В. О. Кузнецов, К задаче о максимуме N-го диаметра,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 154, 101–109

https://www.mathnet.ru/znsl5150

В.О.Кузнецов

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ N-ГО ДИАМЕТРА

§ I. Введение. Формулировки результатов

I°. Пусть E – ограниченное замкнутое множество на $\mathbb{C}$ и пусть $d_n(E)$, $n \geqslant 2$, – n-й диаметр E:

$$d_n(E) = \left\{ \max_{c_k, c_\ell \in E} \prod_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} |c_k - c_\ell| \right\}^{2/[n(n-1)]}$$

В дальнейшем $\mathbb{K}$ – множество всех континуумов E единичной емкости.

В задаче о максимуме $d_n(E)$, $n \geqslant 2$, в семействе $\mathbb{K}$ известен следующий результат качественного характера (см. [I,2], а также [3]).

ТЕОРЕМА А. Пусть E – экстремальный континуум указанной задачи, $c_1, \ldots, c_n$ – точки Фекете на E:

$$\prod_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} |c_k - c_\ell| = [d_n(E)]^{n(n-1)/2}.$$

Тогда E – объединение замыканий всех критических траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(z)\,dz^2 = -\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \frac{dz^2}{(z-c_k)(z-c_\ell)}. \tag{I}$$

Функция $\zeta = g(z) = z + \ldots$, реализующая конформный гомеоморфизм области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ на область $|\zeta| > 1$, удовлетворяет в D уравнению

$$\left(\frac{d\zeta}{\zeta}\right)^2 = -Q(z)\,dz^2. \tag{2}$$

При $n = 2,3,4$ известно полное решение задачи. Пусть $E_n^* = \{z : z^n \in [0,4]\}$. При $n = 2,3$ максимум $d_n(E)$ в семействе $\mathbb{K}$ реализуется только континуумами, получающимися из E_n^* линейным преобразованием $z \to Az + B$, $|A| = 1$ [I,2]. При $n = 4$ экстремальные конфигурации определяются трансцендентными условиями [3, глава 2]. Известно также, что при всех четных $n \geqslant 6$ [4,5,3] и при $n = 5$ [3] симметричный континуум E_n^* не является экстремальным.

2°. Трудность решения задачи о максимуме $d_n(E)$ обусловлена наличием достаточно большого числа конфигураций, удовлетворяющих необходимому условию теоремы А, но не реализующих искомого максимума. Поэтому представляет интерес получение результатов, позволяющих заранее исключить из рассмотрения некоторые допустимые конфигурации. В данной работе доказываются следующие теоремы, дополняющие теорему А.

ТЕОРЕМА I. Квадратичный дифференциал (I), определяющий экстремальную конфигурацию задачи о максимуме $d_n(E)$ в семействе $\mathbb{K}$, $n \geqslant 2$, не имеет нулей четного порядка, а также нулей третьего порядка.

ТЕОРЕМА 2. При $n \geqslant 2$ ни одна из точек Фекете $c_1, \ldots, c_n$ экстремального континуума E рассматриваемой задачи не может быть внутренней точкой какой-либо из аналитических дуг, образующих E.

В дальнейшем Σ – класс функций

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \tag{3}$$

мероморфных и однолистных в области $|z|>1$, Σ_0 – множество функций $f(z) \in \Sigma$, $f(z) \neq 0$ при $|z|>1$, с разложением вида

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}. \tag{4}$$

Доказательству теорем I и 2 посвящены §§I и 2. В предположении, что утверждение теоремы I неверно, в п.I^0 §I для экстремального континуума E построим, взяв произвольную функцию $f(z) \in \Sigma_0$ и основываясь на вариационной формуле работы [6], варьированный компакт E^*. В пп.2^0 и 3^0, в двух различных предположениях относительно расположения точек Фекете на E, получим для $f(z)$ соответственно оценки (20) и (24). В п.4^0 приведем примеры функций из Σ_0, для которых эти оценки не имеют места, что и завершит доказательство теоремы I. При доказательстве теоремы 2 используются лишь простые свойства континуумов наименьшей емкости.

§ 2. Доказательство теоремы I

Для $f(z) \in \Sigma$ будем рассматривать разложения:

$$-\log f'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu z^{-(\nu+1)}, \tag{5}$$

$$2\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu z^{-(\nu+1)} \tag{6}$$

и пусть

$$\widetilde{B}_\nu = B_\nu + L_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots; \tag{7}$$

здесь $B_\nu(b_1, \ldots, b_\nu)$, $L_\nu(b_0, \ldots, b_\nu)$ и $\widetilde{B}_\nu(b_0, \ldots, b_\nu)$ – многочлены от коэффициентов b_γ разложения (3).

I^{0}. Предположим, что дифференциал (I), определяющий экстремальный континуум E рассматриваемой задачи, имеет нуль порядка k в точке z_0. Достаточно считать, что $z_0 = 0$.

Пусть $E_\delta = \{z : z \in E, |z| < \delta\}$. При достаточно малых $\delta > 0$ E_δ состоит из $k+2$ дуг, выходящих их начала координат под равными углами друг к другу. Пусть $\varepsilon = \operatorname{cap} E_\delta$. Тогда существует функция $w = w(z) = z + \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma(\delta)\varepsilon^{\gamma+1}z^{-\gamma}$, отображающая конформно и однолистно внешность E_δ на область $|w| > \varepsilon$, причем указанное разложение имеет место при $|z| > \delta$. Учитывая асимптотический характер E_δ при $\delta \to 0$, получаем:

$$\lim_{\delta \to 0} a_\gamma(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant \gamma \leqslant k, \\ \frac{2}{k+2} e^{i\theta} & \text{при } \gamma = k+1. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть $f(w)$ – произвольная функция класса $\sum_0$ с разложением (4). Функция $f_\varepsilon(z) = \varepsilon f(w(z)/\varepsilon)$ однолистна во внешности E_δ. При $|z| > \delta$ имеем

$$f_\varepsilon(z) = \\ = z + \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma(\delta)\varepsilon^{\gamma+1}z^{-\gamma} + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \varepsilon^{\mu+1} z^{-\mu}\Big[1 + \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma(\delta)\varepsilon^{\gamma+1}z^{-\gamma-1}\Big]^{-\mu} = \\ = z + \sum_{\gamma=0}^{\infty} u_\gamma(\delta)\varepsilon^{\gamma+1}z^{-\gamma}, \tag{9}$$

где

$$u_\gamma(\delta) = a_\gamma(\delta) + b_\gamma + \sum_{\mu<\gamma} \pi_\mu(a_1, \ldots, a_{\gamma-\mu})b_\mu, \quad b_0 = 0,$$

а π_μ – многочлены от переменных a_i без свободного члена.

Пусть $E^* = \mathbb{C} \setminus f_\varepsilon\{z : z \in \mathbb{C} \setminus E\}$ и $c_i^* = f_\varepsilon(c_i)$. Если $c_i = 0$ при некотором i, то будем считать, что

$$c_i^* = c_i = 0 \tag{10}$$

Тогда $c_i^* \in E$. Пусть, далее,

$$-\log \frac{f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)}{x - y} = \sum_{\mu,\gamma=1}^{\infty} A_{\mu,\gamma}x^{-\mu}y^{-\gamma}, \tag{11}$$

следовательно,

$$-\log f'_\varepsilon(z) = \sum_{\gamma=2}^{\infty}\Big[z^{-\gamma}\sum_{\mu=1}^{\gamma-1} A_{\mu,\gamma-\mu}\Big]. \tag{12}$$

Очевидно,

$$A_{\mu,\gamma-\mu} = O(\varepsilon^\gamma) \tag{13}$$

Из (5),(9) и (I2) получаем

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1} A_{\mu,\nu-\mu} = B_{\nu-1}(\varepsilon^2 u_1,\ldots,\varepsilon^\nu u_{\nu-1}) = \varepsilon^\nu B_{\nu-1}(u_1,\ldots,u_{\nu-1}). \quad (I4)$$

2^0. Предположим, что ни одна из точек c_i не совпадает с началом координат, являющимся нулем порядка k дифференциала (I). Имеем:

$$\frac{n(n-1)}{2}Q(z) = -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(z-c_i)(z-c_j)} = -\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)z^{n-2}-\ldots+2(-1)^n S_{n-2}}{z^n - S_1 z^{n-1}+\ldots+(-1)^n S_n}, \quad (I5)$$

где $S_1,\ldots,S_n$ – элементарные симметрические многочлены от переменных $c_1,\ldots,c_n$:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i, \quad S_2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} c_i c_j, \ldots, \quad S_n = \prod_{i=1}^{n} c_i .$$

В силу нашего предположения,

$$S_{n-2} = S_{n-3} = \ldots = S_{n-k-1} = 0, \quad S_n \neq 0 . \quad (I6)$$

Пусть

$$\prod_{i=1}^{n}(y - c_i^{-1}) = y^n - \tilde{S}_1 y^{n-1} + \ldots + (-1)^n \tilde{S}_n .$$

Тогда

$$\tilde{S}_i = (-1)^n S_{n-i}/S_n \quad (S_0 = 1) .$$

Из (I6) находим

$$\tilde{S}_2 = \tilde{S}_3 = \ldots = \tilde{S}_{k+1} = 0 . \quad (I7)$$

Так как E – экстремальный континуум, то

$$\log d_n(E) \geqslant \log d_n(E^*) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n(n-1)} \log \prod_{\substack{i,j\leqslant n\\ i\neq j}} |c_i^* - c_j^*| = \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i\neq j}\log|c_i - c_j| + \sum_{i\neq j}\log\left|\frac{c_i^*-c_j^*}{c_i-c_j}\right|\right] =$$

$$= \log d_n(E) + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\log\left|\frac{f_\varepsilon(c_i)-f_\varepsilon(c_j)}{c_i-c_j}\right| . \quad (I8)$$

Используя (II), отсюда получаем

$$\mathrm{Re}\left\{-\sum_{i\neq j}\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} A_{\mu,\nu}c_i^{-\mu}c_j^{-\nu}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}A_{\mu,\nu-\mu}\left[\sum_{i\neq j}c_i^{-\mu}c_j^{-(\nu-\mu)}\right]\right\} \leqslant 0. \quad (I9)$$

Суммы, стоящие в квадратных скобках в (I9), являются симметрическими многочленами. Выражая их через $\tilde{S}_1,\ldots,\tilde{S}_n$ и учитывая (I3), (I4) и (I7), находим

$$\operatorname{Re}\left\{(-1)^{k+1}(k+2)\,\tilde{S}_{k+2}\sum_{\mu=1}^{k+1}A_{\mu,k+2-\mu}+o(\varepsilon^{k+2})\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{(-1)^{k+1}(k+2)\,\tilde{S}_{k+2}\,\varepsilon^{k+2}B_{k+1}(u_1,\dots,u_{k+1})+o(\varepsilon^{k+2})\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{(-1)^{k+1}(k+2)\,\tilde{S}_{k+2}\,\varepsilon^{k+2}\left[\frac{2(k+1)}{k+2}e^{i\theta}+B_{k+1}(b_1,\dots,b_{k+1})\right]+o(\varepsilon^{k+2})\right\}\leqslant 0.$$

Заменяя при построении вариации функцию $f(w)$ на $\tilde{f}(w)=e^{-i\eta}f(e^{i\eta}w)$, где η – вещественное, и устремляя ε к нулю, при надлежащем выборе η получаем для любой функции $f(z)\in\sum_0$ неравенство

$$\left|B_{k+1}(b_1,\dots,b_{k+1})\right|\leqslant 2(k+1)/(k+2)\,. \tag{20}$$

3°. Предположим теперь, что $c_n=0$. Тогда (I5) приводит к равенствам

$$S_{n-2}=S_{n-3}=\dots=S_{n-k-2}=0\,. \tag{2I}$$

Пусть T_i, $\tilde{T}_i$ – элементарные симметрические многочлены соответственно аргументов c_i и $1/c_i$, $i=1,\dots,n-1$. Имеем

$$T_i=S_i\,,\quad \tilde{T}_i=(-1)^{n-1}T_{n-i-1}/T_{n-1}\,,\ i=1,\dots,n-1\ \ (T_0=1). \tag{22}$$

В силу (2I) и (22),

$$\tilde{T}_1=\tilde{T}_2=\dots=\tilde{T}_{k+1}=0\,. \tag{23}$$

Учитывая (I0), аналогично (I8) находим

$$\log d_n(E)\geqslant\frac{1}{n(n-1)}\log\prod_{i,j\leqslant n,\,i\neq j}|c_i-c_j|=$$

$$=\log d_n(E)+\frac{1}{n(n-1)}\left\{\sum_{i,j\leqslant n-1,\,i\neq j}\log\left|\frac{f_\varepsilon(c_i)-f_\varepsilon(c_j)}{c_i-c_j}\right|+2\sum_{i=1}^{n-1}\log\left|\frac{f_\varepsilon(c_i)}{c_i}\right|\right\}.$$

Используя (II) и (6), отсюда получаем

$$\operatorname{Re}\left\{-\sum_{\substack{i,j\leqslant n-1\\ i\neq j}}\ \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}A_{\mu,\nu}c_i^{-\mu}c_j^{-\nu}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\nu=2}^{\infty}L_{\nu-1}(u_0,\dots,u_{\nu-1}\varepsilon^{\nu-1})\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{-\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}A_{\mu,\nu-\mu}\left[\sum_{\substack{i,j\leqslant n-1\\ i\neq j}}c_i^{-\mu}c_j^{-(\nu-\mu)}\right]+\sum_{\nu=2}^{\infty}L_{\nu-1}(u_0,\dots,u_{\nu-1}\varepsilon^{\nu-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}c_i^{-\nu}\right]\right\}\leqslant 0.$$

Выражая суммы, стоящие в квадратных скобках, через $\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_{n-1}$ и учитывая (I3),(I4),(2_) и (7), получаем

$$\mathrm{Re}\Big\{(-1)^{k+1}(k+2)\widetilde{T}_{k+2}\sum_{\mu=1}^{k+1}A_{\mu,k+2-\mu}+(-1)^{k+1}(k+2)\widetilde{T}_{k+2}L_{k+1}(u_0,\ldots,u_{k+1}\varepsilon^{k+1})+ + o(\varepsilon^{k+2})\Big\}=$$

$$=\mathrm{Re}\Big\{(-1)^{k+1}(k+2)\widetilde{T}_{k+2}\varepsilon^{k+2}\widetilde{B}_{k+1}(u_0,\ldots,u_{k+1})+o(\varepsilon^{k+2})\Big\}=$$

$$=\mathrm{Re}\Big\{(-1)^{k+1}(k+2)\widetilde{T}_{k+2}\varepsilon^{k+2}\Big[\frac{2(k+3)}{k+2}e^{i\theta}+\widetilde{B}_{k+1}(b_1,\ldots,b_{k+1})\Big]+o(\varepsilon^{k+2})\Big\}\leqslant 0 .$$

Следовательно, для многочленов $\widetilde{B}_k$ от коэффициентов b_ν разложения (4) произвольной функции $f(z)\in\Sigma_0$ имеем неравенство

$$|\widetilde{B}_{k+1}(b_1,\ldots,b_{k+1})|\leqslant 2(k+3)/(k+2). \qquad (24)$$

4^0. При $k=3$ из (20) и (24) вытекают соответственно неравенства $|b_4+\frac{1}{2}b_1b_2|\leqslant 2/5$ и $|b_4|\leqslant 2/5$.

Примеры функций класса Σ_0, для которых эти неравенства не имеют места, приводятся соответственно в работах [5] и [7].

Пусть теперь $k=2m$, где $m\geqslant 1$. Из (20) получаем

$$|B_{2m+1}(b_1,\ldots,b_{2m+1})| = \Big|\sum_{\mu=1}^{2m}A_{\mu,2m+1-\mu}\Big|\leqslant 2-\frac{1}{m+1}; \qquad (25)$$

где $\widetilde{A}_{\mu,\nu}$ – коэффициенты разложения

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}\widetilde{A}_{\mu,\nu}\,x^{-\mu}y^{-\nu}$$

Пример функции класса Σ_0, для которой неравенство (25) не выполняется, построен в [4]. Функция класса Σ_0, для которой при $k=2m$ не имеет места неравенство (24), может быть построена вполне аналогично.

Пусть $F(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu\in S$. Тогда $f(z)=F^{-1/(m+1)}(z^{-(m+1)})\in\Sigma_0$. Для последней функции

$$|\widetilde{B}_{2m+1}|=\frac{2m+3}{m+1}|a_3-\alpha a_2^2|,\quad\text{где}\quad \alpha=\frac{3m+6}{4m+6}<1 .$$

Как известно (см., например, [I]) существует функция $F(z)\in S$ такая, что при $0<\alpha<1$ $|a_3-\alpha a_2^2|=1+2\exp(-2\alpha/(1-\alpha))>1$.

Мы получили противоречие с утверждением, что (24) справедливо для всех функций из Σ_0. Этим теорема I доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Частными случаями теоремы I являются результаты Б.Волка [4] и А.К.Бахтина [5].

§ 3. Доказательство теоремы 2

I^0. Пусть $\gamma(a_1,a_2)$ – жорданова дуга с концами в точках a_1,

a_2, принадлежащая E, а точка Фекете c_1 – внутренняя точка дуги $\gamma(a_1,a_2)$. Пусть $\zeta=\zeta(z)$ – конформный гомеоморфизм области $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ на область $|\zeta|>1$. При этом отображении дуга $\gamma(a_1,a_2)$ переходит в две дуги $\gamma_1(\zeta_1,\zeta_2)$ и $\gamma_2(\zeta_1',\zeta_2')$ окружности $|\zeta|=1$. Выберем θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, таким образом, что при отображении $w(z)=\zeta+(e^{i\theta}\zeta)^{-1}$ точки ζ_1 и ζ_1' переходят в одну и ту же точку w_0 и выполняется условие $w(\zeta_1)<w(\zeta_2)$. Пусть ζ и ζ' – образы произвольной точки $z\in\gamma(a_1,a_2)$ при отображении $\zeta=\zeta(z)$. Так как $\zeta(z)$ удовлетворяет уравнению (2), то длины дуг $\gamma_1(\zeta_1,\zeta)$ и $\gamma_2(\zeta_1',\zeta')$ равны. Поэтому точкам ζ и ζ' при отображении $w(\zeta)$ соответствует единственная точка $w(\zeta(z))$ Следовательно, функция $w(z)=w(\zeta(z))$ непрерывна на дуге $\gamma(a_1,a_2)$, значит, $w=w(z)$ аналитична во внутренних точках дуги $\gamma(a_1,a_2)$ и можно рассмотреть обратное отображение $z=z(w)$. Пусть $b_j=w(a_j),\ j=1,2$; $b_0=w(c_1)$. Возьмем точку $b_\varepsilon=$ $=b_0+i\varepsilon$, $\varepsilon>0$, и пусть $\Gamma_\varepsilon=[-1,b_1]\cup E(b_1,b_2,b_\varepsilon)\cup[b_2,1]$, где $E(b_1,b_2,b_\varepsilon)$ – континуум наименьшей емкости, содержащий указанные точки. Известно [8, лемма 2], что

$$\operatorname{cap} E(b_1,b_2,b_\varepsilon)=\operatorname{cap}[b_1,b_2]+O(\varepsilon^4).$$

Имеем

$$\operatorname{cap}\Gamma_\varepsilon\leqslant\operatorname{cap}[-1,b_1]+\operatorname{cap}E(b_1,b_2,b_\varepsilon)+\operatorname{cap}[b_2,b_1]\leqslant 1+O(\varepsilon^4). \tag{26}$$

Пусть E_ε – образ Γ_ε при отображении $z=z(w)$, $c_\varepsilon=z(b_\varepsilon)$. Отображение $z(w)$ конформно в точке b_0: $z_w'(b_0)=p\neq 0$. Тогда

$$c_\varepsilon=c_1+ip\varepsilon+o(\varepsilon^2). \tag{27}$$

В силу (I),

$$Q(c_1)\cdot p^2>0. \tag{28}$$

Так как

$$Q(z)=-\frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{1}{z-c_i}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{z-c_i}+\sum_{2\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{1}{(z-c_k)(z-c_\ell)}\right]$$

и c_1 – точка регулярности функции $Q(z)$, то

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{c_1-c_i}=0 \tag{29}$$

Теперь из (28) получаем

$$Q(c_1)\,p^2 = -\frac{2}{n(n-1)}\left\{\sum_{2\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{1}{(c_1-c_k)(c_1-c_\ell)} - \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(c_1-c_i)^2}\right\}p^2 =$$

$$= -p^2\cdot\frac{6}{n(n-1)}\sum_{2\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{1}{(c_1-c_k)(c_1-c_\ell)} > 0\,. \tag{30}$$

Имеем

$$d_n(E_\varepsilon)^{n(n-1)/2} \geqslant \prod_{2\leqslant k<\ell\leqslant n}|c_k-c_\ell|\cdot\prod_{i=2}^{n}|c_\varepsilon-c_i| = d_n(E)^{n(n-1)/2}\cdot\prod_{i=2}^{n}\left|\frac{c_\varepsilon-c_i}{c_1-c_i}\right|. \tag{31}$$

Из (27),(29) и (30) следует, что

$$\prod_{i=2}^{n}\left|\frac{c_\varepsilon-c_i}{c_1-c_i}\right| = 1+\tau\varepsilon^2+o(\varepsilon^2),$$

где

$$\tau = -p^2\sum_{2\leqslant k<\ell\leqslant n}\frac{1}{(c_1-c_k)(c_1-c_\ell)} > 0\,.$$

Теперь из (31) находим

$$d_n(E_\varepsilon) \geqslant d_n(E)\left(1+\frac{2\tau}{n(n-1)}\varepsilon^2\right)+o(\varepsilon^2)\,. \tag{32}$$

Пусть $\widetilde{E}_\varepsilon = \{z : z\cdot \operatorname{cap} E_\varepsilon \in E_\varepsilon\}$. Тогда $\operatorname{cap}\widetilde{E}_\varepsilon = 1$. В силу (26) и (32),

$$d_n(\widetilde{E}_\varepsilon) = d_n(E_\varepsilon)(\operatorname{cap}E_\varepsilon)^{-1} \geqslant d_n(E)+\frac{2\tau\varepsilon^2}{n(n-1)}+o(\varepsilon^2).$$

Таким образом, при достаточно малых $\varepsilon>0$

$$d_n(\widetilde{E}_\varepsilon) > d_n(E),$$

что противоречит экстремальности континуума E. Этим теорема 2 доказана.

Автор благодарит Г.В.Кузьмину и С.И.Федорова за обсуждение результатов и критические замечания.

Литература

1. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд.2-е. М., 1966. 628 с.
2. R e i c h E., S c h i f f e r M. Estimates for the transfinite diameter of a contimuum. - Math.Z., 1964, Bd 85, H.1, S.91--106.
3. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.139. 240 с.

4. V o l k B. On the maximum Nth diameter. - Bull.Amer.Math. Soc., 1974, vol.80, N 3, p.446-448.
5. Б а х т и н А.К. Об n-х диаметрах континуумов. - В кн.: Некоторые вопросы современной теории функций. Новосибирск, 1976, с.11-17.
6. C h a n g A., S c h i f f e r M.M., S c h o b e r G. On the second variation for univalent functions. - J.Anal.Math., 1981, vol.40, p.
7. K u b o t a Y. On the fourth coefficient of meromorphic univalent functions. - Kodai Math.Semin.Rep., 1974/1975, vol.26, N 1, p.85-94.
8. К у з ь м и н а Г.В. О максимуме одного конформного инварианта, связанного с емкостью. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.5. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.125, с.114-127.