

В.Ф. КРАВЧЕНКО,
академик АН УССР В.Л. РВАЧЕВ, И.В. ТАЛДЫКИН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С РАЗЛИЧНЫМ ИМПЕДАНСОМ

1. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве область Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть на тело, ограниченное поверхностью $\partial\Omega$, падает первичное электромагнитное поле $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$, а рассеянное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} удовлетворяет в Ω однородным уравнениям Максвелла. Здесь и далее зависимость от времени $e^{i\omega t}$ опускаем. Ищется решение уравнения Гельмгольца в R^n ($n = 2, 3$):

$$(1) \quad \Delta \mathbf{u} + k^2 \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

удовлетворяющее эквивалентным граничным условиям

$$(2) \quad [\mathbf{nE}]|_{\partial\Omega} = -\hat{Z}_{\partial\Omega}(\omega) [\mathbf{n}[\mathbf{nH}]]$$

и условию излучения на бесконечности, обеспечивающему отсутствие волн, приходящих из бесконечности, за исключением падающей:

$$(3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (n = 2), \quad \alpha = 1 \quad (n = 3).$$

Здесь $\hat{Z}_{\partial\Omega}$ — сверхпроводящий импеданс, а \mathbf{n} — внутренняя в Ω нормаль к поверхности слоистой структуры.

Если $\mathbf{E}_t^0|_{\partial\Omega}$ — достаточно гладкая функция или $\mathbf{E}_t^0|_{\partial\Omega} \in W_2^{1/2}(\Omega)$, то при $\text{Re} \hat{Z}_{\partial\Omega} > 0$ решение краевой задачи (1)–(3), как показано в [1–3], существует и единственно. Будем решать краевую задачу (1)–(3) для определения поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в норме пространства $W_2^1(\Omega)$.

2. Как следует из [4, 5], сверхпроводящий импеданс, входящий в (2), имеет вид

$$\hat{Z}_{\partial\Omega} = ik\delta \operatorname{ctg}(d/\delta),$$

где

$$\delta^{-2} = \delta_L^{-2} + 2i\delta_{\text{СК}}^{-2}; \quad \delta_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi N_s e^2}; \quad \delta_{\text{СК}} = \frac{c^2}{2\pi\sigma\omega};$$

δ — комплексная эффективная глубина проникновения поля в сверхпроводник, учитывающая экранирование поля мейсснеровскими токами и скин-эффект в состоянии с нормальной проводимостью; δ_L — лондоновская глубина проникновения; m, e — масса и заряд электрона; N_s — число электронов в сверхпроводящем состоянии; c — скорость света; σ — проводимость металла; ω — частота падающего поля; d — толщина конечного сверхпроводящего слоя. Заметим, что (2) при $d \gg \delta$ переходит в граничное условие Шюкина–Леонтовича на поверхности массивного сверхпроводника, при $d/|\delta| \ll |ik\delta/\hat{Z}_{\partial\Omega}(\omega)| \ll 1$ — в условие Шюкина–Леонтовича на поверхности нормально проводящего металла. При $\delta \rightarrow 0$ условие (2) переходит в условие равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на границе идеальный металл — вакуум $E_t = 0$. Если же поверхность тела, в котором возбуждается электромагнитная волна, имеет переменный радиус кривизны R , то необходимым требованием для выполнения граничных условий (2) является $R_{\min} \gg \delta$.

3. В качестве примера рассмотрим решение методом R -функций [6, 7] задачи дифракции на бесконечном импедансном цилиндре со сложной формой поперечного сечения, точно описываемой уравнением чертежа $\omega(x, y) = 0$. Функция $\omega(x, y)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\omega(x, y) \in C^2(\Omega)$; 2) $\omega(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \Omega$;
- 3) $\omega(x, y) < 0, \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$; 4) $\omega(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega$;
- 5) $\frac{\partial\omega}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 1$.

Как известно [3, 8, 9], импедансные граничные условия для таких задач преобразуются к скалярным граничным условиям третьего рода. Таким образом, при дифракции E - или H -поляризованной волны, наклонно падающей на цилиндр, краевая задача для системы уравнений Максвелла с граничным условием Шукина–Леонтовича сводится к решению скалярной двумерной задачи для уравнения Гельмгольца с граничным условием третьего рода. Согласно [6] в общем случае условие третьего рода запишем в виде

$$(4) \quad \left(a_0 \frac{\partial u}{\partial n} + b_0 u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0, \quad a_0 \neq 0, \quad a_0 b_0 < 0.$$

Продолжим функции a_0, b_0, φ_0 внутрь области Ω . Пусть a, b, φ – эти функции продолжения. Воспользуемся оператором D_1 , введенным в [6], и продолжим краевое условие (4) внутрь области Ω :

$$aD_1 u + bu = \varphi + \omega\psi,$$

где ψ – произвольная функция, ω – нормализованное уравнение границы. В том случае, если сечение цилиндра представляет собой круг радиуса R без двух сегментов на расстоянии a от центра, то координатная функция $\omega(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(x, y)|_{\partial\Omega} = 0; \quad \omega(x, y) > 0 \text{ в } \Omega; \quad \omega(x, y) = r + O(1); \\ r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

строится согласно [6]. Область Ω определяется предикатом

$$F = \overline{f_1 \wedge_\alpha f_2},$$

где $f_1 = a^2 - y^2 \geq 0$ – полоса $|y| < a$; $f_2 = R_2 - x^2 - y^2$ – внутренность круга радиуса R . При таком выборе функция F будет положительная во всей внешней области Ω и равна нулю на границе $\partial\Omega$. Для удовлетворения условию $\omega = r + O(1)$ при $r \rightarrow \infty$ выбираем ω в виде $\omega(x, y) = F/\sqrt{1 + F}$. Что же касается выполнения условий в окрестности "особых точек", то применение R_α -операций [6] позволяет сгладить рассматриваемый контур, тем самым исключив влияние "особых точек".

Решение ищем в виде

$$(5) \quad u = \Phi_0 + \omega\Phi_1.$$

Подставив (5) в (4) и учтя свойства оператора D_1 , получаем

$$(6) \quad aD_1\Phi_0 + a\Phi_1 D_1\omega + a\omega D_1\Phi_1 + b\Phi_0 + b\omega\Phi_1 - \varphi = \omega\psi.$$

Так как $\frac{\partial\omega}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 1$, то $D_1\omega|_{\partial\Omega} = 1$. Следовательно, $D_1\omega = 1 + O(\omega) = 1 + \omega\chi$. Из

(6) следует, что

$$(7) \quad aD_1\Phi_0 + a\Phi_1 + b\Phi_0 - \varphi = \omega\psi_0; \quad \psi_0 = \psi - b\Phi_1 - a\Phi_1\chi + aD_1\Phi_1.$$

Решив (7) относительно Φ_1 и подставив его в (5), получим

$$(8) \quad u = \Phi_0 + \frac{\omega}{a} (\omega\psi_0 - b\Phi_0 - aD_1\Phi_0 + \varphi).$$

Это выражение является структурой решения задачи, так как при любом выборе Φ_0 и ψ_0 удовлетворяется краевое условие (4).

4. Чтобы удовлетворить условию излучения на бесконечности для внешней задачи, необходимо "нормировать" предложенную структуру по ω . После "нормировки" получим

$$u = \Phi_0 + \frac{\omega^2\psi_0}{a(1+\omega^5)^{1/2}} - \frac{\omega b\Phi_0}{a(1+\omega^3)^{1/2}} - \frac{\omega}{(1+\omega^3)^{1/2}} \times \\ \times \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \right) + \frac{\omega\varphi}{(1+\omega^3)^{1/2}}.$$

Неопределенные компоненты структуры Φ_0 и ψ_0 будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\sum_{\substack{i+k=0 \\ i, k \geq 0}} C_{ik} P_i \left(\frac{x}{1+\omega} \right) P_k \left(\frac{y}{1+\omega} \right), \quad C_{ik} = A_{ik} + iB_{ik}.$$

Коэффициенты C_{ik} находятся из условия наилучшего удовлетворения уравнению Гельмгольца регуляризованным методом наименьших квадратов [11] либо методом Бубнова-Галеркина [6, 7]

5. Предложенный и обоснованный метод для решения краевых задач электродинамики для областей сложной формы с произвольным импедансом имеет существенное отличие от известных методов теории дифракции [3, 8, 9]. Отличительной особенностью данного подхода является то, что геометрическая информация об объектах учитывается без какой-либо аппроксимации, а переход от одного тела сложной формы к другой не затрагивает внутреннюю структуру алгоритма, заменяя в нем лишь одно уравнение чертежа другим.

Развитый в работе подход может оказаться эффективным для развития теории и вычислительных алгоритмов [7] широкого класса внутренних и внешних краевых задач электродинамики для объектов сложной формы с различным импедансом. Конкретные схемы решения прикладных задач распространения волн в волноводах и резонаторах имеются, например, в [11-13].

Поступило
1 VII 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. Избр. тр. Математика, М.: Наука, 1985. 447 с.
2. Крейн С.Г., Куликов И.М. - Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 7, с. 1275-1282.
3. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. Андрусенко А.М., Богомолов А.С., Кравченко В.Ф., Менде Ф.Ф. - Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 6, с. 1078-1083.
5. Кравченко В.Ф. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 1, с. 63-66.
6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
7. Рвачев В.Л., Манько Г.П. Автоматизация программирования в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1983. 229 с.
8. Курушин Е.П., Нефедов Е.И. Электродинамика анизотропных волноведущих структур. М.: Наука, 1983. 223 с.
9. Галишикова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.
10. Тихонов А.Н. - ДАН, 1985, т. 280, № 3, с. 559-563.
11. Кравченко В.Ф., Нефедов Е.И. - ДАН, 1979, т. 248, № 1, с. 74-77.
12. Кравченко В.Ф., Нефедов Е.И. - ДАН, 1981, т. 256, № 5, с. 1097-1100.
13. Кравченко В.Ф., Бондаренко А.М. - Радиотехника и электроника, 1984, т. 29, № 6, с. 1196.