А. И. Мальцев, Итеративные алгебры и многообразия Поста, *Алгебра и логика. Семинар*, 1966, том 5, номер 2, 5–24

А Л Г Ё Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 2 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ И МНОГООБРАЗИЯ ПОСТА

А.И.Мальцев

Обозначим через $P_A^{(m)}$ совокупность всех m -местных функций, определенных на непустом множестве A со значениями в этом же множестве. Пусть $P_A = \bigcup P_A^{(m)}$. Следующие операции над функциями из P_A можно считать в каком-то смысле самыми "элементар - ными".

Рассмотрим некоторый терм $\alpha(x_1,\dots,x_n;F_1,\dots,F_s)$, записанный с помощью предметных символов $x_1,\dots,x_n$ и функциональных символов $F_1,\dots,F_s$, имеющих какие-то "местности" или " арности " $m_1,\dots,m_s$. Подставляя в этот терм вместо символов $F_1,\dots,F_s$ символы $f_1,\dots,f_s$ некоторых конкретных функций из P_A, имеющих арности $m_1,\dots,m_s$, получим запись конкретной функции

$$f(x_1,\dots,x_n) = \alpha(x_1,\dots,x_n,f_1,\dots,f_s)$$

из P_A. Функция f называется р е з у л ь т а т о м т е р м а л ь н о й о п е р а ц и и α, произведенной над функциями $f_1,\dots,f_s$. Например, пусть A - совокупность натуральных чисел и

$$\alpha = F_1(x_2,F_2(x_1,F_1(x_1,x_3))).$$

Тогда результатом операции α, произведенной над обычными арифметическими функциями $+$, $\cdot$, будет функция

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_1(x_1+x_3).$$

Алгебра, элементами которой являются функции из P_A, а основными (сигнатурными) операциями служат всевозможные термальные операции, называется алгеброй $|A|$ - значной логики, где через $|A|$ обозначена мощность множества A.

В настоящее время, благодаря, главным образом, фундаментальным работам Е.Поста, довольно хорошо известны свойства алгебры двузначной логики, которая обычно и называется алгеброй логики. Благодаря внутреннему интересу и связям с многозначными логиками и теорией автоматов в последние годы появилось много работ, посвященных алгебрам k -значных логик $(k \geqslant 2)$ (см.С.В.Яблонский [1], Ю.И.Янов и А.А.Мучник [2], A Salomaa [5] и указанную в них литературу).

С другой стороны, параллельно теории алгебр логик возникла и стала весьма разветвленной дисциплиной теория алгебр Буля. Первый аналог алгебры Буля для случая алгебры k -значной логики был введен так же Е.Постом. Основы теории этих алгебр Поста были созданы Розенблумом (1942 [7]). Сравнительно недавно (1960 [6]) более удобное понятие решетки Поста и теория представлений этих решеток были даны Эпстейном. Классы алгебр Поста и решеток Поста термально эквивалентны и на разных языках определяют один и тот же объект, отвечающий алгебре k -значной логики.

По-видимому, до сих пор в печати не появлялось работ, изучающих более детально связи между алгебрами логик и решетками (или алгебрами) Поста. Основная цель настоящей заметки - изложить на обычном алгебраическом языке связи между указанными важными концепциями, в частности, описать теорию представлений алгебр логик на основе теории представлений решеток Поста и с её помощью дать полную классификацию подалгебр алгебры ℓ -значной логики, изоморфных алгебре k -значной логики.

Так как термальных операций бесконечно много, то алгебры логик имеют бесконечную сигнатуру. Кроме того, термальные операции применимы только к таким наборам функций, которые имеют фиксированные местности. Поэтому алгебры логик приходится рассматривать либо как алгебры с частичными операциями, либо как градуированные алгебры, что вносит нежелательные усложнения в их теорию. С целью придать стандартный алгебраический облик теории алгебр логик были сделаны предложения (см.,например, Cohn [4], Whitlock [8]) - рассматривать в качестве сигнатурных операций лишь некоторые из термальных операций. В отличие от упомянутых авторов мы предлагаем рассматривать в качестве сигнатурных операций или 5 операций $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$, определение которых указано ниже, или 4 операции ζ, τ, Δ, $*$. Через них легко выражаются все термальные операции и, главное, эти операции играют фундаментальную роль в современной теории автоматов. Вероятно, это предложение не новое, так как с ним связан, как нам кажется, ряд удобств, начиная с чисто терминологических.

Уже говорилось, что с алгеброй k -значной логики были связаны два многообразия: многообразие алгебр Поста порядка k ,введенное Розенблумом, и многообразие решеток Поста порядка k (наш термин), введенное Эпстейном. Используя способ, которым были получены эти многообразия, можно получить из алгебры k -значных логик (в том числе и бесконечно-многозначных) серию других многообразий, которые мы предлагаем называть **многообразиями Поста**. Все они термально (или "рационально",см.[3]) эквивалентны друг другу и потому представляют собою с алгебраической точки зрения единый объект.

I. **Итеративные алгебры.** Операции $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ над функциями из P_A определяем тождествами:

$$(\zeta f)(x_1,\dots,x_m) = f(x_2,\dots,x_m,x_1),$$

$$(\tau f)(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m) = f(x_2,x_1,x_3,\dots,x_m),$$

$$(\Delta f)(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{m-1}) = f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_{m-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{m+1}) = f(x_2,x_3,\dots,x_{m+1}),$$

$$(f*g)(x_1,x_2,\dots,x_{k+m-1}) = f(g(x_1,\dots,x_k),x_{k+1},\dots,x_{k+m-1}),$$

где f, g - произвольные m -местная и k -местная функции из P_A . Если функция f одноместная, то по определению полагаем

$$\zeta f = \tau f = \Delta f = f.$$

Алгебры

$$\mathfrak{P}_A = \langle P_A; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle,$$

$$\mathfrak{P}_A^* = \langle P_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$$

условимся называть соответственно **итеративной алгеброй** и **предитеративной алгеброй** над множеством A . Мощность множества A будем называть **порядком** этих алгебр. Мощности самих алгебр $\mathfrak{P}_A$,$\mathfrak{P}_A^*$ всегда бесконечны и равны, очевидно, $2^{|A|}$, если A бесконечно.

Ясно, что произвольная функция $f \in P_A$ тогда и только тогда представима в виде какого-то собственного (то есть отличного от просто предметного символа x_i) терма $\alpha(x_1,\dots,x_n; f_1,\dots,f_s)$, где $f_1,\dots,f_s \in P_A$, когда f можно получить из $f_1,\dots,f_s$ посредством операций $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$. Например,

$$f(g_1(x),\dots,g_m(x)) = \Delta^{m-1}(\zeta\dots\zeta(\zeta(f*g_1)*g_2)\dots*g_m)(x).$$

Селекторными функциями на A называются функции

$$e_i^n(x_1,\dots,x_n) = x_i \quad (i \leqslant n;\ i,n = 1,2,3,\dots).$$

Функция $e_1^1(x) = e(x) = x$ называется также единичной функцией на A . Совокупность всех селекторных функций является подалгеброй алгебр $\mathfrak{P}_A$, $\mathfrak{P}_A^*$. Соотношения

$$\Delta e_2^2 = e,$$

$$e_2^2 * e_n^n = e_{n+1}^{n+1},$$

$$\zeta^i e_n^n = e_{n-i}^n$$

показывают, что функция e_2^2 является элементом, порождающим всю упомянутую подалгебру.

Из равенства $\nabla f = f * e_2^2$ видно, что каждую термальную функцию $\alpha(x_1,\dots,x_n,f_1,\dots,f_s)$ (включая и несобственные термы вида x_i) можно получить из функций $f_1,\dots,f_s$ и селекторной функции e_2^2 с помощью лишь операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ предитеративной алгебры. Поэтому, если интересоваться лишь такими подалгебрами алгебры $\mathfrak{P}_A$, которые содержат селекторные функции, то вместо итеративной алгебры $\mathfrak{P}_A$ можно рассматривать предитеративную алгебру $\mathfrak{P}_A^*$.

2. Итеративные алгебры частичных функций. Обозначим через $Q_A^{(m)}$ совокупность всех частичных m -местных функций на A со значениями в A и положим $Q_A = \bigcup Q_A^{(m)}$. Таким образом,

$$P_A^{(m)} \subset Q_A^{(m)},\ P_A \subset Q_A.$$

Операции $\zeta, \tau, \Delta, *$ над частичными функциями f, g мы определяем теми же формулами, что и над всюду определенными функциями. При этом значение функции $f * g$ считается определенным тогда и только тогда, когда определены значения $g(x_1,\dots,x_k)$ и

$$f(g(x_1,\dots,x_k),x_{k+1},\dots,x_{k+m-1}).$$

Алгебра

$$\mathcal{G}_A^* = \langle Q_A ;\ \zeta,\tau,\Delta,* \rangle$$

будет называться **предитеративной алгеброй частичных функций** над множеством A.

Чтобы установить связь между алгебрами вида $\mathcal{P}_A^*$ и $\mathcal{G}_B$, фиксируем произвольный элемент $\omega \in A$. Функцию $f \in P_A^{(n)}$ назовем ω-функцией, если

$$x_1=\omega \vee \dots \vee x_n=\omega \to f(x_1,\dots,x_n)=\omega.$$

Легко видеть, что совокупность всех ω-функций из P_A образует подалгебру в алгебре $\mathcal{P}_A^*$. Эту подалгебру мы будем обозначать через $\mathcal{U}_A^\omega$ (или $\mathcal{U}_A$) и называть **специальной** подалгеброй. Пусть $A_\omega = A \setminus \{\omega\}$. Каждой частичной функции $f \in Q_{A_\omega}$ ставим в соответствие ту функцию $\bar{f} \in \mathcal{U}_A$, значения которой совпадают со значениями функции f в области определенности f и равны ω в области неопределенности f.

Легко проверяется, что отображение $f \to \bar{f}$ $(f \in Q_{A_\omega})$ является изоморфизмом алгебры $\mathcal{G}_{A_\omega}$ на специальную подалгебру $\mathcal{U}_A$ и, таким образом, задача изучения структуры алгебры $\mathcal{G}_{A_\omega}$ становится частным случаем задачи изучения структуры подалгебр предитеративной алгебры $\mathcal{P}_A^*$.

Если $A=\{0,1,\dots,n-1\}$, то в качестве ω будем всегда выбирать число $n-1$ и алгебры $\mathcal{P}_A^*, \mathcal{U}_A^\omega, \mathcal{G}_A$ будем обозначать через $\mathcal{P}_n^*, \mathcal{U}_n, \mathcal{G}_n$. В частности, алгебры $\mathcal{U}_n, \mathcal{G}_{n-1}$ изоморфны.

3. **Конгруентности на** $\mathcal{P}_A^*$ **и** $\mathcal{G}_A$. На алгебре $\mathcal{P}_A$ и всех её подалгебрах, как и на любой алгебре, имеются две тривиальные конгруентности $\varkappa_0, \varkappa_1$, где $\varkappa_0$ совпадает с отношением равенства, а $\varkappa_1$ с тождественно истинным отношением. Помимо конгруентностей $\varkappa_0, \varkappa_1$ на любой подалгебре из $\mathcal{P}_A$ существует еще одна конгруентность, которую мы обозначим через $\varkappa_a$ и назовём арностной. По определению $f \equiv g\ (\varkappa_a)$, если функции f, g имеют одинаковую арность. Фактор-алгебра $\mathcal{P}_A / \varkappa_a$, очевидно, изоморфна алгебре $\mathcal{P}_1$.

Введем ещё отношение $\varkappa_\omega$, полагая $f \equiv g(\varkappa_\omega)$ тогда и только тогда, когда $f=g$ или же f, g – постоянные функции, равные ω, имеющие различные арности. Легко проверяется, что $\varkappa_\omega$ является конгруентностью на подалгебре $\mathcal{U}_A^\omega$.

Наконец, если множество A состоит лишь из двух элементов a, ω, то все функции из $\mathfrak{U}_A^\omega$ разбиваем на два класса. К первому относим все постоянные функции $t_\omega^{(n)}$, равные тождественно ω, а ко второму – все остальные. Это разбиение отвечает эквивалентности $\varkappa_2$ на $\mathfrak{U}_A^\omega$, которая является и конгруентностью на $\mathfrak{U}_A^\omega$.

ТЕОРЕМА I. На произвольной подалгебре $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathcal{P}_A^*$, содержащей специальную подалгебру $\mathfrak{U}_A^\omega$ и отличной от $\mathfrak{U}_A^\omega$, никаких иных конгруентностей помимо $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_a$ не существует. Если $|A| \geqslant 3$, то на $\mathfrak{U}_A^\omega$ существуют лишь конгруентности $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_a, \varkappa_\omega$. На алгебре $\mathfrak{U}_2$ существуют 5 конгруентностей:

$$\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_a, \varkappa_\omega, \varkappa_2.$$

Доказательство разобьем на части.

а) Если для какой-то конгруентности $\varkappa$ на подалгебре $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathcal{P}_A^*$ ($\mathfrak{U}_A^\omega \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}_A^*$) в $\mathfrak{B}$ существуют две разные функции f_1, f_2, сравнимые по $\varkappa$ и имеющие одинаковые арности, то любые функции из $\mathfrak{B}$, имеющие одинаковые арности, сравнимы по $\varkappa$.

По условию в множестве A существуют такие элементы $a, \dots, c, u_1, u_2$, что $u_1 \neq u_2$ и

$$f_i(a, \dots, c) = u_i \quad (i = 1, 2).$$

Ясно, что функции $q_u, t_u^\omega, e^\omega$ $(u \in A)$, определенные условиями

$$q_u(x) = \begin{cases} u & x = u \\ \omega & x \neq u, \end{cases}$$

$$t_u^\omega(x) = \begin{cases} u & x \neq \omega \\ \omega & x = \omega, \end{cases}$$

$$e^\omega(x, y) = \begin{cases} y & x \neq \omega \\ \omega & x = \omega, \end{cases}$$

принадлежат $\mathfrak{A}^{\omega}$ и, следовательно, принадлежат $\mathcal{L}$.

Из двух различных элементов u_1, u_2 хотя бы один отличен от ω. Будем предполагать, что $u_1 \neq \omega$. Мы хотим сначала доказать, что $t_{u_1}^{\omega} \equiv t_{\omega}^{\omega} \ (\varkappa)$. Для этого придется рассмотреть два случая.

I-й случай: в $\mathcal{L}$ существует функция h, для которой $h(\omega,\ldots,\omega) \neq \omega$. Пусть $h(\omega,\ldots\ \omega) = p \neq \omega$. Тогда постоянная функция

$$t_p(x) = h(t_{\omega}^{\omega}(x),\ldots,t_{\omega}^{\omega}(x))$$

принадлежит $\mathcal{L}$, а вместе с нею подалгебре $\mathcal{L}$ будет принадлежать и любая постоянная функция $t_u(x) = t_u^{\omega}(t_p(x))$.

Из $f_1 \equiv f_2 (\varkappa)$ вытекает, что функции

$$t_{u_i}(x) = f_i(t_a(x),\ldots,t_c(x)) \quad (i=1,2)$$

$\varkappa$ -конгруентны. Из $t_{u_1} \equiv t_{u_2}$ следует $q_{u_1} * t_{u_1} \equiv q_{u_1} * t_{u_2}$, то есть $t_{u_1} \equiv t_{\omega}$, откуда

$$t_{u_1} * t_{u_1}^{\omega} \equiv t_{\omega} * t_{u_1}^{\omega} \text{ или } t_{u_1}^{\omega} \equiv t_{\omega}.$$

2-й случай: для любой $h \in \mathcal{L}$ $h(\omega,\ldots,\omega) = \omega$. Из $f_1 \equiv f_2$ теперь вытекает, что $\varkappa$ -конгруентны функции

$$f_i(t_a^{\omega}(x),\ldots,t_c^{\omega}(x)) = t_{u_i}^{\omega}(x) \quad (i=1,2).$$

Из $t_{u_1}^{\omega} \equiv t_{u_2}^{\omega}$ получаем $q_{u_1} * t_{u_1}^{\omega} \equiv q_{u_1} * t_{u_2}^{\omega}$, то есть $t_{u_1}^{\omega} \equiv t_{\omega}^{\omega}$.

Итак, в обоих случаях $t_1^{\omega} \equiv t_{\omega}^{\omega} (\varkappa)$, и потому функции

$$e^{\omega}(t_{u_1}^{\omega}(x), x) = x \qquad \text{и} \qquad e^{\omega}(t_{\omega}^{\omega}(x), x) = t_{\omega}^{\omega}(x)$$

$\varkappa$ -конгруентны.

Следовательно, для произвольной k -местной функции $f \in \mathcal{L}$ имеем $e * f \equiv t_{\omega}^{\omega} * f$, то есть $f \equiv t_{\omega}^{(k)}$, где $f_{\omega}^{(k)}$ - постоянная k -местная функция, значения которой равны ω.

б) Если для какой-то конгруентности $\varkappa$ на алгебре $\mathcal{L}$ ($\mathfrak{A}^{\omega} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_A^*$) существуют сравнимые по $\varkappa$ функции $f, g \in \mathcal{L}$, имеющие различные арности $m, n \ (m<n)$, то все постоянные ω -функции $t_{\omega}^{(k)}$ сравнимы между собой по $\varkappa$.

Из $f \equiv g$ следует $t_{\omega}^{(1)} * f \equiv t_{\omega}^{(1)} * g$, то есть $t_{\omega}^{(m)} \equiv t_{\omega}^{(n)}$. Отсюда $\Delta^{n-2}t^{(m)}_\omega \equiv \Delta^{n-2}t^{(n)}_\omega$, то есть $t^{(1)}_\omega \equiv t^{(2)}_\omega$. Отсюда далее получаем $e^\omega * t^{(1)}_\omega \equiv e^\omega * t^{(2)}_\omega$, то есть $t^{(2)}_\omega \equiv t^{(3)}_\omega$ и т.д.

в) Если для какой-то конгруентности $\varkappa$ на алгебре $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{U}^\omega \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}^*_A$) существуют сравнимые по $\varkappa$ функции $f, g \in \mathfrak{B}$, имеющие различные арности m, n и $f \neq t^{(m)}_\omega$, причем $|A| \geqslant 3$ или $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{U}^\omega$, то $\varkappa = \varkappa_1$.

Если при указанных условиях $g = t^{(n)}_\omega$, то в силу б) будем иметь $t^{(m)}_\omega \equiv t^{(n)}_\omega \equiv f$ и в силу а), б) получим $\varkappa = \varkappa_1$.

Таким образом, можно предполагать, что $f \neq t^{(m)}_\omega$, $g \neq t^{(n)}_\omega$ и $m < n$. Обозначим через $a, \ldots, c, p \in A$ те элементы, для которых $f(a, \ldots, c) = p \neq \omega$. Из $f \equiv g$ вытекает, что функции

$$\tau = \Delta^{n-2}\zeta(\ldots\zeta(f * t^\omega_a) * \ldots * t^\omega_c),$$

$$s = \Delta^{n-2}\zeta(\ldots\zeta(f * f^\omega_a) * \ldots * t^\omega_c)$$

сравнимы по $\varkappa$, причем $\tau(p) = p$. Из $\tau \equiv s$ следует

$$\Delta(e^\omega * \tau) \equiv \Delta(e^\omega * s),$$

то есть $e \equiv e^\omega * \vartheta$, где e - единичная, ϑ - одноместная функции. Если $\vartheta = t^{(1)}_\omega$, то $e^\omega * \vartheta = t^{(2)}_\omega$ и мы приходим к рассмотренному выше случаю. Пусть $\vartheta \neq t^{(1)}_\omega$. Из $\tau e = e$, $\tau e \equiv \tau(e^\omega * \vartheta)$ получаем $e^\omega * \vartheta = \tau(e^\omega * \vartheta)$. Если $e^\omega * \vartheta \neq \tau(e^\omega * \vartheta)$, то, применяя результаты а), б), снова получаем, что $\tau = \tau_1$. Поэтому можно предположить, что

$$e^\omega(\vartheta(x), y) = e^\omega(\vartheta(y), x). \qquad (I)$$

Так как $e = \Delta e \equiv \Delta(e^\omega * \vartheta)$, то можно предположить также, что $x = e^\omega(\vartheta(x), x)$ и, следовательно, $x \neq \omega \to \vartheta(x) \neq \omega$. Подставляя $x = a \neq \omega$ в (I), получим

$$y = a \quad (y \neq \omega),$$

что в случае $|A| \geqslant 3$ невозможно.

Поэтому полагаем $|A| = 2$, $A = \{\omega, a\}$ и $\mathfrak{U}^\omega \neq \mathfrak{B}$. Пусть $f \in \mathfrak{B}$, $f \notin \mathfrak{U}^\omega$. Переставляя при помощи операций ζ, τ аргументы f и применяя, если надо, операцию Δ, получим из f бинарную функцию $g \in \mathfrak{B}$, для которой $g(\omega, a) = a$ или $g(\omega, \omega) = a$.

Обратимся к функции $\vartheta(x)$ в тождестве (2). Если $\vartheta(\omega) = a$, то, полагая в (2) $x = \omega$, получим $y = \omega$ для $y = a, \omega$, что невозможно. Поэтому $v(\omega)=\omega$, $v(a)=a$ $(v\neq t_{\omega}^{(1)})$, то есть $v=e$ и сравнение $e\equiv e^{\omega}*v$ обращается в $e\equiv e^{\omega}$, откуда

$$g=g*e\equiv g*e^{\omega} \quad \text{и} \quad \zeta^2 g\equiv \zeta^2(g*e^{\omega}).$$

Поскольку $\zeta^2 g=g$, то $g*e^{\omega}\equiv \zeta^2(g*e^{\omega})$. Если

$$g*e^{\omega}\neq \zeta^2(g*e^{\omega}),$$

то в силу а), б) получаем $\varkappa=\varkappa_1$. Поэтому можно предполагать, что $g*e^{\omega}=\zeta^2(g*e^{\omega})$, то есть

$$g(e^{\omega}(x,y),z)=g(e^{\omega}(z,x),y).$$

Отсюда при $x=z=\omega$, $y=a$ получаем $g(\omega,\omega)=a$, и потому постоянная функция $t_a^{(1)}=g(t_{\omega},t_{\omega})$ принадлежит $\mathcal{B}$. Из сравнения $e\equiv e^{\omega}$ вытекает, что

$$t_a^{(1)}=e*t_a\equiv e^{\omega}*t_a=e_2^2.$$

Из $\tau t_a^{(1)}=t_a^{(1)}$ теперь получаем $e_2^2\equiv \tau e_2^2$, то есть $e_2^2\equiv e_1^2$. Так как $e_2^2\neq e_1^2$, то в силу а) б) $\varkappa=\varkappa_1$.

г) Если $\mathcal{B}\not\subseteq \mathcal{U}^{\omega}$, то $\varkappa_{\omega}$ не является конгруентностью на $\mathcal{B}$.

Действительно, если $g(\omega,a)\neq\omega$ и $t_{\omega}^{(1)}\equiv t_{\omega}^{(2)}(\varkappa)$, то $g*t_{\omega}^{(1)}\equiv g*t_{\omega}^{(2)}$, причем $g*t_{\omega}^{(1)}\neq t_{\omega}^{(2)}$. Поэтому $\varkappa\neq\varkappa_{\omega}$.

Объединяя а), б), в), г), получим теорему I.

4. **Автоморфизмы.** Обозначим через φ произвольное однооднозначное отображение A на себя. Для произвольной функции $f\in P_A$ определяем функцию f^{α} соотношением:

$$f^{\alpha}(x_1,\dots,x_n)=f(x_1\varphi^{-1},\dots,x_n\varphi^{-1}). \tag{2}$$

Легко проверяется, что отображение $\alpha: f\to f^{\alpha}$ есть автоморфизм алгебры $\mathcal{P}_A$. Соотношение (2) можно переписать в обычной форме

$$f(x_1,\dots,x_n)\varphi=f^{\alpha}(x_1\varphi,\dots,x_n\varphi). \tag{3}$$

В частности, если $\omega\in A$, $\omega\varphi=\omega$, то отображение α является автоморфизмом итеративной алгебры частичных функций $\mathcal{U}_A^{\omega}$. Автоморфизмы вида (3) подалгебр алгебры $\mathcal{P}_A$, инвариантных относительно отображения α, называются *внутренними автоморфизмами* этих подалгебр.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\omega\in A$, $\mathcal{U}$ — *подалгебра алгебры* $\mathcal{P}_A^*$, *образованная всеми* ω-*функциями из* P_A, *и* $\mathfrak{A}$ — *какая-нибудь* подалгебра алгебры $\mathfrak{P}_A^*$, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда все автоморфизмы $\mathfrak{A}$ внутренние. В частности, внутренними являются все автоморфизмы полной итеративной алгебры $\mathfrak{P}_A$ и все автоморфизмы предитеративной алгебры $\mathfrak{I}_A$ частичных функций.

Для каждого автоморфизма α алгебры $\mathfrak{A}$ нам надо построить взаимно однозначное отображение φ A на себя, удовлетворяющее условию (2) для $x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{A}$. Так как при изоморфизмах арность функций не меняется, то α является автоморфизмом полугруппы $\mathfrak{A}^{(1)}$ всех одноместных функций из $\mathfrak{A}$ относительно операции $*$, содержащей в себе полугруппу $\mathfrak{U}^{(1)}$ отображений A в себя, оставляющих неподвижной точку ω. Обычные рассуждения показывают, что α является внутренним автоморфизмом $\mathfrak{A}^{(1)}$ в указанном выше смысле. Для полноты проведем доказательство.

Обозначим через t_a постоянную одноместную функцию, всюду равную a, и через u_{pa}–функцию, определенную условиями:

$$u_{pa}(p)=p,\ u_{pa}(x)=a \quad (x\neq p).$$

Теперь сделаем несколько замечаний.

A) Если для некоторой функции $f\in P_A$ для всех $g\in\mathfrak{U}$ (и тем более для всех $g\in\mathfrak{A}$) $f*g=f$, то f постоянная.

Действительно, пусть $c\neq\omega$, $x\in A$. Берем функцию $g\in\mathfrak{U}$, для которой $g(\omega)=\omega$, $g(c)=x$. Тогда из $f*g=f$ имеем $f(x)=f(c)$.

В частности, так как $t_\omega\in\mathfrak{U}$ и из $t_\omega*g=t_\omega$ следует

$$t_\omega^\alpha * g^\alpha = t_\omega^\alpha,$$

то функция t_ω^α постоянная и потому $t_\omega^\alpha = t_{\omega^*}$ для некоторого $\omega^*\in A$.

B) $f*f_a=t_a*f \Leftrightarrow f(a)=a$.

Поэтому $\mathfrak{U}^\alpha=\mathfrak{U}_{\omega^*}$, где $\mathfrak{U}_{\omega^*}$–совокупность всех ω^*–функций из $\mathfrak{P}_A$.

C) Если f обратима и принадлежит $\mathfrak{U}_p$, то $u_{pa}*f=u_{pa}$. Если для всех обратимых f из $\mathfrak{U}_p$ имеем $g*f=g$, то $g=u_{pa}$ для подходящего a.

Доказательство очевидно.

Так как обратимые функции при автоморфизме переходят в обратимые, то из B), C) вытекает, что $u_{\omega a}^\alpha=u_{\omega^* a^*}$ для подходящего a^*.

Итак, для каждого $a \in A$ существует такое a^*, что $u^{\alpha}_{\omega a} = u_{\omega^* a^*}$. Обозначим отображение $a \to a^*$ через φ. Это отображение взаимно однозначное, так как автоморфизм α^{-1} должен переводить a^* в a.

Отображение φ порождает внутренний автоморфизм α_φ алгебры $\mathcal{P}^*_A$. Вместо автоморфизма α рассмотрим изоморфизм $\beta = \alpha\alpha_\varphi^{-1}$ алгебры $\mathfrak{A}$ на подалгебру $\mathfrak{A}^\beta$. Нам надо доказать, что изоморфизм β оставляет неподвижными все функции из $\mathfrak{A}$.

Из построения изоморфизма β видно, что $u^{\beta}_{\omega a} = u_{\omega a}$. Пусть $f \in \mathfrak{U}^{(1)}$. Из равенства $f * u_{\omega a} = u_{\omega f(a)}$ получаем $f^\beta * u_{\omega a} = u_{\omega f(a)}$, то есть $f^\beta(a) = f(a)$ $(a \in A)$ и, следовательно,

$$f^\beta = f \quad (f \in \mathfrak{U}^{(1)}).$$

Пусть теперь $f(\omega) = a \neq \omega$, $f \in \mathfrak{A}^{(1)}$. Тогда $t_a = f * t_\omega \in \mathfrak{A}$. Для произвольного $c \in A$ строим функцию g : $g(a) = c$, $g(x) = x$ $(x \neq a)$. Так как $g(\omega) = \omega$, то $g \in \mathfrak{U}$, $t_c = g * t_a \in \mathfrak{A}$, то есть в рассматриваемом случае подалгебра $\mathfrak{A}$ содержит все постоянные функции.

Покажем, что $t^\beta_c = t_c$. Введем функцию $h \in \mathfrak{U}^{(1)}$, полагая $h(c) = h(\omega) = \omega$ и $h(x) = x$ $(x \neq c)$. Так как $h * t_c = t_\omega$, то $h^\beta * t^\beta_c = t_\omega$, то есть $h * t^\beta_c = t_\omega$. Выше показано, что $t^\beta_c = t_d$ для подходящего $d \in A$. Условие $h * t^\beta_c = t_\omega$ дает $h(d) = \omega$ и, следовательно, $d = \omega$ или $d = c$. Первое невозможно, так как $t^\beta_\omega = t_\omega$. Поэтому $t^\beta_c = t_c$.

Возвратимся к функции f. Для любого $c \in A$ имеем $f * t_c = t_{f(c)}$, откуда $f^\beta * t_c = t_{f(c)}$, и потому $f^\beta(c) = f(c)$, $f^\beta = f$.

Итак, все автоморфизмы полугруппы $\mathfrak{A}^{(1)}$ внутренние. Остается лишь показать, что отображение β оставляет неподвижными и все многоместные функции из $\mathfrak{A}$.

Пусть F – произвольная бинарная функция из $\mathfrak{A}$. Для любой $f \in \mathfrak{A}^{(1)}$ имеем $\Delta(F * f) \in \mathfrak{A}^{(1)}$, и потому

$$\Delta(F * f) = (\Delta(F * f))^\beta = \Delta(F^\beta * f),$$

то есть

$$F(f(x), x) = F^\beta(f(x), x). \tag{4}$$

Если $a, b \in A$, $a \neq \omega$, то в $\mathfrak{U}^{(1)}$ лежит функция g :

$$g(a) = b, \; g(x) = x \quad (x \neq a).$$

Подставляя её в (4) вместо f , будем иметь:

$$F(a,b) = F^{\beta}(b,a) \qquad (a \neq \omega). \tag{5}$$

Переставляя у F при помощи операции τ аргументы, получим:

$$F(b,a) = F^{\beta}(b,a) \qquad (b \neq \omega). \tag{6}$$

Наконец, из $(\Delta F)^{\beta} = \Delta F$ получаем:

$$F(x,x) = F^{\beta}(x,x) \qquad (x \in A). \tag{7}$$

Соотношения (5), (6), (7) дают $F = F^{\beta}$.

Этим же способом получаем требуемое соотношение $F = F^{\beta}$ для функции F любой арности.

5. Представления итеративных алгебр. Представлением алгебры $\mathcal{P}_A$ в алгебре $\mathcal{P}_B$ называется гомоморфизм $\mathcal{P}_A$ в $\mathcal{P}_B$. Согласно п.3 гомоморфизмы $\mathcal{P}_A$, не являющиеся изоморфизмами, тривиальны,и потому изучение представлений $\mathcal{P}_A$ равносильно изучению изоморфизмов $\mathcal{P}_A$ в $\mathcal{P}_B$. Мы укажем здесь некоторые очевидные изоморфизмы, которые назовем стандартными. Далее будет показано, что произвольный изоморфизм $\mathcal{P}_A$ в $\mathcal{P}_B$ приводится к комбинации стандартных.

Пусть задано вложение $\alpha : A \to B$. Положим $C = A^{\alpha}$. Предположим, кроме того, что задана какая-то проекция $\beta : B \to C$, то есть отображение B на C , оставляющее все элементы C неподвижными. Каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{P}_A$ ставим в соответствие n -арную функцию $f_{\alpha\beta}$,определенную следующими формулами:

$$f_{\alpha}(x_1^{\alpha}, \ldots, x_n^{\alpha}) = f(x_1, \ldots, x_n)^{\alpha} \quad (x_1^{\alpha}, \ldots, x_n^{\alpha} \in A),$$

$$f_{\alpha\beta}(y_1, \ldots, y_n) = f_{\alpha}(y_1^{\beta}, \ldots, y_n^{\beta}) \quad (y_1, \ldots, y_n \in B).$$

Отображение $f \to f_{\alpha}$ есть каноническое отображение $\mathcal{P}_A$ на $\mathcal{P}_C$, индуцированное наложением $\alpha : A \to C$. Для каждой функции $g(z_1, \ldots, z_n)$ из $\mathcal{P}_C$ функция

$$g_{\beta}(y_1, \ldots, y_n) = g(y_1^{\beta}, \ldots, y_n^{\beta})$$

называется проекционным продолжением функции g на множестве B . Очевидная проверка показывает, что при проекционном продолжении операции $\zeta, \tau, \Delta, \nabla$, $*$ остаются инвариантными и потому отображение $f \to f_{\alpha\beta}$ является изоморфизмом $\mathcal{P}_A$ на подалгебру алгебры $\mathcal{P}_B$, образованную указанными продолжениями функций f_{α} .

Изоморфизмы вида $f \to f_{\alpha\beta}$ будем называть проекционными. Если α есть наложение A на B, то β – тождественное отображение B на B и изоморфизм $f \to f_{\alpha\beta}$ есть канонический изоморфизм $\mathcal{P}_A$ на $\mathcal{P}_B$. Теорема 2 показывает, что никаких других изоморфизмов $\mathcal{P}_A$ на $\mathcal{P}_B$ нет.

Допустим теперь, что задано семейство представлений

$$\beta_i : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_{B_i} \quad (i \in I).$$

Образуем декартово произведение $B = \Pi B_i \ (i \in I)$. Произвольной n -арной функции $f \in \mathcal{P}_A$ в каждом множителе B_i отвечает n -арная функция f^{β_i}. Обозначим через f^{α} n -арную функцию, определенную на B, проекцией которой в B_i является функция $f^{\beta_i} (i \in I)$. Непосредственная проверка показывает, что отображение α, определяемое формулой

$$\alpha : f \to f^{\alpha} \quad (f \in \mathcal{P}_A), \tag{8}$$

является представлением $\mathcal{P}_A$ в $\mathcal{P}_B$.

Если все представления β_i совпадают с фиксированным представлением, то формула (8) дает представление $\alpha = \beta^I : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_{B^I}$, называемое *декартовой степенью* представления β. В частности, возводя в различные степени единичное (тождественное) представление $\varepsilon : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$, получим набор степенных представлений

$$\varepsilon^n : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_{A^n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Пусть множество A содержит конечное число s элементов. Тогда множество A^n содержит s^n элементов и представления (9) в каждой алгебре $\mathcal{P}_B$, где $|B| = s^n$, фиксируют определенные итеративные подалгебры, изоморфные алгебре $\mathcal{P}_n$.

Условимся представление $\alpha : \mathcal{P}_A^* \to \mathcal{P}_B^*$ называть селекторным, если функция $e_2^2(x, y) = y$ отображается в селекторную же функцию e_2^2, определенную на B. Так как из функции e_2^2 при помощи операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ можно получить все селекторные функции e_i^m ($i \leq m$, $i, m = 1, 2, \ldots$), то при селекторных отображениях селекторные функции из $\mathcal{P}_A^*$ переходят в соответствующие селекторные функции из $\mathcal{P}_B^*$. Если рассматриваются не предитеративные алгебры $\mathcal{P}_A^*$, $\mathcal{P}_B^*$, а итеративные алгебры $\mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_B$, включающие операцию ∇, то для селекторности представления, очевидно, достаточно, чтобы единичная функция $e(x) = x$ из $\mathcal{P}_A$ переходила в единичную функцию из $\mathcal{P}_B$.

Из определения декартова произведения видно, что декартово произведение селекторных представлений является селекторным представлением. В частности, все степенные представления алгебры $\mathcal{P}_A$ являются селекторными.

6. Постовские многообразия. Задача нахождения представлений алгебры $\mathcal{P}_A$ легко связывается с теорией особых многообразий, которые мы назовем многообразиями Поста и определим следующим образом. Выберем в множестве P_A какую-нибудь систему функций

$$f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \quad (i \in I), \tag{10}$$

с каждым символом i сопоставим n_i-арный функциональный знак F_i и рассмотрим алгебру

$$\mathfrak{A} = \langle A; \Omega \rangle \qquad (\Omega = \{F_i : i \in I\}),$$

в которой символ F_i имеет значение f_i. Минимальное многообразие сигнатуры Ω, порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$, обозначим через $\hat{\mathfrak{A}}$. Если из функций f_i, e_2^2 при помощи операций $\zeta, \tau, \Delta, *$ можно получить любую функцию из P_A, то есть если совокупность e_2^2, f_i $(i \in I)$ – порождающая в алгебре $\mathcal{P}_A^*$, то многообразие $\hat{\mathfrak{A}}$ называется постовским многообразием, отвечающим порождающей совокупности f_i. Мощность множества A называется порядком постовского многообразия $\hat{\mathfrak{A}}$. Хотя каждой мощности $m = |A|$ отвечает много различных постовских многообразий, зависящих от выбора порождающих f_i, все постовские многообразия одного и того же порядка рационально эквивалентны. Это означает, что главные операции одного многообразия можно термально выразить через главные операции другого при помощи формул, не зависящих от выбора конкретных алгебр многообразий (см. [3]).

Первый конкретный вид постовских многообразий конечного ранга был изучен Розенблумом в 1942 г. [7] . Алгебры этих многообразий были названы Розенблумом алгебрами Поста. Их определение может быть представлено в следующей форме. Алгебрами Поста порядка n $(n \geqslant 2)$ называются алгебры многообразия $\hat{\mathcal{R}}_n$, где

$$\mathcal{R}_n = \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, \vee, ' \rangle,$$

$$x \vee y = \min(x, y),$$

$$a' = a+1 \quad (a = 0, 1, \ldots, n-2),$$

$$(n-1)' = 0.$$

Розенблум доказал, что многообразие $\hat{\mathcal{R}}_n$ любого фиксированного конечного порядка n конечно-аксиоматизируемое (то есть определяется конечным числом тождеств). Отсюда следует, что все постовские многообразия конечного порядка конечно-аксиоматизируемые. Далее, Розенблумом показано, что мощность каждой конечной алгебры Поста конечного ранга порядка n имеет вид n^k и что все конечные алгебры Поста, имеющие одинаковую мощность, изоморфны. Из этого следует, что каждая конечная алгебра Поста изоморфна декартовой степени порождающей алгебры $\mathcal{R}_n$.

Другой тип многообразий Поста конечного порядка был определен Эпстейном (1960, [6]). Согласно Эпстейну, **решетками Поста порядка** n называются алгебры минимального многообразия, порожденного алгеброй

$$\mathcal{L}_n = \langle \{0,1,\ldots,n-1\};\vee,\wedge,C_0,C_1,\ldots,C_{n-1}\rangle,$$

где

$$x\vee y=max(x,y)\ ,\qquad x\wedge y=min(x,y);$$

$$C_i(i)=n-1,\ C_i(x)=0\qquad(x\neq i).$$

Эпстейном показано, что многообразие $\hat{\mathcal{L}}_n$ характеризуется следующей простой системой аксиом:

L I. Решетки Поста относительно операций $\vee,\wedge$ являются дистрибутивными решетками с нулем 0 и единицей u.

L 2. $C_0(x)\vee C_1(x)\vee\ldots\vee C_{n-1}(x)=u,\ C_i(x)\wedge C_j(x)=0\ (i\neq j)$.

3. В каждой решетке Поста порядка n существуют элементы $e_0,e_1,\ldots,e_{n-1}$ такие, что

а) $e_{i-1}\wedge e_i=e_{i-1}$,

б) $x\wedge e_1=0\rightarrow x=0$, $\qquad(i=1,\ldots,n-1)$

в) $x\vee e_{i-1}=e_i\rightarrow x=e_i$,

г) $x=(e_1\wedge C_1(x))\vee(e_2\wedge C_2(x))\vee\ldots\vee(e_{n-1}\wedge C_{n-1}(x))$.

Пусть задано некоторое множество S. Одноместные функции $f(x)$ из S в множество $\{0,1,\ldots,n-1\}$ назовем n-значными. Для любых n-значных функций f,g вводим функции $f\vee g$, $f\wedge g$, $C_i(f)$, полагая по определению:

$$(f\vee g)(x)=\max(f(x),g(x)),\ (f\wedge g)(x)=\min(f(x),g(x)), \tag{II}$$

$$C_i(f)(x)=\begin{cases} n-1, & f(x)=i, \\ 0, & f(x)\neq i. \end{cases}$$

Тогда оказывается справедливой следующая основная

ТЕОРЕМА (Эпстейн [6]). Каждая решетка Поста порядка n изоморфна алгебре всех непрерывных n-значных функций на подходящем вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве S, основные операции которой

$$\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1}$$

определяются формулами (II).

Для конечных постовских решеток отсюда снова получается, что все такие решетки изоморфны декартовым степеням базисной решетки Поста $\mathcal{L}_n$.

7. Селекторные представления предитеративных алгебр. Теорему о представлениях решеток Поста легко превратить в теорему о представлениях предитеративных алгебр конечного порядка. В самом деле, пусть задана какая-то решетка Поста

$$L=\langle B;\ \bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots,\bar C_{n-1}\rangle.$$

Между функциями из P_n, определенными на основном множестве $A=\{0,1,\dots,n-1\}$ производящей решетки Поста $\mathcal{L}_n$, и функциями из P_B определяем отношение α, полагая

$$\Phi(\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1},e_2^2)\ \alpha\ \Phi(\bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots,\bar C_{n-1},\bar e_2^2), \tag{I2}$$

где Φ – какой-нибудь терм, образованный из указанных знаков функций с помощью операторных символов $\zeta,\tau,\Delta,*$, причем e_2^2, $\bar e_2^2$ – упоминавшиеся выше селекторные функции.

Так как из функций $\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1}$ с помощью операций $\zeta,\tau,\Delta,*$ можно получить любую функцию из P_n, то отношение α определяет (быть может, многозначное) отображение P_n в P_B. Покажем, что на самом деле отображение α однозначное.

Пусть для некоторых термов Φ,Ψ

$$\Phi(\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1},e_2^2)=\Psi(\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1},e_2^2). \tag{I3}$$

Это равенство означает, что в постовской решетке $\mathcal{L}_n$ имеет место тождество:

$$\Phi(\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1},e_2^2)(x_1,\dots,x_s)=\Psi(\vee,\dots,e_2^2)(x_1,\dots,x_s),$$

где s -арность функций, представляемых термами Φ,Ψ. Но тогда на любой алгебре многообразия $\hat{\mathcal{L}}_n$ должно быть истинным соответствующее тождество, то есть из (13) следует

$$\Phi(\bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots,\bar C_{n-1},\bar e_2^2)=\Psi(\bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots,\bar C_{n-1},\bar e_2^2).$$

Из определения (12) видно, что отображение α сохраняет операции $\zeta,\tau,\Delta,\nabla,*$ и потому является итеративным изоморфизмом $\mathcal{P}_n$ в $\mathcal{P}_B$.

Обратно, пусть задан какой-нибудь селекторный изоморфизм предитеративной алгебры $\mathcal{P}_n^*$ в некоторую алгебру $\mathcal{P}_B^*$. Среди функций, образующих алгебру $\mathcal{P}_n^*$, находятся и функции

$$\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1},e_2^2.$$

В алгебре $\mathcal{P}_B^*$ им отвечают какие-то функции $\bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots\bar C_{n-1},\bar e_2^2$, причем для любого терма Φ

$$\Phi(\vee,\wedge,C_0,\dots,C_{n-1},e_2^2)=\Phi(\bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots,\bar C_{n-1},e_2^2). \quad (14)$$

Любое тождество, истинное в решетке $\mathcal{L}_n$, можно представить в виде (13). Но тогда в силу (14) соответствующее тождество будет истинно в алгебре

$$\mathcal{L}=\langle B;\bar\vee,\bar\wedge,\bar C_0,\dots,\bar C_{n-1},e_2^2\rangle,$$

и потому эта алгебра будет решеткой Поста.

Ясно, что в приведенных рассуждениях вместо многообразия решеток Поста порядка n можно взять любое многообразие Поста порядка n. Конечность n также несущественна. Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Выберем в $\mathcal{P}_A$ произвольную порождающую систему $f_i\ (i\in I)$, и пусть $\hat{\mathfrak{A}}$ — минимальное многообразие, порожденное алгеброй*

$$\mathfrak{A}=\langle A;\{f_i : i\in I\}\rangle.$$

Отображение $\alpha:\mathcal{P}_A^*\to\mathcal{P}_B^*$ тогда и только тогда селекторный изоморфизм $\mathcal{P}_A^*$ в $\mathcal{P}_B^*$, когда алгебра

$$\mathfrak{B}=\langle B;\{f_i^\alpha : i\in I\}\rangle$$

принадлежит многообразию $\hat{\mathfrak{A}}$.

Неселекторные изоморфизмы сводятся к селекторным следующим путем.

ТЕОРЕМА 5. Пусть α — произвольный изоморфизм $\mathcal{P}_A^*$ в $\mathcal{P}_B^*$, e — единичная функция в P_A, e^α — её образ в $\mathcal{P}_B^*$, C — совокупность значений e^α на B, $\bar{f}$ — ограничение функции $f^\alpha (f \in \mathcal{P}_A^*, f^\alpha \in \mathcal{P}_B^*)$ на C. Тогда отображение $\beta: f \to \bar{f}$ является селекторным изоморфизмом $\mathcal{P}_A^*$ в $\mathcal{P}_C^*$, отображение $e^\alpha: x \to e^\alpha(x)$ есть проектирование B на C и первоначальный изоморфизм α есть проекционное e^α-продолжение изоморфизма β.

В самом деле, так как $e * e = e$ в $\mathcal{P}_A$, то $e^\alpha * e^\alpha = e^\alpha$, и потому из $c \in C$ следует $c = e^\alpha(x)$, $e^\alpha(c) = e^\alpha(e^\alpha(x)) = e^\alpha(x) = c$, то есть отображение $x \to e^\alpha(x)$ является проектированием B на C.

Аналогично, из $f = e * f$ следует, что $f^\alpha = e^\alpha * f^\alpha$, то есть значения любой функции f^α $(f \in \mathcal{P}_A)$ принадлежат совокупности C. Поэтому отображение $\beta: f \to \bar{f}$ является гомоморфизмом $\mathcal{P}_A$ в $\mathcal{P}_C$. Из $f(x_1, \dots, x_n) = f(e(x_1), \dots, e(x_n))$ $(x_i \in A)$ вытекает

$$f^\alpha(y_1, \dots, y_n) = f^\alpha(e^\alpha(y_1), \dots, e^\alpha(y_n)) \quad (y_1, \dots, y_n \in B),$$

и поэтому α есть e^α-продолжение гомоморфизма β. Наконец, соотношения

$$\bar{e}_2^2(e^\alpha(x), e^\alpha(y)) = e_2^{2\alpha}(e^\alpha(x), e^\alpha(y)) = e^\alpha(y) \quad (x, y \in B)$$

показывают, что гомоморфизм β селекторный.

Из теоремы I видно, что если C содержит более одного элемента, то гомоморфизм β является изоморфизмом. Если же C состоит из одного элемента, а множество A имеет не менее двух элементов, то β, а вместе с ним и α будут истинными гомоморфизмами (то есть не изоморфизмами), что противоречит условиям доказываемой теоремы.

8. Подалгебры. Теоремы 3, 4, 5 позволяют дать полное описание всех подалгебр алгебры $\mathcal{P}_s$, изоморфных алгебре $\mathcal{P}_n$ ($n < s$; n, s — конечные). Условимся говорить, что функция h, принадлежащая какой-то подалгебре $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathcal{P}_s$, является единицей подалгебры $\mathfrak{A}$, если $\Delta h = h$ (то есть h — одноместная) и $f * h = h * f = f$ для каждой $f \in \mathfrak{A}$. Ясно, что каждая подалгебра может содержать не более одной едини-

цы и если единичная функция принадлежит подалгебре, то она и является её единицей.

Рангом одноместной функции $h \in \mathcal{P}_B^*$ называют мощность множества $h(B)$. Рангом подалгебры $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}_B$, имеющей единицу, называется ранг этой единицы.

Подалгебры $\mathcal{P}_B$ называются сопряженными, если они переводятся друг в друга подходящими автоморфизмами $\mathcal{P}_B$. Подалгебры алгебры $\mathcal{P}_B$ назовём *проективно сопряженными*, если они являются проективными продолжениями сопряженных подалгебр.

ТЕОРЕМА 6. *Все подалгебры алгебры* $\mathcal{P}_S$, *изоморфные* $\mathcal{P}_n$, *имеют ранги вида*

$$n^k \quad (k=1,2,\ldots;\ n^k \leqslant s).$$

Для каждого числа вида $n^k \leqslant s$ *в* $\mathcal{P}_S$ *существует и с точностью до проективной сопряженности лишь одна подалгебра, изоморфная* $\mathcal{P}_n$ *и имеющая ранг* n^k.

В частности, если $n^k = s$, *то* $\mathcal{P}_S$ *имеет и с точностью до сопряженности лишь одну подалгебру, изоморфную* $\mathcal{P}_n$ *и содержащую единичную функцию из* $\mathcal{P}_S$.

Пусть $n \leqslant n^k \leqslant s$. Берем в $B=\{0,1,\ldots,n-1\}$ произвольное подмножество D, содержащее n^k элементов, и переносим на D структуру решетки Поста $\mathcal{L}_n^k$, где $\mathcal{L}_n$–порождающая решетка Эпстейна из п. 6. В результате получим решетку Поста:

$$\mathcal{L} = \langle C;\ \bar{\vee}, \bar{\wedge}, \bar{C}_0, \ldots, \bar{C}_{n-1} \rangle.$$

В силу теоремы 4 эта решетка порождает изоморфизм $\beta : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_B$. Берем какое-нибудь проектирование δ множества B на D и продолжаем отображение β до изоморфизма $\alpha : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_B$. Образ $\mathcal{P}_A$ при изоморфизме α и является искомой подалгеброй ранга n^k, изоморфной $\mathcal{P}_A$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ – какие-то подалгебры одного и того же ранга z, изоморфные $\mathcal{P}_n$. Обозначим через δ_1, δ_2 их единицы и положим $\delta_1(B)=D_1, \delta_2(B)=D_2$. Согласно теореме 5 заданные изоморфизмы $\alpha_i : \mathcal{P}_A \to \mathfrak{A}_i\ (i=1,2)$ являются, соответственно, δ_1 и δ_2 продолжениями селекторных изоморфизмов:

$$\beta_i : \mathcal{P}_A^* \to \mathcal{P}_{D_i}^* \quad (i=1,2).$$

Рассмотрим соответствующие решетки Поста :

$$\mathcal{L}_{ni} = \langle \mathcal{D}_i ; \vee_i, \wedge_i, C_{0i}, \ldots, C_{n-1i} \rangle \quad (i=1,2) .$$

Их мощности одинаковы. Поэтому в силу теоремы Розенблума-Эпстейна обе они изоморфны подходящей декартовой степени $\mathcal{L}_n^k$ производящей решетки $\mathcal{L}_n$. Следовательно, мощности множеств $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ равны n^k, и существует наложение $\varphi : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$, порождающее наложение $\mathcal{L}_{n1}$ на $\mathcal{L}_{n2}$. Наложение φ продолжаем каким-либо способом до автоналожения $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$. Преобразование φ порождает автоморфизм F_φ алгебры $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^*$. Ясно, что автоморфизм F_φ переведет алгебру $\mathfrak{A}_1$ в такую алгебру, которая будет проективным расширением алгебры $\mathcal{P}_A^{*\beta_2}$.

Поступила в редакцию
26.3.1966 г.

Л и т е р а т у р а

I. С.В.Яблонский. Функциональные построения в k-значной логике. - Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова , 5I, (1958), 5-142.

2. Ю.И.Янов, А.А.Мучник. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса.-ДАН СССР, I27 (1959), 44-46.

3. А.И.Мальцев. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. - ДАН СССР,I20, № I (1958), 29-32.

4. P.M.Cohn. Universal algebra. London, 1965.

5. A.Salomaa. On basic groups for the set of functions over a finite domain,Am.Acad.Sci.Fennical S.A, 1 , N 338. (1963).

6. G.Epstein. The lattice theory of Post algebras,Trans.Am. Math.Soc. 95, N2 (1960), 300-317.

7. P.C.Rosenbloom. Post algebras I. Postulates and general theory, Amer.J.of Math.64, N 2(1942), 167-188.

8. H.J.Whitlock. A composition algebra for multiplace functions, Math. Ann. 157,N2 (1964), 167-178.