллельным нормальным векторным полем ξ в $K_n(c)$ можно включить в более общую схему, если ввести понятие коммутирующего нормального векторного поля. Далее обнаружилось, что такое включение возможно и в случае, когда M_m допускает параллельное поле нормальных p-направлений ($p>1$). Изложению полученных при этом результатов посвящена настоящая работа.

Здесь рассматриваются следующие три задачи: 1) строение риманова многообразия M_n, на котором задано симметрическое кодаццнево тензорное поле A (§ 2), 2) строение подмногообразия M_m с коммутирующим нормальным векторным полем ξ в $K_n(c)$ (§ 3), 3) строение подмногообразия M_m с коммутирующим p-мерным нормальным подрасслоением в $K_n(c)$ (§ 4).

Статья является продолжением данного в [13] обзора работ по подмногообразиям M_m в $K_n(c)$ (прореферированных в РЖМат за период с 1980 года по октябрь 1981 года), в которых при исследовании была использована нормальная связность. Это — подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем, с параллельной второй фундаментальной формой, с параллельным (непараллельным) полем нормальных p-направлений ($p>1$), конформно плоские подмногообразия.

В некоторых случаях рассмотрены работы, вышедшие в свет в более ранние годы, но имеющие непосредственное отношение к изучаемым вопросам.

Состояние геометрии подмногообразий римановых пространств в различные периоды были отражены в обзорных статьях Г. Ф. Лаптева [9], Ю. Г. Лумисте [11], В. Т. Базылева [3], В. Т. Базылева, М. К. Кузьмина, А. В. Столярова [4].

Для облегчения чтения статьи в § 1 приведены необходимые сведения из римановой геометрии; при изложении использован формализм ковариантного дифференцирования.

§ 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Пусть M_m является m-мерным подмногообразием n-мерного риманова многообразия K_n и пусть $\tilde{\nabla}$ обозначает риманову связность в K_n. Эта связность индуцирует в касательном $T(M_m)$ и нормальном $N(M_m)$ расслоениях подмногообразия M_m естественные связности: в $T(M_m)$ — связность Леви—Чивита ∇ индуцированной римановой метрики на M_m, а в $N(M_m)$ — нормальную связность $\nabla^{\perp}$, которая векторным полям X и ξ как сечениям в $T(M_m)$ и $N(M_m)$, соответственно, ставит в соответствие в точке $x \in M_m$ компоненту ковариантной производной $(\tilde{\nabla}_X\xi)_x$ во втором прямом слагаемом $N_x(M_m)$ разложения $T_x(K_n)=T_x(M_m)\oplus N_x(M_m)$. Пусть $\mathfrak{X}(M_m)$ обозначает алгебру Ли касательных к M_m векторных полей, а $\mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$ — модуль векторных полей, нормальных к M_m. Тогда для любых X, $Y \in \mathfrak{X}(M_m)$ и любого $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$ имеют место формулы ([28], стр. 38, 40)

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X, Y), \tag{1}$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^{\perp}_X \xi, \tag{2}$$

где в правых частях первые слагаемые в точке $x \in M_m$ принадлежат $T_x(M_m)$, а вторые — $N_x(M_m)$. В формуле (1) α_2 является билинейной симметрической формой со значениями в $N(M_m)$. Она называется второй фундаментальной формой подмногообразия M_m. В формуле (2) A_ξ в произвольной точке $x \in M_m$ является симметрическим эндоморфизмом пространства $T_x(M_m)$ и называется вторым фундаментальным тензором подмногообразия M_m, соответствующим нормальному векторному полю ξ. Форма α_2 и тензор A_ξ связаны между собой тождеством ([28], стр. 41)

$$g(A_\xi(X), Y) = g^{\perp}(\alpha_2(X, Y), \xi), \tag{3}$$

где g и $g^{\perp}$ — метрики в $T(M_m)$ и $N(M_m)$, соответственно.

Нормальное векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$ называется параллельным, если $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$.

Подмногообразие M_m называется вполне геодезическим, если $\alpha_2 = 0$.

Подмногообразие M_m называется омбилическим относительно нормального векторного поля ξ, если $A_\xi = \lambda I$, где λ — некоторая функция, I — тождественное преобразование. Если M_m является омбилическим относительно каждого нормального векторного поля, то оно называется вполне омбилическим.

Пусть нормальные векторы $e_{m+1}, \ldots, e_n$ образуют ортонормированный базис пространства $N_x(M_m)$. Нормальный вектор H, инвариантно определенный по формуле

$$H = \frac{1}{m}(\operatorname{tr} A^\alpha) e_\alpha, \quad (\alpha = m+1, \ldots, n),$$

где $A^\alpha = A_{e_\alpha}$, называется вектором средней кривизны подмногообразия M_m в точке x. Если $H=0$ в каждой точке $x \in M_m$, то M_m называется минимальным подмногообразием. Омбилическое относительно H подмногообразие называется псевдоомбилическим.

Пусть $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ — векторные поля на K_n и $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ обозначает коммутатор полей $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$. Тензор $\tilde{R}$, определяемый равенством

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{Z},$$

называется тензором кривизны многообразия K_n (тензор Римана — Кристофеля). Пусть X, $Y \in \mathfrak{X}(M_m)$, $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_m)$. Тензор $R^\perp$, определяемый равенством

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi,$$

называется тензором кривизны нормальной связности $\nabla^\perp$. Указанные тензоры связаны между собой уравнением Риччи ([28], стр. 47)

$$\bar{g}(\tilde{R}(X, Y)\xi, \eta) = g^\perp(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) - g([A_\xi, A_\eta](X), Y), \quad (4)$$

где X, $Y \in \mathfrak{X}(M_m)$ ξ, $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M_m)$, $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$, $\bar{g}$ — метрика в $T(K_n)$ (касательное расслоение многообразия K_n). Тангенциальная компонента $(\tilde{R}(X, Y)\xi)^T$ от $\tilde{R}(X, Y)\xi$ удовлетворяет уравнению Кодацци ([28], стр. 46, 130)

$$(\tilde{R}(X, Y)\xi)^T = (\bar{\nabla}_Y A_\xi)(X) - (\bar{\nabla}_X A_\xi)(Y), \quad (5)$$

где $\bar{\nabla}$ обозначает связность ван дер Вардена-Бортолотти ([28], стр. 64). В пространстве постоянной кривизны $K_n(c)$ уравнения Риччи и Кодацци принимают, соответственно, следующий вид ([28], стр. 47):

$$g^\perp(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = g([A_\xi, A_\eta](X), Y), \quad (6)$$

$$(\bar{\nabla}_X A_\xi)(Y) = (\bar{\nabla}_Y A_\xi)(X). \quad (7)$$

Если $R^\perp = 0$, то говорят, что нормальная связность подмногообразия плоская.

Пусть N^p обозначает p-мерное подрасслоение нормального расслоения $N(M_m)$. Если для некоторого $\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$ в любой точке $x \in M_m$ имеет место $\zeta_x \in N_x{}^p$, то будем писать $\zeta \in N^p$. Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно любого $\zeta \in N^p$, то оно называется омбилическим относительно подрасслоения N^p. Подрасслоение N^p называется параллельным, если для любого $\zeta \in N^p$ ковариантная производная $\nabla^{\perp}_X \zeta$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$ не имеет компоненты в подрасслоении N^{n-m-p}, которое ортогонально дополняет N^p до $N(M_m)$, т. е. если $\nabla^{\perp}_X \zeta \in N^p$. В противном случае подрасслоение N^p называется непараллельным ([28], стр. 180).

§ 2. УСЛОВИЯ ИНВОЛЮТИВНОСТИ СОБСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВТОРОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ТЕНЗОРА A_ξ

1. Пусть M_m — подмногообразие риманова многообразия K_n, ξ — нормальное векторное поле и A_ξ — соответствующий ему второй фундаментальный тензор. Тензор A_ξ определяет на M_m распределения

$$T^{\lambda_u}: x \in M_m \mapsto T_x^{\lambda_u} = \{X \in T_x(M_m);\ A_\xi(X) = \lambda_u X\}, \tag{8}$$

где λ_u $(u=1, \ldots, t)$ являются его собственными значениями (в той области на M_m, где λ_u имеют постоянные кратности).

При изучении строения подмногообразия M_m часто возникает естественный вопрос об инволютивности распределений T^{λ_u}, определенных равенством (8). Если многообразие K_n является пространством постоянной кривизны, а векторное поле ξ параллельно в нормальном расслоении, то, как показали Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазян [12], распределения T^{λ_u} инволютивны. В этом случае был использован тот факт, что тензор A_ξ удовлетворяет уравнению Кодацци (7). Последнее обстоятельство очень важно, хотя оно, без предположения параллельности ξ, не может обеспечивать инволютивность указанных распределений.

Для выяснения роли уравнения Кодацци (7) рассмотрим риманово многообразие M_n, на котором задано симметрическое тензорное поле A типа (2,0). Пусть ∇ — риманова связность в M_n. Если $(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$ для любых касательных векторных полей X, Y, то тензорное поле A называется кодацциевым. Кодацциевы тензорные поля на римановом многообразии M_n рассматривали Симон [56], [57], Бургинион [26], Ферус [38]. В [56] указывается ряд условий, при которых кодацциево A ковариантно постоянно, т. е. $\nabla_X A = 0$ для любого X; получено также много геометрических результатов, относящихся к вложению M_n в евклидовы пространства. В [57] для кодацциева A получены две интегральные формулы (предполагая замкнутость M_n), из которых выводятся ряд предложений, относящихся к геометрии в целом. Изучается также роль кодацциевых тензоров в вопросе об определении собственных функций оператора Лапласа. В [26] доказано, что: 1) кодацциево тензорное поле и тензор кривизны Риччи, рассматриваемые как отображения, коммутируют; 2) поднятие кодацциева тензорного поля в алгебру кривизны и тензор Вейля конформной кривизны, рассматриваемые как операторы на внешних 2-формах, коммутируют. В [38] кодацциев тензор рассматривается в пространстве постоянной кривизны и утверждается, что он порождается гладкой функцией f и имеет вид $A[f]=\mathrm{Hess}\, f+kf\,\mathrm{Id}$, где k — кривизна пространства.

Симметрическое тензорное поле A на римановом многообразии M_n определяет распределения, аналогичные распределениям T^{λ_u}, определенным равенством (8). Вопрос об их инволютивности рассматривался автором в [15]. Там сформулировано следующее предложение, основную часть которого дал затем также Дердзинский [34].

Теорема 1. Пусть на римановом многообразии M_n задано кодацциево тензорное поле A. Тогда распределения

$$T^{\mu_u}: x\in M_n \to T_x^{\mu_u}=\{Z\in T_x(M_n);\ A(Z)=\mu_u Z\},$$

где μ_u $(u=1,\ldots,t)$ — собственные значения A инволютивны и их интегральные многообразия M^{μ_u} при $\dim M^{\mu_u}>1$, являются вполне омбилическими в M_n. Собственное значение μ_u постоянно вдоль M^{μ_u} при $\dim M^{\mu_u}>1$. Если μ_u является постоянным на M_n, то M^{μ_u} — вполне геодезическое в M_n подмногообразие.

Доказательство. Пусть $X,\ Y\in T^{\mu_u}$. Покажем, что коммутатор $[X, Y]$ полей X, Y также принадлежит T^{μ_u}. Так как риманова связность ∇ многообразия M_n имеет нулевое кручение, то $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X, Y]$. Далее мы можем написать

$$(\nabla_X A)(Y)=X(\mu_u)Y+\mu_u\nabla_X Y-A(\nabla_X Y),$$

$$(\nabla_Y A)(X)=Y(\mu_u)X+\mu_u\nabla_Y X-A(\nabla_Y X).$$

Так как тензорное поле A кодацциево, т. е. $(\nabla_X A)(Y)=(\nabla_Y A)(X)$, то, приравнивая правые части написанных выше равенств, будем иметь

$$\mu_u[X, Y]-A([X, Y])=Y(\mu_u)X-X(\mu_u)Y$$

или

$$\mu_u[X, Y]^\perp-A([X, Y]^\perp)=Y(\mu_u)X-X(\mu_u)Y,$$

где $[X, Y]^\perp$ обозначает компоненту коммутатора $[X, Y]$, ортогональную к T^{μ_u}. Так как правая часть последнего равенства принадлежит T^{μ_u}, а левая часть ортогональна T^{μ_u}, то обе части равны нулю, т. е.

$$A([X, Y]^{\perp}) - \mu_u [X, Y]^{\perp} = 0,$$

$$Y(\mu_u) X - X(\mu_u) Y = 0.$$

Из первого равенства следует, что $[X, Y]^{\perp} = 0$. Тогда $[X, Y] \in T^{\mu_u}$ и распределение T^{μ_u} инволютивно. Из второго равенства, предполагая линейную независимость X и Y, имеем $X(\mu_u) = Y(\mu_u) = 0$, т. е. собственное значение μ_u постоянно вдоль интегрального многообразия M^{μ_u} распределения T^{μ_u}.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — поле ортонормированного репера на некоторой области $U \subset M_n$ и b_{ij} — компоненты тензора A в этом репере, $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n$. Обозначим через ω_i^j локальные 1-формы римановой связности ∇. В ортонормированном репере формы ω_i^j удовлетворяют условию $\omega_i^j = -\omega_j^i$. Пусть $\nabla_k b_{ij} = b_{ijk}$, где $\nabla_i = \nabla e_i$. Легко показать, что условие симметричности функций b_{ijk} по всем индексам равносильно условию кодацциевости тензора A. Расписывая $\nabla_k b_{ij}$ более подробно, будем иметь

$$e_k(b_{ij}) - b_{pj}\omega_i^p(e_k) - b_{ip}\omega_j^p(e_k) = b_{ijk}, \tag{9}$$

где b_{ijk} симметричны по всем индексам.

Пусть собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_t$ тензора A имеют кратности $l_1, \ldots, l_t$, соответственно, и пусть

$$u, v, w, \ldots = 1, \ldots, t,$$

$$i_u, j_u, k_u, \ldots = l_1 + \ldots + l_{u-1} + 1, \ldots, l_1 + \ldots + l_u.$$

Репер $(e_1, \ldots, e_n)$ мы можем специализировать таким образом чтобы векторные поля e_{i_v} принадлежали T^{μ_v} для всех $v = 1, \ldots, t$. В таком специализированном репере матрица (b_{ij}) будет иметь диагональный вид с элементами $\mu_i\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Подставляя в (9), получим

$$e_k(\mu_i)\,\delta_{ij} + (\mu_i - \mu_j)\,\omega(e_k)_i^j = b_{ijk}, \tag{10}$$

где в левой части нет суммирования по j. Пусть $e_{i_u}, e_{j_u} \in T^{\mu_u}$. Тогда мы можем написать

$$\nabla_{j_u} e_{i_u} = \omega_{i_u}^{k_u}(e_{j_u})\, e_{k_u} + \sum_{\substack{v \\ v \neq u}} \omega_{i_u}^{j_v}(e_{j_u})\, e_{j_v}.$$

Сравнивая это равенство с (1), заключаем, что вторая фундаментальная форма подмногообразия M^{μ_u} в M_n определяется функциями $\omega_{i_u}^{j_v}(e_{j_u})$, $v \neq u$. Определим эти функции. Пусть в (10) $i=i_u$, $k=j_u$, $j=j_v$, $v\neq u$. Тода мы будем иметь

$$(\mu_u-\mu_v)\,\omega_{i_u}^{j_v}(e_{j_u})=b_{i_u j_u j_v},$$

где $\mu_u=\mu_{i_u}=\mu_{j_u}$, $\mu_v=\mu_{i_v}=\mu_{j_v}$. Отсюда следует, что функции $(\mu_u-\mu_v)^{-1}b_{i_u j_u j_v}$ являются компонентами второго фундаментального тензора подмногообразия M^{μ_u} относительно нормального направления e_{j_v}. Если в (10) положить $i=i_u$, $j=j_u$, $i_u\neq j_u$, то будем иметь $b_{i_u j_u k}=0$ для любого k. Если же положить $i=j=i_u$, то получим $e_k(\mu_u)=b_{i_u i_u k}$. Отсюда следует, что $b_{i_u i_u k}=b_{j_u j_u k}$ для любого k. Таким образом, мы доказали, что каждая матрица $A_{j_v}=(b_{i_u j_u j_v})$ имеет диагональный вид и все диагональные элементы равны между собой. Это и означает, что M^{μ_u} $(\dim M^{\mu_u}>1)$ является вполне омбилическим в M_n подмногообразием. Из $e_k(\mu_u)=b_{i_u i_u k}$ следует, что $b_{i_u i_u k}=0$, если μ_u постоянно на M_n. Тогда все матрицы A_{j_v} нулевые и, следовательно, подмногообразие M^{μ_u} является вполне геодезическим в M_n. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, основную часть теоремы формулирует и доказывает также Дердзинский [34]. В более ранней работе Вальдена [61] рассмотрен случай, когда $\nabla_X A=0$ для любого $X\in\mathfrak{X}(M_n)$. В этом случае распределения T^{μ_u} параллельны, μ_u постоянны и $M_n=M^{\mu_1}\times\ldots\times M^{\mu_t}$. Если в некоторой точке $x\in M_n$ $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_t$, то эта точка называется омбилической для A. Для симметрического некодацциева тензорного поля A на M_n условия омбиличности всех точек указывает Щвец [59].

2. Таким образом, как показывает теорема 1, условие кодацциевости тензорного поля A на M_n обеспечивает не только инволютивность распределений T^{μ_u}, но и позволяет делать заключения об их интегральных многообразиях. Иначе обстоит дело, когда мы рассматриваем в римановом многообразии K_n подмногообразие M_m. Если K_n — пространство постоянной кривизны и $\xi\in\mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$ — некоторое нормальное векторное поле, то тензор A_ξ удовлетворяет уравнению Кодацци (7). Однако только это обстоятельство, как уже указывалось выше, недостаточно для инволютивности распределений T^{λ_u}, определенных равенством (8). Достаточным, например, было бы условие кодацциевости тензора A_ξ в римановой связности ∇ подмногообразия M_m, т. е. если A_ξ удовлетворяет уравнению $(\nabla_X A_\xi)(Y)=$ $=(\nabla_Y A_\xi)(X)$. Выше указывалось, что условие параллельности ξ достаточно для инволютивности распределений T^{λ_u}. Однако это условие, которое даже можно ослабить, если K_n — пространство постоянной кривизны, далеко недостаточно, если K_n

является произвольным римановым многообразием. Это станет ясно, если мы рассмотрим вопрос об инволютивности распределений T^{λ_u} в самой его общей постановке. Имеет место следующее предложение.

Теорема 2. Пусть M_m—подмногообразие риманова многообразия K_n, ξ—ненулевое нормальное векторное поле и T^{λ_u}—некоторое распределение, определенное тензором A_ξ по формуле (8), причем $\dim T^{\lambda_u}>1$. Для того чтобы T^{λ_u} было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы для любых $X, Y \in T^{\lambda_u}$ имело место

$$(\tilde{R}(X, Y)\xi)^T + A_{\nabla^\perp_Y \xi}(X) - A_{\nabla^\perp_X \xi}(Y) = Y(\lambda_u)X - X(\lambda_u)Y. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $X, Y \in T^{\lambda_u}$. Найдем необходимое и достаточное условие принадлежности T^{λ_u} коммутатора $[X, Y]$ векторных полей X, Y. Имеем

$$(\overline{\nabla}_X A_\xi)(Y) = \nabla_X (A_\xi(Y)) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\nabla^\perp_X \xi}(Y) =$$
$$= X(\lambda_u)Y + \lambda_u \nabla_X Y - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\nabla^\perp_X \xi}(Y). \quad (12)$$

Аналогично

$$(\overline{\nabla}_Y A_\xi)(X) = Y(\lambda_u)X + \lambda_u \nabla_Y X - A_\xi(\nabla_Y X) - A_{\nabla^\perp_Y \xi}(X). \quad (13)$$

Учитывая уравнение Кодацци (5), а также равенство $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$ и вычитая (12) из (13), будем иметь

$$(\tilde{R}(X, Y)\xi)^T + A_{\nabla^\perp_Y \xi}(X) - A_{\nabla^\perp_X \xi}(Y) - Y(\lambda_u)X + X(\lambda_u)Y =$$
$$= \lambda_u [Y, X]^\perp - A_\xi([Y, X]^\perp), \quad (14)$$

где $[Y, X]^\perp$ обозначает компоненту коммутатора $[Y, X]$, ортогональную к T^{λ_u}.

Если распределение T^{λ_u} инволютивно, то $[Y, X] \in T^{\lambda_u}$. Тогда $[Y, X]^\perp = 0$ и из (14) следует (11). Обратно, если имеет место (11), то из (14) получаем

$$A_\xi([Y, X]^\perp) = \lambda_u [Y, X]^\perp.$$

Так как $[Y, X]^\perp$ ортогонально T^{λ_u}, то из последнего равенства следует, что $[Y, X]^\perp = 0$, т. е. $[Y, X] \in T^{\lambda_u}$ и распределение T^{λ_u} инволютивно. Теорема доказана.

Другое необходимое и достаточное условие инволютивности распределения T^{λ_u} дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть распределение T^{λ_u} на M_m определяется так, как в теореме 2. Для того чтобы T^{λ_u} было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\tilde{R}(X,Y)\xi)^T + A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}(X) - A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}(Y) \in T^{\lambda_u}$$

для любых $X, Y \in T^{\lambda_u}$.

Доказательство. Необходимость следует из равенства (11). Обратно, если условие теоремы выполняется, то в (14) левая часть принадлежит T^{λ_u}, тогда как правая ортогональна T^{λ_u}. Следовательно, обе части равны нулю и равенство (11) выполняется. Теорема доказана.

Если объемлющее многообразие является пространством постоянной кривизны $K_n(c)$, то для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$ и любого $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$ имеем $(\tilde{R}(X,Y)\xi)^T = 0$. Поэтому указанные в теоремах 2, 3 условия инволютивности распределения T^{λ_u} сводятся, соответственно, к следующим [15], [16]:

$$A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}(Y) - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}(X) = X(\lambda_u)Y - Y(\lambda_u)X, \tag{15}$$

$$A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}(Y) - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}(X) \in T^{\lambda_u} \tag{16}$$

для любых $X, Y \in T^{\lambda_u}$.

Условия (15) и (16) указывают необходимые и достаточные условия инволютивности только одного распределения T^{λ_u}. Однако при изучении подмногообразия M_m важно найти такое условие, которое обеспечит инволютивность всех распределений T^{λ_u}. Укажем несколько таких достаточных признаков.

Теорема 4. Пусть M_m является подмногообразием пространства постоянной кривизны $K_n(c)$ и пусть ξ — ненулевое нормальное векторное поле. Тогда каждое из следующих условий является достаточным для инволютивности всех распределений T^{λ_u} $(u=1,\ldots,t)$, определенных вторым фундаментальным тензором A_ξ по формуле (8):

(а) $A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}(Y) - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}(X) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$;

(б) $\left[A_\xi, A_{\nabla^{\perp}_{Z}\xi}\right] = 0$ для любого $Z \in \mathfrak{X}(M_m)$;

(в) $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любого $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$;

(г) подмногообразие M_m является омбилическим относительно $\nabla^{\perp}_{X}\xi$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$, т. е. $A_{\Delta^{\perp}_{X}\xi} = \theta(X)I$, где θ — некоторая 1-форма, I — тождественное преобразование.

Доказательство. Если имеет место (а), то для каждого T^{λ_u} $(\dim T^{\lambda_u} > 1)$ условие (16) автоматически выполняется. Следовательно, каждое T^{λ_u} инволютивно. Если имеет место условие (б), то легко показать, что подпространства собственных векторов тензора A_ξ инвариантны относительно $A_{\nabla^\perp_Z\xi}$ для любого $Z \in \mathfrak{X}(M_m)$, т. е. если $X, Y \in T^{\lambda_u}$, то $A_{\nabla^\perp_Y\xi}(X), A_{\nabla^\perp_X\xi}(Y) \in \in T^{\lambda_u}$. Тогда условие (16) выполняется для каждого T^{λ_u} и все T^{λ_u} инволютивны. Так как каждое из условий (в) и (г) имеет своим следствием (б), то эти условия достаточны для инволютивности всех распределений T^{λ_u}. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполняется условие (а) теоремы 4. Тогда каждое собственное значение λ_u тензора A_ξ постоянно вдоль интегрального многообразия M^{λ_u} распределения T^{λ_u} ($\dim T^{\lambda_u} > 1$).

Доказательство. Из (15) мы будем иметь $X(\lambda_u)Y - -Y(\lambda_u)X = 0$, $X, Y \in T^{\lambda_u}$. Так как $\dim T^{\lambda_u} > 1$, то можем предположить, что векторные поля X, Y линейно независимы. Тогда $X(\lambda_u) = Y(\lambda_u) = 0$, что и требовалось доказать.

Условия (в) и (г) теоремы 4 имеют более важные следствия, которые рассмотрим в следующем параграфе.

Очевидно, что если подмногообразие M_m в пространстве постоянной кривизны $K_n(c)$ допускает параллельное нормальное векторное поле ξ, то все достаточные условия теоремы 4 выполняются, причем условие (в) следует из уравнения Риччи (6). Получается соответствующий результат из [12] (см. также [13]).

§ 3. ПОДМНОГООБРАЗИЯ С КОММУТИРУЮЩИМ НОРМАЛЬНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

1. В этом параграфе мы даем одно расширение класса подмногообразий с параллельным нормальным векторным полем. Начнем с обзора недавних исследований.

В пространствах постоянной кривизны $K_n(c)$ в классе подмногообразий, допускающих параллельное нормальное векторное поле, наиболее полно описаны подмногообразия с параллельным вектором средней кривизны H. Результаты наиболее ранних работ включены в монографию Чена [28] и освещены в обзорной статье Ю. Г. Лумисте [11]. Обзор результатов более поздних исследований содержится в работе Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазяна [13]. В самое последнее время подмногообразия M_m в $K_n(c)$ с параллельным H были предметом исследования Гваделупе [39] и Мацуямы [42]. В [39] для M_m с параллельным H указываются условия, при которых M_m является: а) сферой или произведением сферы и плоскости, если $c=0$; б) сферой, орисферой, эквидистантной поверхностью или плоскостью, если $c=-1$. В [42] рассматривается такое M_m с параллельным H, вторая фундаментальная форма которого относительно любого нормального направления имеет два различных собственных значения, имеющих равные кратности p, где p нечетно; тогда $m=2p$. Если при этом $n=m+2$, то M_{2p} является вполне омбилическим либо изометрично произведению двух пространств постоянной кривизны. При $H=0$ дано подробное описание такого минимального M_{2p} в сфере S^{2p+2} (1). Аналитическое M_2 в $K_n(c)$ с параллельным $H/|H|$ ($H\neq 0$) изучает Чен [29]. Такое M_2 принадлежит либо гиперсфере как минимальная поверхность, либо 4-мерному вполне геодезическому подмногообразию. В евклидовом пространстве R_n таким M_2 с нулевой кривизной является: а) минимальная поверхность в гиперсфере или б) открытая часть произведения двух окружающей или в) развертывающаяся поверхность в некоторой 3-плоскости $R_3\subset R_n$. Строение подмногообразия M_2 с положительной гауссовой кривизной и псевдопараллельным вектором средней кривизны H (т. е. $\nabla^\perp H$ коллинеарно H) исследует Свобода [60]. Доказано, что если $|H|=\mathrm{const}\neq 0$ и граница M_2 состоит из омбилических точек, то M_2 является частью двумерной сферы.

Известными примерами подмногообразий с параллельным H являются подмногообразия с параллельной второй фундаментальной формой α_2. В евклидовом пространстве R_n такое M_m было описано Вальденом [61] (случай плоской нормальной связности) и Ферусом [36] (общий случай). Если ранее Ферус установил, что примеры подмногообразий с параллельным α_2 дают канонические погружения симметрических R-пространств в R_n, то в [35] он показывает, что каждое минимальное в сфере евклидова пространства подмногообразие с параллельным α_2 (в прямое произведение таких подмногообразий разлагается общее подмногообразие с параллельным α_2) является образом симметрического R-пространства при его каноническом погружении в евклидово пространство. В [37] Ферус, изучая симметрические подмногообразия в R_n (так называется подмногообразие M_m, которое инвариантно относительно отражений в R_n от его нормальных пространств), доказывает, что они имеют параллельную вторую фундаментальную форму α_2, сводя тем самым проблему классификации указанного класса подмногообразий к решенной ранее задаче. В произвольном римановом пространстве K_n подмногообразие M_m с параллельным α_2 рассматривает Штрюбинг [58]. Доказано, что если K_n допускает локально изометрическое отражение от нормального к M_m пространства, то M_m является симметричным относительно этого отражения. Как показал Мацуяма [44], подмногообразие M_m ($m\geqslant 4$) в S^n или R_n имеет параллельную вторую фундаментальную форму α_2 при выполнении следующих условий: M_m минимально и относительно каждой нормали имеет не более двух главных кривизн, причем если имеется точно две различные, то их кратности $\geqslant 2$. Для длины S формы α_2 справедливо либо $S=0$, либо $m \leqslant S \leqslant m^2/4$. Рассмотрены случаи $S=m^2/4$ и $S=m>4$. В последнем случае M_m изометрично прямому произведению сфер. Минимальное M_m в R_n, удовлетворяющее указанным условиям, является вполне геодезическим.

Описание локального строения подмногообразий M_m с общим параллельным нормальным векторным полем ξ дано в работах Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазяна [12], [13]. Результаты этих работ будут освещены ниже. В R_n указанный класс подмногообразий рассматривает Брюльман [27], Амато [25], Оликер [49]. В [27] изучается M_2 с параллельным ξ и для средней кривизны $H(\xi)$ (след тензора A_ξ) обобщается известное неравенство Хейнца. В [25] вводится понятие тангенциально рекуррентного параллельного векторного поля ξ и исследуется строение подмногообразия M_m с таким полем в R_{m+2}. В [49] для компактного M_m с параллельным ξ, $\mathrm{Det}(A_\xi)\neq 0$, найдены условия, при которых M_m принадлежит гиперсфере в R_n. Для неприводимого замкнутого M_m признаки принадлежности гиперсфере были установлены ранее Вегнером [62].

2. Автором в [16] для подмногообразия M_m в $K_n(c)$ было введено понятие коммутирующего нормального векторного поля. Так называется нормальное векторное поле $\xi \in X^\perp(M_m)$, для которого $[A_\xi, A_\eta]=0$ для любого $\eta \in X^\perp(M_m)$. Из уравнения Риччи (6) получаем, что векторное поле ξ является коммутирующим тогда и только тогда, когда $R^\perp(X,Y)\xi=0$ для любых $X, Y \in X(M_m)$.

Покажем, что каждое параллельное нормальное вектрорное поле ξ является коммутирующим. Действительно, если $\nabla^\perp_X \xi=0$ для любого $X \in X(M_m)$, то $R^\perp(X, Y)\xi=\nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi-\nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi-\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi=0$ для любых $X, Y \in X(M_m)$.

Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно $\xi \in X^\perp(M_m)$, то $[A_\xi, A_\eta]=0$ для любого $\eta \in X^\perp(M_m)$ (так как $A_\xi=\lambda I$) и ξ—коммутирующее нормальное векторное поле.

Если нормальная связность подмногообразия M_m плоская, т. е. $R^\perp(X, Y)\xi=0$ для любых X, $Y \in X(M_m)$ и любого $\xi \in X^\perp(M_m)$, то каждое нормальное векторное поле ξ является коммутирующим.

Еще одним примером подмногообразия, допускающего коммутирующее нормальное векторное поле, является подмногообразие с параллельной третьей фундаментальной формой (см. п. 5 настоящего параграфа).

3. Пусть M_m—подмногообразие пространства постоянной кривизны $K_n(c)$, ξ—некоторое нормальное векторное поле и T^{λ_u}—распределения на M_m, определенные равенством (8).

В случае, когда векторное поле ξ параллельно в нормальном расслоении, в [12] и [13] доказаны следующие утверждения:

(А) распределения T^{λ_u}, определенные равенством (8), инволютивны и их интегральные многообразия M^{λ_u} образуют на M_m ортогональную сопряженную систему;

(Б) каждое M^{λ_u} ($\dim M^{\lambda_u} > 1$) принадлежит ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых пространства $K_n(c)$ и является вполне омбилическим в M_m;

(В) λ_u постоянно вдоль M^{λ_u} ($\dim M^{\lambda_u} > 1$), причем если $\lambda_u = \mathrm{const}$, то M^{λ_u} — вполне геодезическое в M_m подмногообразие;

(Г) нормальное расслоение $N(M_m)$ подмногообразия M_m как подрасслоение нормального расслоения для M^{λ_u} ($\dim M^{\lambda_u} > 1$) является параллельным в нормальной связности подмногообразия M^{λ_u}, причем в его ортогональном дополнении $N^{\perp}$ индуцируется плоская связность;

(Д) если все T^{λ_u} одномерны, то нормальная связность подмногообразия M_m является плоской; при $n = m + 2$ нормальная связность всегда плоская.

Оказывается, что указанные утверждения имеют более общий характер и выполняются при более слабых предположениях (за исключением первой части утверждения (Б), для которой условие параллельности ξ существенно). Это устанавливается в доказываемой ниже теореме 5 и следующих за ней леммах.

Теорема 5 (анонсирована в [16]). Пусть подмногообразие M_m в $K_n(c)$ допускает коммутирующее нормальное векторное поле ξ. Тогда:

(а) распределения T^{λ_u}, определенные вторым фундаментальным тензором A_ξ, согласно (8), инволютивны и их интегральные многообразия M^{λ_u} образуют на M_m ортогональную сопряженную систему;

(б) каждое M^{λ_u} ($\dim M^{\lambda_u} > 1$) является омбилическим относительно ξ; при этом ξ как нормальное векторное поле на M^{λ_u} является коммутирующим.

Если тензор A_ξ имеет m попарно различных собственных значений, то нормальная связность подмногообразия M_m является плоской. При $n = m + 2$ нормальная связность всегда плоская.

Доказательство. Если подмногообразие M_m в $K_n(c)$ допускает коммутирующее нормальное векторное поле ξ, то распределения T^{λ_u}, определенные равенством (8), инволютивны (теорема 4, условие (в)). Покажем, что их интегральные многообразия M^{λ_u} образуют ортогональную сопряженную систему. Пусть $X \in T^{\lambda_u}$. Так как $A_\xi A_\eta = A_\eta A_\xi$ для любого $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M_m)$, то $A_\xi A_\eta(X) = A_\eta A_\xi(X) = \lambda_u A_\eta(X)$, т. е. $A_\eta(X) \in T^{\lambda_u}$. Если

$Y \in T^{\lambda_v}$ $(u \neq v)$, то, применяя тождество (3) для η, получим

$$0 = g(A_\eta(X), Y) = g^\perp(\alpha_2(X, Y), \eta).$$

Отсюда, в силу невырожденности $g^\perp$, следует, что $\alpha_2(X, Y) = 0$. Это и есть условие сопряженности подпространств $T_x^{\lambda_u}$, $T_x^{\lambda_v}$ $(u \neq v)$, $x \in M_m$. Ортогональность этих подпространств следует из известного факта линейной алгебры. Если все собственные значения λ_u попарно различны и имеют кратность 1, то все тензоры A_η одновременно с A_ξ приводятся к диагональному виду. Согласно известному критерию Картана, нормальная связность подмногообразия M_m будет плоской. При $n = m + 2$ нормальная связность, как легко показать, всегда плоская. Если $\dim M^{\lambda_u} > 1$, то M^{λ_u} как подмногообразие в $K_n(c)$ является омбилическим относительно ξ (так как A_ξ на M^{λ_u} имеет только одно собственное значение λ_u). Следовательно, ξ на M^{λ_u} является коммутирующим нормальным векторным полем. Теорема доказана.

Из теоремы 5 следует, что утверждения (А) и (Д) имеют более общий характер и справедливы также тогда, когда векторное поле ξ является коммутирующим. При этом имеет место и первая часть утверждения (Г), которая является следствием того, что интегральные многообразия M^{λ_u} образуют ортогональную сопряженную систему [14]. Вторая часть этого утверждения является частным случаем следующего предложения [16].

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 5 и пусть $\left[A_{\nabla_X^\perp \xi}, A_{\nabla_Y^\perp \xi}\right] = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$. Тогда в подрасслоении $N^\perp$, которое является ортогональным дополнением для $N(M_m)$ до нормального расслоения интегрального многообразия M^{λ_u} $(\dim M^{\lambda_u} > 1)$, индуцируется плоская связность.

Вторая часть утверждения (Б) является частным случаем следующего более общего предложения [16].

Лемма 2. Пусть подмногообразие M_m в $K_n(c)$ является омбилическим относительно $\nabla_X^\perp \xi$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$, где ξ — некоторое нормальное векторное поле (т. е., имеет место условие (г) теоремы 4). Тогда распределения T^{λ_u}, определенные равенством (8), инволютивны и их интегральные многообразия M^{λ_u} $(\dim M^{\lambda_u} > 1)$ являются вполне омбилическими в M_m. При этом $A_{\nabla_Y^\perp \xi}(X) = Y(\lambda_u) X$, если $X, Y \in T^{\lambda_u}$.

Следствие 2. Пусть подмногообразие M_m в $K_n(c)$ допускает такое нормальное векторное поле ξ, что для любого X $A_{\nabla_X^\perp \xi} = 0$. Тогда имеют место утверждения леммы 2 и при этом λ_u постоянно вдоль интегрального многообразия M^{λ_u} ($\dim M^{\lambda_u} > 1$).

Геометрический смысл условия следствия 2 заключается в том, что ковариантная производная $\nabla^{\perp}_{X}\xi$ векторного поля ξ в точке $x \in M_m$ не принадлежит первому нормальному пространству подмногообразия M_m.

Леммы 1 и 2 доказываются точно так же, как и утверждения (Г) и (Б) (см. [13]). При этом более общие условия этих лемм к особым затруднениям не приводят. В качестве дополнения к следствию 2 заметим следующее: можно доказать, что если тензор A_ξ имеет только два постоянных собственных значения λ_1, λ_2, то распределения T^{λ_1}, T^{λ_2} будут параллельными. Здесь условие постоянности λ_1, λ_2 можно заменить также условием минимальности подмногообразия M_m, а в случае, когда M_m есть гиперповерхность, можно ограничиться условием постоянности средней кривизны. В последнем случае M_m будет прямым произведением интегральных многообразий M^{λ_1}, M^{λ_2}, где M^{λ_u} ($u=1, 2$) является вполне омбилическим в $K_{m+1}(c)$. Таким образом можно прийти к результатам Оцуки [51]. Первая часть утверждения (В) следует из следствия 1. Ответ на вопрос о том, когда какое-либо интегральное многообразие M^{λ_u} является вполне геодезическим в M_m, дает следующая лемма.

Лемма 3. Пусть имеют место условия теоремы 5 и пусть M^{λ_u} — некоторое интегральное многообразие, определенное по этой теореме. Следующие условия эквивалентны:

(а) ограничение $A_\xi|_{M^{\lambda_u}}$ тензора A_ξ на M^{λ_u} ковариантно постоянно;

(б) M^{λ_u} является вполне геодезическим в M_m и $A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}(Y) = X(\lambda_u)Y$ для любых касательных к M^{λ_u} векторных полей X, Y

Эта лемма обобщает вторую часть утверждения (В).

4. Выше уже указывалось, что в работе [36] в евклидовом пространстве R_n было изучено строение подмногообразия M_m с параллельной второй фундаментальной формой α_2. Там доказана теорема о разложении M_m в прямое произведение своих вполне геодезических подмногообразий. При этом был использован тот факт, что вектор средней кривизны H параллелен в нормальном расслоении и тензор A_H является ковариантно постоянным. Если же H заменить на произвольное нормальное векторное поле ξ, то только условие ковариантной постоянности A_ξ недостаточно для упомянутого выше разложения подмногообразия M_m. Однако имеет место следующее предложение, которое анонсировано в [16] без доказательства.

Теорема 6. Пусть подмногообразие M_m в R_n допускает коммутирующее нормальное векторное поле ξ и пусть тензор A_ξ является ковариантно постоянным. Тогда распределения T^{λ_u}, определенные равенством (8), инволютивны и параллельны, их интегральные многообразия M^{λ_u} являются вполне геодезическими в M_m и образуют ортогональную сопряженную систему. При этом $M_m = M^{\lambda_1} \times \ldots \times M^{\lambda_t}$ и тензор $A_{\nabla_X^\perp \xi}$ имеет собственные значения $X(\lambda_u)$ $(u=1,\ldots, t)$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$.

Доказательство. Пусть X — произвольное касательное векторное поле и $Y \in T^{\lambda_u}$. Тогда

$$0 = (\overline{\nabla}_X A_\xi)(Y) = X(\lambda_u) Y + \lambda_u (\nabla_X Y)^\perp - A_\xi ((\nabla_X Y)^\perp) - A_{\nabla_X^\perp \xi}(Y),$$

где $(\nabla_X Y)^\perp \perp T^{\lambda_u}$. Отсюда, в силу коммутируемости ξ, получаем

$$\lambda_u (\nabla_X Y)^\perp - A_\xi ((\nabla_X Y)^\perp) = 0,$$
$$X(\lambda_u) Y - A_{\nabla_X^\perp \xi}(Y) = 0.$$

Из первого равенства следует, что $(\nabla_X Y)^\perp = 0$, т. е. распределение T^{λ_u} параллельно. Тогда интегральное многообразие M^{λ_u} является вполне геодезическим в M_m. Вторoе из полученных равенств доказывает вторую часть последнего утверждения теоремы. Так как интегральные многообразия M^{λ_u} образуют ортогональную сопряженную систему и распределения T^{λ_u} параллельны, то, согласно основной лемме в [45], $M_m = M^{\lambda_1} \times \ldots \times M^{\lambda_t}$. Теорема доказана.

5. Рассмотрим один класс подмногообразий с коммутирующим нормальным векторным полем. Пусть M_m — подмногообразие в $K_n(c)$ и α_2 — его вторая фундаментальная форма. Третья фундаментальная форма α_3 подмногообразия M_m определяется как ковариантная производная от α_2 в связности ван дер Вардена-Бортолотти, т. е., $\alpha_3 = \overline{\nabla} \alpha_2$ [14]. Говорят, что форма α_3 является параллельной, если $\overline{\nabla}_X \alpha_3 = 0$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$.

Лемма 4. Пусть M_m является подмногообразием с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 в $K_n(c)$. Тогда поле вектора средней кривизны H подмногообразия M_m является коммутирующим.

Доказательство. Пусть $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ — поле адаптированного к M_m ортонормированного репера и b^α_{ij} — компоненты формы α_2 в этом репере, где $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$, $\alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n$. Согласно определению формы α_3, ее компоненты b^α_{ijk} определяются равенством $b^\alpha_{ijk} = \overline{\nabla}_k b^\alpha_{ij}$, где $\overline{\nabla}_k = \overline{\nabla}_{e_k}$. Так как $\overline{\overline{\nabla}} \alpha_3 = 0$, то $\overline{\overline{\nabla}}_p b^\alpha_{ijk} = 0$. Для любого подмногообразия M_m имеет место тождество

Риччи ([28], стр. 66)

$$\overline{\nabla}_p \overline{\nabla}_k b^{\alpha}_{ij} - \overline{\nabla}_k \overline{\nabla}_p b^{\alpha}_{ij} = R^q_{pki} b^{\alpha}_{qj} + R^q_{pkj} b^{\alpha}_{qi} - R^{\alpha}_{pk\beta} b^{\beta}_{ij},$$

где R^p_{ijk} — компоненты тензора кривизны римановой связности подмногообразия M_m, $R^{\alpha}_{ij\beta}$ — компоненты тензора кривизны нормальной связности $\nabla^{\perp}$. Так как в нашем случае левая часть этого тождества равна нулю, то, свертывая правую часть с δ^{ij} (символ Кронекера) и учитывая, что первые два слагаемых будут равны нулю, получим $R^{\alpha}_{pk\beta} H^{\beta} = 0$, где $H^{\beta} = b^{\beta}_{ij} \delta^{ij}$ — компоненты вектора средней кривизны H. Это равенство является координатной записью условия коммутируемости H. Лемма доказана.

Таким образом, подмногообразие M_m с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 мы можем описать по теореме 5 при $\xi = H$. Среди изучаемого класса подмногообразий интерес представляют псевдоомбилические. В частном случае, когда подмногообразие является минимальным, верна следующая лемма.

Лемма 5. Пусть M_m является минимальным подмногообразием с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 в $K_n(c)$, где $c \leqslant 0$. Тогда M_m есть m-мерное вполне геодезическое подмногообразие.

Доказательство. Пусть сохраняются обозначения леммы 4 и пусть $\langle \alpha_2 \rangle^2 = b^{\alpha}_{ij} b^{ij}_{\alpha}$, $\langle \alpha_3 \rangle^2 = b^{\alpha}_{ijk} b^{ijk}_{\alpha}$. Для произвольного подмногообразия имеет место формула ([28], стр. 89)

$$\frac{1}{2} \Delta \langle \alpha_2 \rangle^2 = \delta^{kl} (\overline{\nabla}_k \overline{\nabla}_l b^{\alpha}_{ij}) b^{ij}_{\alpha} + \langle \alpha_3 \rangle^2,$$

где $\Delta = \delta^{kl} \overline{\nabla}_k \overline{\nabla}_l$ — оператор Лапласа. Так как форма α_3 параллельна, то $\overline{\nabla}_k \overline{\nabla}_l b^{\alpha}_{ij} = \overline{\nabla}_k b^{\alpha}_{ijl} = 0$ и мы имеем

$$\frac{1}{2} \Delta \langle \alpha_2 \rangle^2 = \langle \alpha_3 \rangle^2. \tag{17}$$

Для любого тензора A типа (1,1) определим $K(A)$ по формуле

$$K(A) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^t A) = \| A \|^2.$$

Тогда для любого минимального подмногообразия справедливо равенство ([28], стр. 91]

$$\frac{1}{2} \Delta \langle \alpha_2 \rangle^2 = mc \langle \alpha_2 \rangle^2 - \sum_{\alpha} (K(A_{\alpha}))^2 - \sum_{\alpha,\beta} K(A_{\alpha} A_{\beta} - A_{\beta} A_{\alpha}) + \langle \alpha_3 \rangle^2,$$

где $A_{\alpha} = A_{e_{\alpha}}$. Сравнивая это равенство с (17) и учитывая, что $c \leqslant 0$, получим $K(A_{\alpha}) = \| A_{\alpha} \|^2 = 0$. Следовательно, $A_{\alpha} = 0$ для любого $\alpha = m+1, \ldots, n$ и подмногообразие M_m является вполне геодезическим. Лемма доказана.

Аналогичный результат для случая подмногообразия M_m с параллельной второй фундаментальной формой в R_n доказан Ферусом [36].

Интересно то обстоятельство, что на подмногообразии с параллельной третьей фундаментальной формой возникает симметрический ковариантно постоянный тензор. Это позволяет дать новое описание локального строения подмногообразия. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 7. Пусть M_m является подмногообразием с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 в $K_n(c)$ и пусть вектор средней кривизны H непараллелен в нормальном расслоении. Тогда тензорное поле $B=\Delta A_H$, где Δ — оператор Лапласа, является ковариантно постоянным в римановой связности ∇ подмногообразия M_m и имеет постоянные собственные значения. Распределения

$$T^u\colon x\in M_m \mapsto T^u_x=\{X\in T_x(M_m);\ B(X)=\lambda_u X\},$$

где λ_u $(u=1,\ldots,t)$ — собственные значения тензора B, параллельны и инволютивны, а их интегральные многообразия M^u являются вполне геодезическими в M_m.

Доказательство. Пусть сохраняются обозначения, введенные при доказательстве леммы 4. Тогда $A_H=(H_\alpha b^\alpha_{ij})$, где $H_\alpha=b^{kl}_\alpha\delta_{kl}$ — компоненты вектора средней кривизны H, и $B=(\Delta H_\alpha b^\alpha_{ij})$, где $\Delta=\delta^{pq}\overline{\nabla}_p\overline{\nabla}_q$ — оператор Лапласа. Так как $\gamma^\alpha_{ijk}=\overline{\nabla}_k b^\alpha_{ij}$ (компоненты формы α_3) ковариантно постоянны в связности $\overline{\nabla}$, то $H^p_\alpha=\overline{\nabla}^p(b^{kl}_\alpha\delta_{kl})=b^{klp}_\alpha\delta_{kl}=\nabla^{\perp p}H_\alpha$ также ковариантно постоянны, где $\overline{\nabla}^p=\delta^{kp}\overline{\nabla}_k$, $\nabla^{\perp p}=\delta^{kp}\nabla^\perp_k$. Тогда

$$\Delta(H_\alpha b^\alpha_{ij})=\delta^{pq}\overline{\nabla}_p\overline{\nabla}_q(H_\alpha b^\alpha_{ij})=2\nabla^{\perp p}H_\alpha\cdot\overline{\nabla}_p b^\alpha_{ij}=2H^p_\alpha b^\alpha_{ijp}.$$

Следовательно,

$$\nabla_k(H^p_\alpha b^\alpha_{ijp})=\nabla_k H^p_\alpha\cdot b^\alpha_{ijp}+H^p_\alpha\nabla_k b^\alpha_{ijp}=$$
$$=H^p_\beta b^\alpha_{ijp}\omega^\beta_\alpha(e_k)-H^p_\alpha b^\beta_{ijp}\omega^\alpha_\beta(e_k)=0,$$

где ω^β_α — локальные 1-формы нормальной связности $\nabla^\perp$. Это и доказывает, что тензорное поле B ковариантно постоянно в связности ∇. Далее, если $X\in T^{\lambda_u}$, а Y — произвольное касательное к M_m векторное поле, то

$$0=(\nabla_Y B)(X)=Y(\lambda_u)X+\lambda_u\nabla_Y X-B(\nabla_Y X)$$

или

$$Y(\lambda_u)X+\lambda_u(\nabla_Y X)^\perp-B((\nabla_Y X)^\perp)=0,$$

где $(\nabla_Y X)^\perp$ обозначает компоненту $\nabla_Y X$, ортогональную к T^{λ_u}. Из последнего равенства следует, что $Y(\lambda_u)=0$, т. е.

$\lambda_u = \mathrm{const}$, и $(\nabla_Y X)^\perp = 0$, что доказывает параллельность T^{λ_u} Для доказательства остальных утверждений теоремы достаточно сослаться на теорему 1. Теорема доказана.

§ 4. ПОДМНОГООБРАЗИЯ С КОММУТИРУЮЩИМ P-МЕРНЫМ ПОДРАССЛОЕНИЕМ НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ

1. В настоящем параграфе будет показано, что к описанию локального строения подмногообразия M_m в $K_n(c)$ с параллельным p-мерным подрасслоением N^p нормального расслоения $N(M_m)$ можно подойти с более общей точки зрения, если ввести понятие коммутирующего подрасслоения $N^p \subset N(M_m)$. Сначала сделаем обзор результатов имеющихся исследований.

Понятие p-мерного параллельного подрасслоения N^p нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m евклидова пространства R_n впервые было введено Ю. Г. Лумисте в [10] под названием p-мерной поднормализации. В пространствах постоянной кривизны $K_n(c)$ подмногообразия M_m с параллельным подрасслоением $N^p \subset N(M_m)$ рассмотрели Чен и Яно [32]. Однако существенный прогресс в описании локального строения указанного класса подмногообразий был достигнут в работах А. В. Чакмазяна [20], [21], [22], [23], Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазяна [13]. Оказалось, что их строение тесно связано со строением тангенциально вырожденных подмногообразий и подмногообразий, несущих ортогональную сопряженную систему (в частности сеть), которые были исследованы в работах М. А. Акивиса [1], [2], В. В. Рыжкова [18].

Если подрасслоение N^p нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m в $K_n(c)$ является параллельным, то и его ортогональное дополнение N^{n-m-p} в $N(M_m)$ также параллельно [10], [32].

Пусть N^p — p-мерное, вообще говоря, непараллельное, под расслоение в $N(M_m)$. Обозначим через M_{m+p} подмногообразие в $K_n(c)$, образованное p-плоскостями $N_x^p \subset N_x(M_m)$, проходящими через точки $x \in M_m$, т. е. $M_{m+p} = \bigcup_{x \in M_m} N_x^p$. Подмногообразие M_{m+p} определяет свое каноническое расслоение $\pi: E_{m+p} \to M_m$, где $E_{m+p} = \{(x, y) \mid x \in M_m, y \in N_x^p\}$ и $\pi(x, y) = x$. Критические точки отображения $\varphi: E_{m+p} \to M_{m+p}$, где $\varphi(x, y) = y$, называются фокальными точками, а их образы в M_{m+p} при отображении φ — фокусами.

Фокусы на N_x^p, при параллельном N^p, составляют некоторую алгебраическую поверхность F_x, называемую фокусной поверхностью в N_x^p [1]. Она имеет размерность $(p-1)$. Аналогичной фокусной $(n-m-p-1)$-поверхностью $F_x^\perp$ обладает плоскость N_x^{n-m-p}.

В [21] доказано, что если подрасслоение N^p нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m в $K_n(c)$ параллельно и в каждой точке $x \in M_m$ обе фокусные поверхности $F_x^{\perp}$ и F_x не имеют кратных компонент, то как F_x, так и $F_x^{\perp}$ распадаются на совокупности m плоскостей. При этом подмногообразие M_m несет ортогональную сопряженную сеть линий и имеет плоскую нормальную связность. Связности в подрасслоениях N^p и N^{n-m-p}, индуцированные нормальной связностью $\nabla^{\perp}$, также являются плоскими [13]. В более общем случае, когда фокусная поверхность $F_x^{\perp}$ не имеет кратных компонент, а F_x имеет кратные компоненты, подмногообразие M_m несет ортогональную сопряженную систему поверхностей [22]. При этом фокусная поверхность F_x распадается на m $(p-1)$-плоскостей, среди которых, вообще говоря, могут быть и кратные и, кроме того, связность в подрасслоении N^p является плоской. Верно и обратное: если связность в параллельном подрасслоении N^p нормального расслоения $N(M_m)$ является плоской, то фокусная поверхность F_x распадается на m $(p-1)$-плоскостей, среди которых могут быть и кратные [13]. Имеет место следующее предложение, доказанное в [13].

Теорема 8. Пусть подмногообразие M_m в $K_n(c)$ допускает параллельное подрасслоение N^p-нормального расслоения $N(M_m)$ и пусть нормальная связность $\nabla^{\perp}$ индуцирует в N^p плоскую связность. Тогда M_m является объединением замыканий своих областей таких, что:

(1) каждая из них несет ортогональную сопряженную систему $(T^1, \ldots, T^t)$;

(2) максимальные интегральные многообразия M^u $(u=1, \ldots, t)$ распределений T^u размерностей $l_u > 1$, проходящие через некоторую точку x одной из областей, принадлежат вполне омбилическим $(n-p)$-поверхностям;

(3) центры последних принадлежат p-плоскости N_x^p, причем они лежат на плоских компонентах фокусной $(p-1)$-поверхности F_x;

(4) эти плоские компоненты, соответствующие T^u, образуют поверхности, касающиеся с $(m-l_u+p)$-плоскостью, натянутой на N_x^p и на ортогональное дополнение T_x^u в $T_x(M_m)$.

В теореме 8 интегральные многообразия M^u распределений T^u при $l_u > 1$ являются поверхностями кривизны подмногообразия M_m относительно подрасслоения N^p (подмногообразие $M' \subset M_m$ называется поверхностью кривизны подмногообразия M_m относительно подрасслоения N^p, если его касательные пространства $T_x(M')$ являются собственными подпространствами тензоров A_ξ, где $\xi \in N_x^p$). В случае, когда нормальная связность подмногообразия M_m является плоской, поверхности кривизны были введены и исследованы Оцуки [50] и Рекцигелем [53]; в [53] доказан также частный случай теоремы 8 при

$p=n-m$. В этом случае M_m несет ортогональную сопряженную систему подмногообразий M^u, $u=1, \ldots, t$, где каждое M^u, при $\dim M^u > 1$, является вполне омбилическим в $K_n(c)$ подмногообразием. Если при этом подмногообразие M_m является полным, то таковыми будут и M^u [54]. В [13] указаны также условия, при которых подмногообразие M_m в $K_n(c)$ допускает параллельное p-мерное подрасслоение $N^p \subset N(M_m)$ с плоской связностью в нем.

К подмногообразиям с параллельным нормальным подрасслоением N^p относятся подмногообразия M_m в $K_n(c)$ с параллельным тензором кривизны нормальной связности $R^\perp$, т. е. $\nabla_Z^\perp (R^\perp(X, Y)\xi) - R^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = 0$ для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M_m)$ и любого $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M_m)$. Такое M_m в $K_n(c)$ изучают Коларес, ду Кармо [33]. Доказано, что подрасслоение $\bar{N} \subset N(M_m)$, где $\bar{N}_x = \{\xi_x \in N_x(M_m);\ R^\perp(X, Y)\xi = 0$ для любых $X, Y\}$ является параллельным (заметим, что связность в $\bar{N}$ плоская и применима теорема 8); если при этом M_m минимальное и связное подмногообразие, то оно содержится в своем первом соприкасающемся пространстве. Компактное M_2 с параллельным $R^\perp$ в $S^n \subset R_{n+1}$ является либо поверхностью Веронезе в S^4, либо минимальной поверхностью в S^3.

2. Есть исследования, в которых параллельность подрасслоения N^p не требуется. Последующее изучение покажет, что и определяемое ниже коммутирующее N^p, вообще говоря, не обязано быть параллельным.

Подмногообразия M_m в $K_n(c)$ с непараллельным p-мерным подрасслоением N^p ($p=1$, $p=n-m-1$) нормального расслоения $N(M_m)$ рассматривают Чен и Яно [30], [31], [32]. Непараллельное нормальное единичное векторное поле (направление) ξ называется квазипараллельным относительно другого нормального единичного векторного поля η, если ковариантная производная $\nabla_X^\perp \xi$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$ коллинеарна η, т. е. если $\nabla_X^\perp \xi = \theta(X)\eta$, где θ — некоторая 1-форма на M_m ([28], стр. 175). Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно непараллельного нормального направления ξ, а ξ — квазипараллельным относительно нормального направления η, ортогонального к ξ, то M_m есть квазиомбилическое относительно η подмногообразие (т. е. тензор A_η имеет два различных собственных значения и кратность одного из них равна $m-1$) [31]. Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно $(n-m-1)$-мерного непараллельного нормального подрасслоения N^{n-m-1}, то оно представляет из себя геометрическое место $(m-1)$-сфер в $K_n(c)$, причем единичное нормальное векторное поле η дополнительного одномерного подрасслоения является квазипараллельным относительно некоторого нормального единичного векторного поля ξ в N^{n-m-1} ([32], [28], стр. 183). При $m>3$ подмногообразие M_m в $K_n(c)$, омбилическое относительно непараллельного нормального подрасслоения N^{n-m-1}, является конформно плоским [32]. Известны и другие условия, при которых подмногообразие M_m ($m>3$) представляет из себя геометрическое место $(m-1)$-сфер и является конформно плоским. Для этого достаточно, например, чтобы M_{n-3} было псевдоомбилическим, имело плоскую нормальную связность и непараллельный вектор средней кривизны H с ненулевой постоянной длиной ([28], стр. 189). Конформно плоским подмногообразиям посвящена отдельная глава в монографии Чена [28]. В последние годы конформно плоское подмногообразие M_m в евклидовом пространстве R_n исследовали Мур и Морван [46], Сэкидзава [55], Китагава [40], Огава [48]. В [46] доказано, что подмногообразие M_m в R_{m+p} ($m\geqslant 4$, $p\leqslant m-3$) является вполне квазиомбилическим (т. е. на M_m существуют p единичных попарно ортогональных нормальных векторных полей $e_{m+1}, \ldots, e_{m+p}$ таких, что относительно каждого из них M_m является квазиомбилическим) тогда и только тогда, когда M_m — конформно плоское подмногообразие (необходимость доказна Ченом и Яно [28]). В каждой точке x конформно плоского в M_m в R_{m+p} ($m\geqslant 4$, $p\leqslant m-3$) с положительными секционными кривизнами касательное пространство $T_x(M_m)$ содержит подпространство размерности $r\geqslant m-p$, во всех направлениях которого нормальная кривизна имеет одинаковые значения; получаемое при этом омбилическое распределение инволютивно и дает омбилическое подмногообразие в M_m и R_{m+p} [55]. Эти результаты остаются справедливыми, если освободиться от условия положительности секционных кривизн в M_m [40]. В [48] исследуются омбилические подпространства конформно плоского M_m с отрицательными секционными кривизнами.

3. Покажем, что исследование строения подмногообразия M_m в $K_n(c)$ с параллельным p-мерным нормальным подрасслоением можно включить в более общую схему.

Определение 1. p-мерное подрасслоение N^p нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m будем называть коммутирующим, если для любого $\xi\in N^p$ имеет место $R^\perp(X, Y)\xi\in N^p$ для любых $X, Y\in \mathrm{X}(M_m)$.

Пусть N^1 — одномерное коммутирующее подрасслоение нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m и $\xi\in N^1$ — единичное нормальное векторное поле. Тогда мы можем написать $R^\perp(X, Y)\xi=\Theta(X, Y)\xi$, где Θ — некоторая 2-форма. Применяя уравнение Риччи (6), будем иметь

$$0=g([A_\xi, A_\xi]\ (X),\ Y)=g^\perp(R^\perp(X,\ Y)\xi,\ \xi)=\Theta(X,\ Y).$$

Следовательно, ξ является коммутирующим нормальным векторным полем. Очевидно, что всякое ненулевое векторное поле $\zeta \in N^1$ также является коммутирующим.

Лемма 6. p-мерное параллельное подрасслоение N^p нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m является коммутирующим.

Доказательство. Пусть $\xi \in N^p$. Так как N^p — параллельное подрасслоение, то $\nabla^{\perp}_X \xi \in N^p$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$. Следовательно, $R^{\perp}(X, Y)\xi \in N^p$ для любых X, $Y \in \mathfrak{X}(M_m)$, что и требовалось доказать.

Следующая лемма обобщает соответствующее свойство параллельного подрасслоения N^p (см. п. 1 настоящего параграфа).

Лемма 7. Если p-мерное подрасслоение $N^p \subset N(M_m)$ является коммутирующим, то таким будет и его ортогональное дополнение N^{n-m-p} в $N(M_m)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in N^p$, $\eta \in N^{n-m-p}$. Так как для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$ имеем $R^{\perp}(X, Y)\xi \in N^p$, то из уравнения Риччи (6) следует, что $[A_\xi, A_\eta]=0$. Но тогда и $g^{\perp}(R^{\perp}(X, Y)\eta, \xi)=0$. Отсюда, в силу произвольности ξ, получаем, что $R^{\perp}(X, Y)\eta$ ортогонально к N^p, т.е. $R^{\perp}(X, Y)\eta \in N^{n-m-p}$ для любого η из N^{n-m-p}. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 7 мы получили, что $[A_\xi, A_\eta]=0$ для любого $\xi \in N^p$ и любого $\eta \in N^{n-m-p}$. Верно и обратное: если N^p — такое p-мерное подрасслоение в $N(M_m)$, что $[A_\xi, A_\eta]=0$ для любого $\xi \in N^p$ и любого $\eta \in N^{n-m-p}$, то N^p — коммутирующее подрасслоение.

Изучим один частный класс подмногообразий с p-мерным коммутирующим нормальным подрасслоением.

Определение 2. Коммутирующее подрасслоение N^p нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m будем называть вполне коммутирующим, если любое нормальное векторное поле $\xi \in N^p$ является коммутирующим.

Следующие леммы доказывают существование подмногообразий этого класса.

Лемма 8. Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно p-мерного подрасслоения N_p нормального расслоения $N(M_m)$, то N^p — вполне коммутирующее подрасслоение.

Доказательство. Пусть $\xi \in N^p$. Тогда $A_\xi = \lambda I$ и, следовательно, ξ является коммутирующим нормальным векторным полем. Тогда $R^{\perp}(X, Y)\xi = 0$ для любых X, $Y \in \mathfrak{X}(M_m)$ и подрасслоение N^p является коммутирующим. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть подмногообразие M_m допускает параллельное подрасслоение N^p нормального расслоения $N(M_m)$, в котором нормальная связность $\nabla^{\perp}$ индуцирует плоскую связность. Тогда N^p является вполне коммутирующим подрасслоением.

Доказательство. Пусть $\xi \in N^p$. Так как связность в N^p плоская, то $R^{\perp}(X, Y)\xi = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$, что и требовалось доказать.

4. Пусть N^p является p-мерным вполне коммутирующим подрасслоением нормального расслоения $N(M_m)$ подмногообразия M_m. Тогда $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любых нормальных векторных полей ξ, η таких, что $\eta_x, \xi_x \in N^p_x$ $(x \in M_m)$. Отсюда следует, что в некотором базисе пространства $T_x(M_m)$ все тензоры A_ζ, где $\zeta_x \in N_x^p$, одновременно приводятся к диагональному виду. Однако в этом случае, связность, возникающая в N_p, не обязана быть плоской, что имело бы место, если бы N_p было параллельным. Тем не менее справедлива следующая теорема, которая обобщает часть теоремы 8, доказанной в [13].

Теорема 9. Пусть M_m является подмногообразием в $K_n(c)$ с вполне коммутирующим p-мерным подрасслоением N^p нормального расслоения $N(M_m)$. Пусть $e_{m+1}, \ldots, e_{m+p}$ — такие линейно независимые нормальные векторные поля, что $(e_k)_x \in N^p_x$, $x \in M_m$, $(k = m+1, \ldots, m+p)$, а $A_{m+1}, \ldots, A_{m+p}$ — соответствующие им вторые фундаментальные тензоры, которые в некотором ортонормированном базисе пространства $T_x(M_m)$ одновременно приведены к диагональному виду. Тогда

$$T_x(M_m) = T_x^1 \oplus \ldots \oplus T_x^r,$$

где каждое T_x^j $(j = 1, \ldots, r)$ является подпространством собственных векторов для всех A_k, отвечающим только одному собственному значению. Распределения T^j (в той области на M_m, где их размерности постоянны) инволютивны и их интегральные многообразия M^j образуют ортогональную сопряженную систему. Каждое M^j при $\dim M^j > 1$ является омбилическим относительно подрасслоения N^p. Если все T^j одномерны, то нормальная связность подмногообразия M_m плоская.

Доказательство. Пусть $M^1, \ldots, M^t$ — подмногообразия в M_m, полученные по теореме 5 при $\xi = e_{m+1}$. Пусть $\dim M^1 > 1$. Тогда M^1 является омбилическим относительно e_{m+1} и, следовательно, e_{m+1} является коммутирующим нормальным векторным полем для M^1. Покажем, что e_{m+2} также является коммутирующим нормальным векторным полем на M^1. Так как e_{m+2} является коммутирующим на M_m, то $R^{\perp}(X, Y)e_{m+2} = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$ и, в частности, для таких X, Y, которые будут касательными к M^1. Теперь коммутируемость e_{m+2} на M^1 следует из того, что $N(M_m)$, как подрасслоение нормального расслоения $N(M^1)$, является параллельным (в силу того, что $M^1, \ldots, M^t$ образуют на M_m ортогональную сопряженную систему). Точно также векторы поля $e_{m+3}, \ldots, e_{m+p}$ являются коммутирующими на M^1. Следовательно, подрасслоение N^p будет вполне коммутирующим на M^1. Теперь мы можем к M^1 применить теорему 5 при $\xi = e_{m+2}$. Продолжая до тех пор, пока исчерпаются все e_k, получим такие подмногообразия $M^1, \ldots, M^r$, что при

$\dim M^j > 1$ M^j будет омбилическим относительно векторных полей $e_{m+1}, \ldots, e_{m+p}$, а следовательно, и относительно подрасслоения N^p. Если все T^j одномерны, то все вторые фундаментальные тензоры A_η, где $\eta \in N^{n-m-p}$, также будут приведены к диагональному виду, в силу $[A_\eta, A_k]=0$, для любого $k=m+1, \ldots, m+p$. Отсюда и следует, что подмногообразие M_m будет иметь плоскую нормальную связность. Теорема доказана.

Пусть в теореме 9 подрасслоение N^p, кроме того, является параллельным. Тогда связность в N^p будет плоской и мы можем в качестве векторных полей $e_{m+1}, \ldots, e_{m+p}$, указанных в условии теоремы, взять единичные взаимно ортогональные параллельные нормальные векторные поля $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+p}$ (в N^p такие векторные поля существуют [13]). В этом случае интегральные многообразия M^j при $\dim M^j > 1$ будут вполне омбилическими в M_m и омбилическими относительно подрасслоения N^p (на каждом шаге применяется лемма 2, а параллельность, например, векторного поля ξ_{m+2} на M^1 будет следовать из его параллельности на M_m и параллельности $N(M_m)$ как подрасслоения нормального расслоения для M^1). Таким образом, при указанном дополнительном условии, мы приходим к результату Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазяна [13]. Отсюда же при $p = n-m$ получается результат Рекцигеля [53].

Если подмногообразие M_m допускает $(n-m-1)$-мерное коммутирующее подрасслоение N^{n-m-1} нормального расслоения $N(M_m)$, то единичное нормальное векторное поле ξ его ортогонального дополнения N^1 будет коммутирующим и подмногообразие M_m можно описать по теореме 5.

Пусть подмногообразие — M_m является омбилическим относительно подрасслоения N^{n-m-1} нормального расслоения $N(M_m)$. Тогда, очевидно, нормальная связность будет плоской. Если ξ — единичное нормальное векторное поле, ортогональное к N^{n-m-1}, то его ковариантные производные $\nabla^\perp_X \xi$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M_m)$ принадлежат N^{n-m-1} и подмногообразие M_m является омбилическим относительно $\nabla^\perp_X \xi$ для любого X, т. е. имеет место условие (г) теоремы 4 и можно применять лемму 2.

В заключение следует отметить, что вопрос о строении подмногообразий M_m в $K_n(c)$, допускающих коммутирующее p-мерное $(p>1)$ подрасслоение нормального расслоения, остается пока открытым. Открытым остается также поставленный в [13] вопрос о строении подмногообразий M_m с p-мерным параллельным нормальным подрасслоением N^p с неплоской связностью как в нем, так и в его ортогональном дополнении N^{n-m-p}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акивис М. А.*, Фокальные образы поверхности ранга r. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 9—19 (РЖМат, 1959, 11523)
2. —, О строении сопряженных систем на многомерных поверхностях. Изв.

высш. учебн. заведений. Математика, 1970, № 10, 3—11 (РЖМат, 1971, 4А684)
3. *Базылев В. Т.*, О многомерных сетях и их преобразованиях. В сб. «Геометрия. 1963 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 138—164 (РЖМат, 1966, 11А340)
4. —, *Кузьмин М. К., Столяров А. В.*, Сети на многообразиях. «Проблемы геометрии. Т. 12 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1981, 97—125 (РЖМат, 1981, 10А544)
5. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. «Проблемы геометрии. Т. 9 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, 247 с. (РЖМат, 1980, 1А800К)
6. *Картан Э.*, Риманова геометрия в ортогональном репере. (По лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926—1927 гг.; перев., обработка и ред. С. П. Финикова). М., Моск. ун-т, 1960, 307 с. (РЖМат, 1963, 5А467К)
7. *Лазарев А. С.*, К геометрии двумерных поверхностей в E_4. Геометрия погружен. многообразий. М., 1978, 55—61 (РЖМат, 1979, 4А715)
8. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
9. —, Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. В сб. «Геометрия. 1963 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 5—64 (РЖМат, 1966, 11А341)
10. *Лумисте Ю. Г.*, К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, 192, 12—46 (РЖМат, 1968, 5А571)
11. —, Дифференциальная геометрия подмногообразий. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 273—340 (РЖМат, 1976, 6А623)
12. —, *Чакмазян А. В.*, Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1974, № 5, 148—157 (РЖМат, 1975, 1А812)
13. —, —, Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. Проблемы геометрии. Т. 12 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1981, 3—30 (РЖМат, 1981, 10А533)
14. *Мирзоян В. А.*, Подмногообразия с параллельной фундаментальной формой высшего порядка. Тартуск. ун-т, Тарту, 1978, 47 с., библиогр. 14 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 20 июня 1978 г. № 2074—78 Деп) (РЖМат, 1978, 10А542 ДЕП)
15. —, Подмногообразия с коммутативным нормальным векторным полем. Теоретические и прикладные вопросы математики. Тезисы конференции. Тарту, 1980, 81—83
16. —, Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер. Докл. АН АрмССР, 1981, 72, № 1, 14—17
17. *Нариням В. Р.*, О гиперповерхностях евклидова пространства, несущих голономную двухкомпонентную ортогональную сопряженную систему конического типа. Укр. геометр. сб. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1978, вып. 21, 99—108 (РЖМат, 1978, 10А539)
18. *Рыжков В. В.*, Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. мат. о-ва, 1958, 7, 179—226 (РЖМат, 1959, 8465)
19. *Сельдюков Е. К.*, Некоторые сети на двумерных поверхностях в пятимерном евклидовом пространстве. Геометрия погружен. многообразий. М., 1978, 62—69 (РЖМат, 1979, 4А716)
20. *Чакмазян А. В.*, Подмногообразия с параллельным p-мерным подрасслоением нормального расслоения. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1976, № 8, 107—110 (РЖМат, 1977, 5А512)
21. —, Подмногообразия пространства постоянной кривизны с параллельным подрасслоением нормального расслоения. Укр. геометр. сб. Респ.

Межвед. темат. науч. сб., 1977, вып. 20, 132—140 (РЖМат, 1977, 11А602)

22. —, Об одном классе подмногообразий в V_c^n с параллельным p-мерным подрасслоением нормального расслоения. Мат. заметки, 1977, *22*, № 4, 477—483 (РЖМат, 1978, 2А640)

23. —, О подмногообразиях пространства постоянной кривизны с параллельными полями p-мерных направлений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, вып. 464, 137—145 (РЖМат, 1979, 2А523)

24. *Чариев А.*, К теории поверхностей в n-мерных пространствах S_n постоянной кривизны. Вiсник Київ ун-ту. Мат., мех., 1978, № 20, 123—131 (РЖМат, 1979, 2А524)

25. *Amato F.*, Variété admettant un champ normal distingué dans un espace euclidien. C. r. Acad. sci. 1978, *AB286*, № 25, A1243—A1246 (РЖМат, 1979, 2А518)

26. *Bourguignon J.-P.*, Codazzi tensor fields and curvature operators. Lect. Notes Math., 1981, *838*, 249—250 (РЖМат, 1981, 9А533)

27. *Brühlmann H.*, A remark on the mean curvature vector. Arch. Mat., 1977, *29*, № 4, 426—429 (РЖМат, 1978, 5А681)

28. *Chen Bang-Yen,* Geometry of submanifolds. New York, Marcel Dekker, 1973, 308 pp. (РЖМат, 1974, 5А753К)

29. —, Surfaces with parallel normalized mean curvature vector. Monatsh. Math., 1980, *90*, № 3, 185—194 (РЖМат, 1981, 6А653)

30. —, *Yano Kentaro,* Submanifolds umbilical with respect to a quasi-parallel normal direction. Tensor, 1973, *27*, № 1, 41—44 (РЖМат, 1974, 10А553)

31. —, —, Submanifolds umbilical with respect to a nonparallel normal direction. J. Differ. Geom., 1973, *8*, № 4, 589—597 (РЖМат, 1975, 1А743)

32. —, —, Submanifolds umbilical with respect to a non-parallel normal subbundle. Kodai Math. Semin. Rept., 1973, *25*, № 3, 289—296 (РЖМат, 1974, 3А548)

33. *Colares A. G., Carmo M. P. do,* On minimal immersions with parallel normal curvature tensor. Lect. Notes Math., 1977, *597*, 104—113 (РЖМат, 1978, 3А483)

34. *Derdziński A.*, Some remarks on the local structure of Codazzi tensors. Lect. Notes Math., 1981, *838*, 251—255 (РЖМат, 1981, 9А534)

35. *Ferus D.*, Immersions with parallel second fundamental form. Math. Z., 1974, *140*, 87—92 (РЖМат, 1975, 7А899)

36. —, Produkt-Zerlegung von Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform. Math. Ann., 1974, *211*, № 1, 1—5 (РЖМат, 1975, 4А730)

37. —, Symmetric submanifolds of Euclidean space. Math. Ann., 1980, *247*, № 1, 81—93 (РЖМат, 1980, 8А633)

38. —, A remark on Codazzi tensors in constant curvature spaces. Lect. Notes Math., 1981, *838*, 257 (РЖМат, 1981, 7А686)

39. *Guadalupe I. V.*, Submanifolds with parallel mean curvature vector. An. Acad. Brasil. cienc., 1979, *51*, № 2, 203—206 (РЖМат, 1980, 3А550)

40. *Kitagawa Yoshihisa,* Umbilics of conformally flat submanifolds. Tohoku Math. J., 1980, *32*, № 3, 433—438 (РЖМат, 1981, 5А610)

41. *Kaufogiorgos T., Hasanis T.*, A characterization of a minimal hypersurface in R^{n+1}. Rev. roum. math. pures et appl., 1979, *24*, № 8, 1213—1217 (РЖМат, 1980, 4А689)

42. *Matsuyama Yoshio,* Geometry of submanifolds with constant mean curvature. Тюю дайгаку рикогакубу киё, 1979, *22*, 23—48 (РЖМат, 1980, 11А764)

43. —, On a certain hypersurface of R^{n+1}. Tensor, 1979, *33*, № 2, 210—212 (РЖМат, 1981, 2А727)

44. —, Minimal submanifolds in S^N and R^N. Math. Z., 1980, *175*, № 3, 275—282 (РЖМат, 1981, 8А774)

45. *Moore J. D.*, Isometric immersions of Riemannian products. J. Differ. Geom., 1971, *5*, № 1, 159—168 (РЖМат, 1972, 1А1101)

46. —, *Morvan J.-M.,* Sous-variétés conformément plates de codimension quatre. C. r. Acad. sci., 1978, *AB287*, № 8, A655—A657 (РЖМат, 1979, 5A615)
47. *Naka-Miyaoka Reiko,* Minimal hypersurfaces in the space form with three principal curvatures. Math. Z., 1980, *170*, № 2, 137—151 (РЖМат, 1980, 8A636)
48. *Ogawa Yosuke,* Isometric immersions of conformally flat Riemannian spaces with negative sectional curvature. Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ., 1980, *31*, № 1, 13—21 (РЖМат, 1981, 2A673)
49. *Oliker V. I.,* On compact submanifolds with nondegenerate parallel normal vector fields. Pacif. J. Math., 1979, *83*, № 2, 481—493 (РЖМат, 1980, 8A655)
50. *Otsuki Tominosuke,* On principal normal vector fields on submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature. J. Math. Soc. Japan, 1970, *22*, № 1, 35—46 (РЖМат, 1970, 10A502)
51. —, Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifolds of constant curvature. Amer. J. Math., 1970, *92*, № 1, 145—173 (РЖМат, 1971, 3A594)
52. —, Minimal hypersurfaces with three principal curvature fields in S^{n+1}. Kodai Math. J., 1978, *1*, № 1, 1—29 (РЖМат, 1979, 1A728)
53. *Reckziegel H.,* Krümmungsflächen von isometrischen Immersionen in Räume konstanter Krümmung. Math. Ann., 1976, *223*, № 2, 169—181 (РЖМат, 1977, 3A678)
54. —, Completeness of curvature surfaces of an isometric immersions. J. Differ. Geom., 1979, *14*, № 1, 7—20 (РЖМат, 1981, 4A615)
55. *Sekizawa Masami,* Umbilics of conformally flat submanifolds in Euclidean space. Tohoku Math. J., 1980, *32*, № 1, 99—109 (РЖМат, 1980, 11A714)
56. *Simon U.,* A further method in global differential geometry. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1975, *44*, 52—69 (РЖМат, 1977, 5A520)
57. —, Codazzi tensors. Lect. Notes, Math., 1981, *838*, 289—296 (РЖМат, 1981, 9A535)
58. *Strübing W.,* Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds. Math. Ann., 1979, *245*, № 1, 37—44 (РЖМат, 1980, 5A667)
59. *Švec A.,* An integral formula for non-Codazzi tensors. Czechosl. Mat. J., 1978, *28*, № 3, 434—438 (РЖМат, 1979, 3A582)
60. *Svoboda K.,* Characterizations of the sphere in E^4 by means of the pseudoparallel mean curvature vector field. Cas. pêstov. mat., 1980, *105*, № 3, 266—277 (РЖМат, 1981, 3A651)
61. *Walden R.,* Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären. Manuscr. math., 1973, *10*, № 1, 91—102 (РЖМат, 1974, 2A577)
62. *Wegner B.,* Codazzi-Tensoren und Kennzeichnungen sphärischer Immersionen. J. Differ. Geom., 1974, *9*, № 1, 61—70 (РЖМат, 1974, 12A430)