Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. G. Gein, Projections of two-step nilpotent Lie algebras,
*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1980, Number 1, 12–15

https://www.mathnet.ru/eng/ivm4263

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.85
December 9, 2025, 14:44:04

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1980 МАТЕМАТИКА №1 (212)

*А. Г. Гейн* УДК 512

# ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДВУСТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Один из основных позитивных результатов решеточной теории групп заключается в том, что каждое проектирование (решеточный изоморфизм) неабелевой нильпотентной группы без кручения индуцируется изоморфизмом (Л. Е. Садовский [4]). А. А. Лашхи [2] теми же методами получил сходный результат в категории алгебр Ли: проектирование чистых неабелевых нильпотентных алгебр Ли с неодномерными факторами верхнего центрального ряда над областью главных идеалов, не являющейся полем, индуцируется их изоморфизмом. В случае алгебр над полем, где решетка подалгебр несет значительно меньшую информацию о самой алгебре, им же построен пример автопроектирования трехмерной нильпотентной алгебры, не индуцируемого никаким автоморфизмом. Вопрос о решеточной определяемости нильпотентных алгебр над полем оставался открытым. Наша заметка преследует две цели: дать в общем случае отрицательный ответ на этот вопрос (мы покажем, что существует проектирование между двумя неизоморфными нильпотентными алгебрами над полем с центром сколь угодно большой размерности); получить для двуступенно нильпотентных алгебр над полем критерий их проектируемости друг на друга на языке структурных констант.

Везде далее через $\langle X\rangle$ обозначена подалгебра, порожденная множеством $X$, $L'=[L, L]$ — коммутант алгебры $L$, $Z(L)$ — центр алгебры $L$, $\mathscr{L}(L)$ — решетка подалгебр алгебры $L$. Остальные обозначения стандартны.

При построении соответствий между элементами проектирующихся алгебр мы исходим из основной теоремы проективной геометрии: каждое полулинейное преобразование векторных пространств размерности не меньше 3 определяет их проектирование, и наоборот, каждое проектирование индуцируется некоторым полулинейным преобразованием (см. [1], с. 62). В случае неабелевых алгебр Ли над полем $\Phi$ уже не каждое полулинейное преобразование индуцирует проектирование. Для двуступенно нильпотентных алгебр этот вопрос решает

Лемма 1. *Пусть $N$ — двуступенно нильпотентная алгебра Ли с неодномерным центром. Для того, чтобы биекция $\sigma$ между $N$ и нильпотентной алгеброй $M$ индуцировала проектирование $N$ на $M$ и являлась полулинейным преобразованием на любой абелевой подалгебре из $N$, необходимо и достаточно выполнения условий:*

1) $(\alpha a)^\sigma=\alpha^\sigma a^\sigma$, *где* $\alpha\to\alpha^\sigma$ — *автоморфизм поля* $\Phi$, *не зависящий от выбора* $a$;

2) $(a+b)^\sigma=a^\sigma+b^\sigma+c^\sigma$, *где* $c\in\langle a, b\rangle'$;

3) $[a, b]^\sigma=\lambda[a^\sigma, b^\sigma]$, *где* $\lambda$ *не зависит от выбора* $a$ *и* $b$ *и* $\lambda\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Условие 1) очевидно. Кроме того, любые два некоммутирующих элемента порождают трехмерную подалгебру. Это означает, что $[a, b]^\sigma=\lambda(a, b)[a^\sigma, b^\sigma]$ и $(a+b)^\sigma=\alpha a^\sigma+\beta b^\sigma+\gamma c^\sigma$, где $c=[a, b]$. Отметим еще, что $(\Phi t)^\sigma=\Phi t^\sigma$.

Пусть $z\in Z(N)\setminus\Phi c$. Тогда

$$(\Phi(a+b+z))^\sigma\leqslant\langle\Phi(a+z)+\Phi b\rangle^\sigma\cap\langle\Phi a+\Phi(b+z)\rangle^\sigma=\langle\Phi(a+z)+\Phi b+\Phi c\rangle^\sigma\cap$$
$$\cap(\Phi a+\Phi(b+z)+\Phi c)^\sigma=((\Phi(a+z))^\sigma+(\Phi c)^\sigma+(\Phi c)^\sigma)\cap((\Phi a)^\sigma+(\Phi(b+z))^\sigma+$$
$$+(\Phi c)^\sigma)=(\Phi(a+z)^\sigma+\Phi b^\sigma+\Phi b^\sigma)\cap(\Phi a^\sigma+\Phi(b+z)^\sigma+\Phi c^\sigma)=(\Phi(a^\sigma+z^\sigma)+$$
$$+\Phi b^\sigma+\Phi c^\sigma)\cap(\Phi a^\sigma+\Phi(b^\sigma+c^\sigma)+\Phi c^\sigma)=\Phi(a^\sigma+b^\sigma+z^\sigma)+\Phi c^\sigma.$$

Итак, $(a+b)^\sigma+z^\sigma=(a+b+z)^\sigma=\mu(a^\sigma+b^\sigma+z^\sigma)+\gamma c^\sigma$, откуда $\alpha=\beta=\mu=1$.

Пусть $[a, b]^\sigma = \lambda [a^\sigma, b^\sigma]$. Покажем, что для любого $t \in N$ имеет место равенство $[a, t]^\sigma = \lambda [a^\sigma, t^\sigma]$.

Случай А. $[a, t] = \omega [a, b]$. Тогда $[a, t - \omega b] = 0$. Это значит, что $[a^\sigma, (t - \omega b)^\sigma] = 0$. Однако ввиду двуступенной нильпотентности $[a^\sigma, (t - \omega b)^\sigma] = [a^\sigma, t^\sigma] - [a^\sigma, \omega^\sigma b^\sigma]$, т. е. $[a^\sigma, t^\sigma] = \omega^\sigma [a^\sigma, b^\sigma]$. Следовательно, $[a, t]^\sigma = \omega^\sigma [a, b]^\sigma = \omega^\sigma \lambda [a^\sigma, b^\sigma] = \lambda [a^\sigma, t^\sigma]$.

Случай Б. $[a, b]$ и $[a, t]$ линейно независимы. Поскольку $[a, t]^\sigma = \mu [a^\sigma, t^\sigma]$, то $[a, b + t]^\sigma = \nu [a^\sigma, (b + t)^\sigma] = \nu [a^\sigma, b^\sigma] + \nu [a^\sigma, t^\sigma]$, $[a, b + t]^\sigma = ([a, b] + [a, t])^\sigma = [a, b]^\sigma + [a, t]^\sigma = \lambda [a^\sigma, b^\sigma] + \mu [a^\sigma, t^\sigma]$, однако $[a^\sigma, b^\sigma]$, $[a^\sigma, t^\sigma]$ — линейно независимы, так что $\lambda = \mu = \nu$.

Докажем теперь, что для любых $t$ и $s$ имеем $[t, s]^\sigma = \lambda [t^\sigma, s^\sigma]$. Действительно, $[a, t]^\sigma = \lambda [a^\sigma, t^\sigma]$. Считая теперь $t$ за $a$, $a$ за $b$, $s$ за $t$, получаем нужное соотношение.

Достаточность. Пусть $K$ — подалгебра $N$. Тогда $K^\sigma$ — также подалгебра, ибо для любых $x^\sigma, y^\sigma \in K^\sigma$ $[x^\sigma, y^\sigma] = \frac{1}{\lambda} [x, y]^\sigma \in K^\sigma$, $x^\sigma + y^\sigma = (x + y)^\sigma - z^\sigma = (x + y - z)^\sigma \in K^\sigma$, где $z \in \langle x, y \rangle'$. Аналогично прообраз любой подалгебры из $M$ является подалгеброй. Следовательно, $\sigma$ индуцирует проектирование. Полулинейность $\sigma$ на каждой абелевой подалгебре вытекает из (1) и (2).

Опустить условие $\dim Z(N) > 1$ нельзя, как показывает

Пример 1. Пусть $N_3$ — трехмерная нильпотентная алгебра, $N_3 = \Phi x + \Phi y + \Phi z$, где $z = [x, y] \in Z(N_3) = N_3'$. На всех двумерных подалгебрах, кроме $\langle x + y, z \rangle$ и $\langle 2x + y, z \rangle$, рассмотрим тождественное отображение $\sigma$ их на себя. Каждый элемент $\alpha(x + y) + \beta z$ отобразим на элемент $\alpha(2x + y) + \beta z$, и наоборот. Легко проверить, что полученная биекция $N_3$ на себя индуцирует автопроектирование, линейна на любой абелевой подалгебре, но не удовлетворяет условию (2).

Существование биекций, индуцирующих проектирование, обеспечивает

Лемма 2. *Пусть $\varphi$ — проектирование $N$ на $M$, где $N$ и $M$ — нильпотентные алгебры над полем $\Phi$. Если $\dim N > 2$ и $\dim Z(N) > 1$, то существует биекция $\sigma$ алгебры $N$ на $M$, индуцирующая $\varphi$ и полулинейная на каждой абелевой подалгебре.*

Доказательство. Пусть $A$ — произвольная максимальная абелева подалгебра $N$. Тогда $A^\varphi$ также является абелевой подалгеброй ([5], теорема 1). Очевидно, что $Z(N) \subset A$, и потому $\dim A \geqslant 3$. Зафиксируем $y \in Z(N)$, $y \neq 0$, $y' \in (\Phi y)^\varphi$, $y' \neq 0$, $z \in Z(N) \setminus \Phi y$. Пусть $a$ принадлежит $A$ и линейно не зависит от $y$ и $z$. Рассмотрим частичные функции $h(y, y', t)$, $h(z, z', t)$, $h(a, a', t)$, где $z' = h(y, y', z)$, $a' = h(y, y', a)$, построенные в [1] (с. 63—67). Как известно, для любого $t$ из $A$ определены, по крайней мере, две из них, и притом значения всех определенных функций совпадают. Через $t^\sigma$ обозначим это общее значение. Тогда $\sigma$ является полулинейным преобразованием на $A$ ([1], с. 67—69). Поскольку каждый элемент лежит в некоторой максимальной абелевой подалгебре, функция $\sigma$ всюду определена на $N$. Она однозначна, ибо два из трех значений функции $h$ не зависят от выбора $A$. Очевидно также, что эта функция сюръективна. Пусть теперь $t_1^\sigma = t_2^\sigma$. Очевидно, что $t_1$ и $t_2$ не могут лежать в одной максимальной абелевой подалгебре. Пусть $t_1 \in A_1$, $t_2 \in A_2$. Поскольку $A_1^\varphi = A_1^\sigma$ и $A_2^\varphi = A_2^\sigma$, $(A_1 \cap A_2)^\varphi = A_1^\sigma \cap A_2^\sigma$ и $t_1^\sigma = t_2^\sigma \in A_1^\sigma \cap A_2^\sigma$. Значит, существует $t \in A_1 \cap A_2$, для которого $t^\sigma = t_1^\sigma = t_2^\sigma$. Полученное противоречие доказывает инъективность $\sigma$.

Нам осталось проверить, что для любой подалгебры $K$ из $N$ выполняется $K^\sigma = K^\varphi$. Для абелевых подалгебр это доказано в [1] (с. 60, 68). Если $k \in K$, то $K^\varphi \geqslant (\Phi k)^\varphi = \Phi k^\sigma$, т. е. $K^\sigma \subset K^\varphi$. Если $t' \in K^\varphi$, положим $t^\sigma = t'$. Тогда $(\Phi t)^\varphi = (\Phi t)^\sigma = \Phi t' \subseteq K^\varphi$, откуда $\Phi t \subseteq K$, т. е. $K^\varphi \subseteq K^\sigma$.

Замечание. В условиях леммы 2 отображение $\sigma$ определено с точностью до умножения на ненулевую константу из поля $\Phi$. Действительно, ограничение $\sigma$ на любую максимальную абелеву подалгебру определено с точностью до константы ([1], с. 62), и эта константа не зависит от выбора максимальной подалгебры, ибо любая из них содержит центр. С другой стороны, ясно, что умножение $\sigma$ на ненулевую константу дает биекцию, полулинейную на любой абелевой подалгебре и индуцирующую то же самое проектирование $\varphi$.

Опустить условие $\dim Z(N) > 1$ нельзя, как показывает

Пример 2. Пусть $N = A_n \oplus \Phi b$, где $A_n = \Phi a_1 \times \ldots \times \Phi a_n$, $[a_{i+1}, b] = a_i$, $[a_1, b] = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\Phi$ — поле рациональных чисел. Тогда $N$ допускает автопроектирование, тождественное на $A_n$ и не индуцируемое преобразованием, которое полулинейно на всех абелевых подалгебрах.

Доказательство проведем индукцией по $n$. Если $n = 1$, то существует автопроектирование, оставляющее на месте $\Phi a_1$ и не индуцируемое полулинейным преобразованием (см. [1], с. 70).

Определим теперь отображение $\varphi: \mathcal{L}(N) \to \mathcal{L}(N)$, положив его тождественным на решетке подалгебр любой $n$-мерной подалгебре, кроме $\mathcal{L}(A_{n-1} \oplus \Phi b)$. По предположению индукции существует автопроектирование $A_{n-1} \oplus \Phi b$, тождественное на $A_{n-1}$ и не индуцируемое преобразованием, полулинейным на всех абелевых подалгебрах. Легко видеть, что, доопределив $N^{\varphi} = N$, получим нужное автопроектирование.

Отметим еще, что могут существовать проектирования, не индуцируемые полулинейным преобразованием всей алгебры.

Пример 3. Пусть $N = N_3 \times \Phi a$, где $\Phi$ — поле вещественных чисел. Рассмотрим отображение $\sigma: \alpha a + \xi x + \eta y + \zeta z \to \alpha a + \xi x + \eta y + (\sqrt[3]{\xi^3 + \eta^3} + \zeta) z$. Непосредственно вычислениями убеждаемся в выполнении условий (1)—(3) леммы 1. Тем самым $\sigma$ определяет автопроектирование $N$ и полулинейно на каждой абелевой подалгебре. Сделанное выше замечание показывает, что построенное автопроектирование не может индуцироваться никаким полулинейным преобразованием $N$.

Мы будем говорить, что структурные тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ сопряжены автоморфизмом $\sigma$ поля $\Phi$, если структурные константы $\mathbf{T}'$ получаются из структурных констант $\mathbf{T}$ применением автоморфизма $\sigma$. Ясно, что $\mathbf{T}'$ — структурный тензор некоторой алгебры Ли, если таков $\mathbf{T}$.

Теорема. *Двуступенно нильпотентные алгебры $N$ и $M$ над полем $\Phi$ допускают проектирование друг на друга тогда и только тогда, когда в подходящих базисах их структурные тензоры сопряжены автоморфизмом основного поля $\sigma$.*

Доказательство. Пусть $N$ проектируется на $M$. Если $\dim Z(N) = 1$, то $\dim Z(M) = 1$ и $N$ изоморфна $M$. Если же $\dim Z(N) > 1$, то рассмотрим биекцию $\sigma$, построенную в лемме 2 (если $\dim N = 2$, то $N$ абелева и утверждение теоремы очевидно). Выберем в $N$ базис $\{a_\alpha, a_{\beta\gamma} = [a_\beta, a_\gamma] \mid a_\alpha$ — линейно независимы по $\operatorname{mod} N'\}$. Тогда $\{a_\alpha^\sigma, [a_\beta^\sigma, a_\gamma^\sigma]\}$ — базис $M$. Если теперь $[a_\nu, a_\mu] = \sum_{\beta,\gamma} \tau_{\beta\gamma} a_{\beta\gamma}$, то $[a_\nu^\sigma, a_\mu^\sigma] = \frac{1}{\lambda}[a_\nu, a_\mu]^\sigma = \frac{1}{\lambda}\sum_{\beta,\gamma}(\tau_{\beta\gamma} a_{\beta\gamma})^\sigma = \frac{1}{\lambda}\sum_{\beta,\gamma}\tau_{\beta\gamma}^\sigma a_{\beta\gamma}^\sigma = \sum_{\beta,\gamma}\tau^\sigma [a_\beta^\sigma, a_\gamma^\sigma]$, т. е. в этих базисах структурные тензоры $N$ и $M$ сопряжены автоморфизмом $\sigma$.

Обратно, пусть $\mathbf{T}$ — структурный тензор алгебры $N$ в базисе $\{e_\alpha\}$. Рассмотрим алгебру $M$ с сопряженным тензором $\mathbf{T}'$ в базисе $\{l_\alpha\}$. Положим $\left(\sum \varkappa_\alpha e_\alpha\right)^\sigma = \sum \varkappa_\alpha^\sigma l_\alpha$. Ясно, что $\sigma$ — биекция $N$ на $M$. Кроме того, $[e_\alpha, e_\beta]^\sigma = \left(\sum_\gamma \tau_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma\right)^\sigma = \sum_\gamma \tau_{\alpha\beta\gamma}^\sigma l_\gamma = [l_\alpha, l_\beta]$. Прямые вычисления показывают теперь, что для $\sigma$ выполнены условия (1)—(3) леммы 1. Тем самым $\sigma$ определяет проектирование $N$ на $M$.

Используя полученный критерий, мы построим неизоморфные двуступенно нильпотентные алгебры, проектирующиеся друг на друга. Для наших целей удобен пример из работы А. И. Мальцева [3].

Пример 4. Построим предварительно некоторое поле $\Psi$. Пусть $\{\alpha_{klm}, \beta_{klm} \mid k, l, m = 2, \ldots, n;\ l < m\}$ — множество вещественных чисел, алгебраически независимое относительно поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Рассмотрим множество $\mathbf{T} = \{\tau_{klm} \mid \tau_{klm} = \alpha_{klm} + i\beta_{klm}\}$ и поле $\Psi = \mathbf{Q}(\mathbf{T})$ — подполе поля комплексных чисел. Через $\bar{\Psi}$ обозначим поле, полученное из $\Psi$ сопряжением. Элементы $\tau_{klm}$ образуют базис трансцендентности $\Psi$ над $\mathbf{Q}$; $\bar{\tau}_{klm}$ — базис трансцендентности $\bar{\Psi}$ над $\mathbf{Q}$. Легко понять, что $\{\alpha_{klm}, i\beta_{klm}\}$ — базис трансцендентности поля $\Omega$, являющегося композитом полей $\Psi$ и $\bar{\Psi}$.

Пусть алгебра $L$ над полем комплексных чисел имеет базис $\{a_j, b_{lm} \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ 2 \leqslant l < m \leqslant n\}$ с таблицей коммутирования $[a_f, a_k] = b_{fk}$, $b_{lk} = \sum \tau_{klm} b_{lm}$, $k, l, m = 2, \ldots, n;\ l < m$, и все $b_{lm}$ лежат в центре $L$. Через $\bar{L}$ обозначим алгебру с сопряженным тензором. Согласно теореме $L$ проектируется на $\bar{L}$. Допустим, что существует изоморфизм $\bar{L}$ на $L$. Значит, в $L$ существует базис $a'_j$, $c'_r$ с сопряженным структурным тензором, причем $c'_r$ лежат в центре $L$. Пусть $[a'_f, a'_k] = b'_{fk}$. Элементы $b'_{fk}$ линейно выражаются через $c'_r$ с коэффициентами из $\bar{\Psi}$. Пусть $a_j = \beta_{j1} a'_1 + \ldots + \beta_{jn} a'_n + \gamma_{11} c'_1 + \gamma_{12} c'_2 + \ldots$ Тогда $b_{fk} = [a_f, a_k] = \sum_{s,t} \beta_{fs} \beta_{tk} b'_{st}$. Это означает, что присоединенное поле системы $b_{lm}$ содержится в поле рациональных функций от $\beta_{lm}$ над полем $\bar{\Psi}$. Степень трансцендентности присоединенного поля над $\mathbf{Q}$ не превосходит, следовательно, $(n-1)^2(n-2)/2 + n^2$. Поэтому при $n \geqslant 6$ поле $\Psi$ в нем уже не содержится, ибо степень трансцендентности $\Omega$ над $\mathbf{Q}$ равна $(n-1)^2(n-2)$, что больше степени трансцендентности присоединенного поля. Полученное противоречие показывает, что для $n \geqslant 6$ алгебры $L$ и $\bar{L}$ не изоморфны.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М., ИИЛ, 1955.
2. Лашхи А. А. Структурные изоморфизмы некоторых классов алгебр Ли. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. 46, 1975, с. 5—21.
3. Мальцев А. И. Об одном классе однородных пространств. Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 13, № 1, 1949, с. 9—32.
4. Садовский Л. Е. Проектирования и изоморфизмы нильпотентных групп. Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 29, № 1, 1965, с. 171—208.
5. Гейн А. Г. Полумодулярные алгебры Ли. Сиб. матем. журн., т. XVII, № 2, 1976, с. 243—248.


г. Свердловск

Поступила
11 III 1977

---

**А. Д. Мамедов. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами в гильбертовом пространстве**

*(аннотация статьи, депонированной в ВИНИТИ, № 2754—79 Деп.)*

В статье рассматривается задача оптимального управления для линейного уравнения гиперболического типа в гильбертовом пространстве с ограничением. За критерий минимизации берется квадратичный функционал.

Нахождение оптимального управления сведено к решению определенного нелинейного интегрального уравнения. Полученное нелинейное интегральное уравнение заменяется приближенными нелинейными интегральными уравнениями и строится их решение.

Показано, что последовательность решений приближенных уравнений сходится к оптимальному уравнению. (Работа поступила в журнал „Математика“ 21 IX 1976.)

**А. И. Хейфиц. Аналог теоремы Валирона—Титчмарша для целых функций с корнями на логарифмической спирали**

*(аннотация статьи, принятой к печати)*

Теорема Валирона—Титчмарша о целых функциях с отрицательными нулями обобщается на целые функции любого конечного положительного порядка с корнями на логарифмической спирали. (Работа поступила в журнал „Математика“ 14 III 1979.)