

ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ ИНВАРИАНТНОЙ ПОДМОДЕЛИ РАНГА 2 ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

С. В. Хабиров^{1,2,a}, Р. Ф. Шаяхметова^{1,b}

¹Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

²Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

^ahabirov@anrb.ru, ^bshayakhmetova.renata@gmail.com

По двумерной подалгебре, содержащей проективный оператор и оператор растяжения по термодинамическим параметрам одноатомного газа, рассмотрена инвариантная подмодель ранга 2. Подмодель записана в каноническом виде, поэтому представление решения имеет нетривиальный вид. Получены инвариантные решения, безвихревые движения и серия простых решений с дифференциальными связями. Движения газа происходят без коллапса, во всём пространстве сначала сжимается, а затем разлетается до вакуума. Также найдены солитонообразные движения сгустков газа.

Ключевые слова: одноатомный газ, инвариантная подмодель, дифференциальные связи, уединённые волны плотности.

Введение

Уравнения движения одноатомного газа допускают 14-мерную алгебру Ли операторов дифференцирования первого порядка [1]. Существенной особенностью алгебры является то, что она содержит оператор проективных преобразований. Симметричный анализ [2] предполагает перечислить все неподобные относительно внутренних автоморфизмов подалгебры. Такая оптимальная система построена [3]. Из неё выделены подалгебры с проективным оператором [4]. Следующий шаг симметричного анализа — рассмотрение инвариантных подмоделей. Построение иерархии вложенных друг в друга групповых подмоделей описано в работе [5]. Каждая инвариантная подмодель задаёт симметричные решения в пространстве всех физических переменных. Представить эту симметрию с помощью движения частиц — задача группового анализа. Предлагается изучать симметрию на примере простых решений подмодели в каноническом виде [6]. Показано, что любая инвариантная подмодель будет либо эволюционного типа, либо стационарного типа. Инварианты можно выбрать так, что главная часть подмодели, содержащая производные искомым газодинамическим функциям, совпадает либо с подмоделью одномерных нестационарных движений для эволюционных подмоделей, либо с подмоделью стационарных двумерных движений. При этом правая часть уравнений, не содержащая производных, является линейной или квадратичной функцией скоростей, а при градиенте давления стоят положительные коэффициенты как функции инвариантов из независимых переменных. Представление решений при этом задаётся сложными выражениями от физических переменных, поэтому простые решения канонической

подмодели характеризуют симметрию инвариантных решений. Согласно иерархии [5] некоторые инвариантные решения ранга 1 будут простыми решениями инвариантной подмодели ранга 2. Вихрь не инвариантен относительно проективного преобразования, поэтому безвихревые движения подмодели будут решениями с тремя дифференциальными связями. Если дифференциальных связей меньше, то получаются вихревые движения. Решения с постоянными или линейными инвариантными скоростями также задают простые решения. Основная трудность получения простых решений заключается в изучении совместности переопределённой дифференциальными связями системы уравнений подмодели.

Для простых решений изучаются движения частиц, распределение плотности и давления в зависимости от времени. Должны затухать и как-то двигаться начальные сгустки газа под действием локализованного давления. Это похоже на движения уединённых волн (солитонов) в газе.

1. Инвариантная подмодель с проективным оператором и оператором растяжения термодинамических функций

Модель движения одноатомного газа задаётся системой дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{aligned} \rho D\mathbf{u} + \nabla p &= 0, \\ D\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ DS &= 0, \quad S = p\rho^{-5/3}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — оператор градиента в декартовой системе координат, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости частицы, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия. Система (1.1) допускает 14-мерную алгебру Ли. В работе [7] построены инвариантные подмодели на двумерных подалгебрах, содержащих проективный оператор. Рассматривается подалгебра 2.5* из работы [4] с базисом

$$a(X_3 - X_5) + b(X_2 + X_6) + X_7 + X_{10} + X_{12}, X_3 - X_5 + cX_{14},$$

где $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$ — операторы переносов, $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$ — операторы галилеевых переносов, $X_{10} = \partial_t$ — перенос по времени, $X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v$ — оператор вращения вокруг оси x , $X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p - \frac{2}{3}S\partial_S$ — оператор растяжения, $X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p$ — проективный оператор.

Вычислив инварианты подалгебры [2], получим представление инвариантного решения

$$\begin{aligned} u &= u_1(1 + t^2)^{-1/2} + tx(1 + t^2)^{-1}, \\ v &= (-tw_1 + v_1 + ty - z + b)(1 + t^2)^{-1}, \\ w &= ((v_1 + b)t + w_1 + tz + y)(1 + t^2)^{-1}, \\ \rho &= \rho_1(1 + t^2)^{-3/2}e^{cT}, \quad p = p_1(1 + t^2)^{-5/2}e^{cT}, \\ S &= S_1e^{-2cT/3}, \quad T = -a\tau + (z - ty)(1 + t^2)^{-1}, \\ x_1 &= x(1 + t^2)^{-1/2}, \quad y_1 = -b\tau + (y + tz)(1 + t^2)^{-1}, \quad \tau = \arctg t, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где инварианты $u_1, v_1, w_1, p_1, \rho_1, S_1$ — функции x_1, y_1 .

Подстановка представления (1.2) в систему (1.1) приводит к канонической подмодели [6]

$$D_1u_1 + \rho_1^{-1}p_{1x_1} = -x_1,$$

$$\begin{aligned}
D_1 v_1 + \rho_1^{-1} p_{1y_1} &= 2w_1, \\
D_1 w_1 &= -2(v_1 + b) - c\rho_1^{-1} p_1, \\
D_1 \rho_1 + \rho_1(u_{1x_1} + v_{1y_1}) &= c\rho_1(a - w_1), \\
D_1 S_1 &= \frac{2}{3}cS_1(w_1 - a), \quad S_1 = p_1\rho_1^{-5/3},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $D_1 = u_1\partial_{x_1} + v_1\partial_{y_1}$. Если правые части уравнений (1.3) занулить, то получим известную модель стационарных двумерных движений.

Представление для вихря скорости

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} &= (w_{1y_1} + 2)(1 + t^2)^{-1} \mathbf{i} + (t(u_{1y_1} - v_{1x_1}) - w_{1x_1})(1 + t^2)^{-3/2} \mathbf{j} + \\
&+ (v_{1x_1} - u_{1y_1} - tw_{1x_1})(1 + t^2)^{-3/2} \mathbf{k},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат, не является инвариантным относительно подалгебры 2.5^* . Это следствие того, что $\boldsymbol{\omega}$ не инвариантно относительно оператора X_{12} . Безвихревые движения задают дифференциальные связи для системы (1.3). Далее в системе (1.3) индексы 1 опускаем.

2. Безвихревые движения

Если $\boldsymbol{\omega} = 0$, то инвариантные функции удовлетворяют кроме (1.3) дополнительным соотношениям, как следует из (1.4),

$$u_y = v_x, \quad w = -2y. \tag{2.1}$$

Постоянную в последнем равенстве можно занулить переносом по y , который допускается системой (1.3). Система (1.3) в силу (2.1) принимает вид при $b \neq 0$

$$p = -\frac{2b}{c}\rho, \quad S = -\frac{2b}{c}\rho^{-2/3}, \quad R = \ln \rho, \tag{2.2}$$

$$\frac{2b}{c}R_x = x + Du, \quad \frac{2b}{c}R_y = 4y + Dv, \tag{2.3}$$

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y = v_x, \tag{2.4}$$

$$(Du)_y = (Dv)_x, \tag{2.5}$$

$$uDu + vDv - 2b(a + 2y) + xu + 4yv = 0. \tag{2.6}$$

Система (2.3) \div (2.6) переопределена.

Теорема 1. *Общее решение системы (2.3) \div (2.6) возможно лишь при $a = 0$, $b \neq 0$ и задаётся формулами*

$$u = 0, \quad v = b, \quad w = -2y, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{c}{b}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)\right), \quad p = -\frac{2b}{c}\rho, \quad S = -\frac{2b}{c}\rho^{-2/3}, \tag{2.7}$$

где ρ_0 — постоянная.

Доказательство. Введём комплексные переменные

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad W = u - iv, \quad \bar{W} = u + iv.$$

В этих переменных $D = \overline{W}\partial_z + W\partial_{\bar{z}}$, а уравнения (2.4) имеют общее решение $W = W(z)$, $\overline{W} = \overline{W}(\bar{z})$. Уравнение (2.5) тождественно выполняется, а уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{1}{2}(\overline{W}^2 W_z + W^2 \overline{W}_{\bar{z}}) - 2ab + 2bi(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}W(5z - 3\bar{z}) + \frac{1}{4}\overline{W}(5\bar{z} - 3z) = 0. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) — для двух функций W и \overline{W} от разных переменных z и \bar{z} . Необходимо разделить переменные. Дифференцируем (2.8) по z и \bar{z} :

$$\overline{W}\overline{W}_{\bar{z}}W_{zz} + WW_z\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{3}{4}(W_z + \overline{W}_{\bar{z}}) = 0. \quad (2.9)$$

Ещё раз дифференцируем по z и \bar{z} , получим уравнение, в котором переменные разделяются:

$$\frac{W_{zzz}}{(WW_z)_z} = -\frac{\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}}{(\overline{W}\overline{W}_{\bar{z}})_{\bar{z}}} = iK, \quad K \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

где K — действительная постоянная. Интегрируя (2.10), получим

$$W_{zz} = iKWW_z + N, \quad \overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} = -iK\overline{W}\overline{W}_{\bar{z}} + \overline{N}.$$

Из (2.9) следует равенство, в котором переменные разделяются:

$$\left(\overline{N}W - \frac{3}{4}\right)W_z = -\overline{W}_{\bar{z}}\left(N\overline{W} - \frac{3}{4}\right) = iL, \quad L \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют выражения для z и \bar{z} через W и \overline{W} :

$$\frac{1}{2}\overline{N}W^2 - \frac{3}{4}W + M = iLz, \quad \frac{1}{2}N\overline{W}^2 - \frac{3}{4}\overline{W} + \overline{M} = -iL\bar{z}.$$

Подставляя выражения для z и \bar{z} в (2.8), получим полиномиальное тождество 4-й степени по переменным W и \overline{W} . Приравнявая нулю коэффициент при W^4 , получим $\overline{N} = 0$. Значит, из (2.9) следует, что $W_z = -\overline{W}_{\bar{z}} = iL$, $L \in \mathbb{R}$, поэтому $W = iLz + M$, $\overline{W} = -iL\bar{z} + \overline{M}$. Равенство (2.8) становится тождеством по z и \bar{z} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}iL [(-iL\bar{z} + \overline{M})^2 - (iLz + M)^2] - 2ab + 2bi(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}(iLz + M)(5z - 3\bar{z}) - \\ - \frac{1}{4}(-iL\bar{z} + \overline{M})(3z - 5\bar{z}) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициент при \bar{z}^2 , получим $L(L^2 + \frac{5}{2}) = 0$, следовательно, $L = 0$. Коэффициент при \bar{z} даёт

$$-2bi - \frac{3}{4}M + \frac{5}{4}\overline{M} = 0,$$

откуда $\operatorname{Re} M = 0$, $\operatorname{Im} M = -b$. Остаётся условие $ab = 0$.

Итак, получили общее решение переопределённого уравнения (2.8) $W = -ib$, $\overline{W} = ib$, т. е. $u = 0$, $v = b$. Из равенств (2.3), (2.2) определяем формулы (2.7). \square

Решению (2.7) соответствует решение уравнений (1.1), получаемое по формулам (1.2):

$$u = tx(1 + t^2)^{-1},$$

$$\begin{aligned}v &= (2b(1 - t\tau) + ty - z)(1 + t^2)^{-1} + 2t(y + tz)(1 + t^2)^{-2}, \\w &= 2b(t + \tau)(1 + t^2)^{-1} + (y + tz)(t^2 - 1)(1 + t^2)^{-2}, \\ \rho &= \rho_0(1 + t^2)^{-3/2}e^{cG/4b}, \quad p = -\frac{2b}{c}\rho_0(1 + t^2)^{-5/2}e^{cG/4b},\end{aligned}$$

$$G = x^2(1 + t^2)^{-1} + 4((y + tz)(1 + t^2)^{-1} - b\tau)^2 + 4b(z - ty)(1 + t^2)^{-1}.$$

Давление будет положительно при условии $bc < 0$. При $t \rightarrow \infty$ газ растекается до вакуума $p, \rho \rightarrow 0$.

В работе [8] рассмотрено движение частиц полученного решения. При $t < 0$, $t \rightarrow 0$ происходит сгущение газа без образования коллапса, затем при $t \rightarrow \infty$ происходит разлёт в бесконечность по пространственным кривым с образованием вакуума.

При $b = 0$ из системы (1.3) следует $c = 0$. Получено решение

$$u = v = 0, \quad w = -2y, \quad p = f(I), \quad \rho = -2f'(I), \quad I = x^2 + 4y^2, \quad (2.11)$$

где $f(I)$ — произвольная функция.

3. Вихревые решения с дифференциальными связями

Рассмотрим класс вихревых решений, которые определяются двумя дифференциальными связями $u_y = v_x$, $u_x + v_y = 0$, т. е.

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad D\psi = 0. \quad (3.1)$$

Система (1.3) имеет два интеграла ($R = \ln \rho$)

$$p = \rho P(\psi), \quad u^2 + v^2 + x^2 - 4ay - \frac{4b}{c}R + \frac{1}{c^2}(DR)^2 = B(\psi). \quad (3.2)$$

Оставшиеся уравнения запишем в виде

$$w = a - c^{-1}DR,$$

$$c^{-1}D^2R = 2v + 2b + cP(\psi), \quad (3.3)$$

$$uu_x + vv_x + P'\psi_x + PR_x = -x, \quad uu_y + vv_y + P'\psi_y + PR_y = 2a - 2c^{-1}DR,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}cP' = (\ln DR)_x.$$

Переопределённую систему (3.1) \div (3.3) надо изучить на совместность.

Рассмотрим частный случай $P' = 0$, т. е. P — постоянная, тогда изучение переопределённой системы сводится к соотношениям для функции ψ :

$$DR = \psi_y R_x - \psi_x R_y = m(y), \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \quad (2 - c^{-1}m')\psi_x = 2b + cP, \quad (3.4)$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + x^2 - 4ay - 4bc^{-1}R + c^{-2}m^2 = B(\psi). \quad (3.5)$$

Если $P = -2bc^{-1}$, то $\psi = \Psi y + \Psi_0$, где Ψ, Ψ_0 — постоянные,

$$\Psi^2 + x^2 - 4ay + c^{-2}m^2 - B(\psi) = 4bc^{-1}R,$$

поэтому $b \neq 0$, $4bc^{-1}m = 2\Psi x$, следовательно, $m = \Psi = 0$. Получим решение

$$u = v = 0, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{c}{4b}(x^2 - 4ay)\right), \quad p = -\frac{2b}{c}\rho, \quad w = a. \quad (3.6)$$

Пусть $P \neq -2bc^{-1}$, $m' \neq 2c$. Тогда из (3.4) следуют соотношения

$$m = 2cy - M_1^{-1} \ln |M_1 y + M_0|, \quad M_1 \neq 0 \text{ или } m = My + M_0,$$

$$\psi = c(2b + cP)(M_1 y + M_0)x + \Psi y + \Psi_0.$$

Если $M_1 \neq 0$, то из (3.5) определяется функция R , после подстановки которой в уравнения (3.4) получим $M_1 = \Psi = 0$. Противоречие.

Значит, $m = My + M_0$, $\psi = c(2b + cP)(2c - M)^{-1}x + \Psi y$, из (3.5) следует, что

$$c^2(2b + cP)^2(2c - M)^{-2} + \Psi^2 + x^2 - 4ay + c^{-2}(My + M_0)^2 - B(\psi) = 4bc^{-1}R,$$

а (3.4) влечёт равенства $\Psi = 0$, $(4b + MP)(My + M_0) = 2ac(2b + cP)$. Возможны два случая. В первом

$$M = 0, \quad m = M_0 = ac \left(1 + \frac{cP}{2b}\right), \quad \psi = \left(\frac{1}{2}cP + b\right)x,$$

$$u = 0, \quad v = -b - \frac{1}{2}cP, \quad w = -\frac{acP}{2b}, \quad p = P\rho, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2P} - \frac{ac}{b}y\right). \quad (3.7)$$

Во втором случае

$$M = -4bP^{-1}, \quad a = 0, \quad \psi = \frac{1}{2}cPx;$$

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2}cP, \quad w = 4bc^{-1}P^{-1}y, \quad p = P\rho, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2P} + \frac{4b}{cP^2}y^2\right). \quad (3.8)$$

Остаётся рассмотреть случай $m' = 2c$, т.е. $m = 2cy + M$, $P = -2bc^{-1} \neq 0$, $w = a - 2y - Mc^{-1}$, в силу (3.2)

$$4bc^{-1}R = -B(\psi) + x^2 - 4ay + \psi_x^2 + \psi_y^2 + (2y + Mc^{-1})^2.$$

Из (3.4) следует, что $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$, поэтому $\psi = W(z) + \bar{W}(\bar{z})$, $z = x + iy$,

$$4b(2y + Mc^{-1}) = \psi_y \Psi_x - \psi_x \Psi_y, \quad \Psi = \psi_x^2 + \psi_y^2 + x^2 + 4y^2 + 4(Mc^{-1} - a)y.$$

Следовательно,

$$4b(i(\bar{z} - z) + Mc^{-1}) = 4(a - Mc^{-1})(W' + \bar{W}') + iz(5W' + 3\bar{W}') - i\bar{z}(3W' + 5\bar{W}') + \\ + 8i(W')^2\bar{W}'' - 8i(\bar{W}')^2W''. \quad (3.9)$$

Дифференцируем (3.9) по z и \bar{z} :

$$3(\bar{W}'' - W'') + 16(W'W''\bar{W}''' - \bar{W}'\bar{W}''W''') = 0. \quad (3.10)$$

Ещё раз дифференцируем по z и \bar{z} :

$$(W'W'')'\bar{W}^{IV} = (\bar{W}'\bar{W}'')'W^{IV}.$$

Переменные разделяются, а уравнение интегрируется:

$$W'' = \frac{1}{2}K(W')^2 + K_1z + K_2, \quad K \in \mathbb{R}.$$

При $K \neq 0$ подстановка в (3.10) приводит к уравнению с разделяющимися переменными. Откуда следует, что W' — дробно-линейная функция z :

$$W' = \alpha + \beta(z + \delta)^{-1},$$

поэтому в силу (3.10) $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Уравнение (3.9) принимает вид тождества

$$4b(z + \delta)(\bar{z} + \delta)(Mc^{-1} - iz + i\bar{z}) = 4(a - Mc^{-1})\beta(z + \bar{z} + 2\delta) + i\beta(8\delta(z - \bar{z}) + 3z^2 - 3\bar{z}^2).$$

Расщепление по z, \bar{z} даёт равенства $b = 0$, $\beta = 0$. Противоречие.

Значит, $K = 0$, поэтому $W'' = K_1z + K_2$. Подстановка в (3.10), расщепление по z и \bar{z} даёт соотношения $K_1 = 0$, $K_2 \in \mathbb{R}$, следовательно, $W' = K_2z + K_3$. Уравнение (3.9) принимает вид

$$4b(-iz + i\bar{z} + Mc^{-1}) = 4(a - Mc^{-1})(K_2z + K_3 + K_2\bar{z} + \bar{K}_3) + iz(5K_2z + 5K_3 + 3K_2\bar{z} + 3\bar{K}_3) - \\ - i\bar{z}(3K_2z + 3K_3 + 5K_2\bar{z} + 5\bar{K}_3) + 8iK_2 \left[(K_2z + K_3)^2 - (K_2\bar{z} + \bar{K}_3)^2 \right].$$

Зануляя коэффициент при z^2 , получим $K_2(8K_2^2 + 5) = 0$, поэтому $K_2 = 0$. Коэффициент при z даёт $K_3 = \bar{K}_3 = -\frac{1}{2}b$.

Остаётся соотношение $ab = 0$, т. е. $a = 0$, $b \neq 0$. Итак, получили безвихревое решение $W = -\frac{1}{2}bz + d$, $\bar{W} = -\frac{1}{2}b\bar{z} + \bar{d}$.

Рассмотрим другой класс вихревых движений, определяемый равенствами $w_x = 0$, $w_y = -2$, т. е. $w = -2y$. Из системы (1.3) следуют соотношения

$$p = -2bc^{-1}\rho, \quad S = -2bc^{-1}\rho^{-\frac{2}{3}}, \quad u_x + v_y = 0,$$

т. е.

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \psi_y R_x - \psi_x R_y = c(a + 2y), \quad R = \ln \rho, \quad b \neq 0,$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega(\psi) \neq 0, \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 + x^2 + 4y^2 - 4bc^{-1}R = B(\psi),$$

$$\psi_x \psi_y (\psi_{xx} - \psi_{yy}) + (\psi_y^2 - \psi_x^2) \psi_{xy} + x \psi_y - 4y \psi_x = 2b(a + 2y),$$

где $\omega(\psi), B(\psi)$ — произвольные функции интегралов.

С комплексной переменной $z = x + iy$ уравнение для ψ принимает вид

$$4\psi_{z\bar{z}} = \omega(\psi),$$

$$-2\psi_{\bar{z}}^2 \psi_{zz} + 2\psi_z^2 \psi_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{4}(5z - 3\bar{z})\psi_z + \frac{1}{4}(3z - 5\bar{z})\psi_{\bar{z}} = -iab - b(z - \bar{z}).$$

Рассмотрим частный случай постоянной $\omega \neq 0$, тогда

$$\psi = \frac{1}{4}\omega z \bar{z} + W(z) + \bar{W}(\bar{z}), \quad \psi_z = \frac{1}{4}\omega \bar{z} + W', \quad \psi_{\bar{z}} = \frac{1}{4}\omega z + \bar{W}',$$

$$-\frac{1}{8}(\omega z + 4\bar{W}')^2 W'' + \frac{1}{8}(\omega \bar{z} + 4W')^2 \bar{W}'' + \frac{1}{16}(5z - 3\bar{z})(\omega \bar{z} + 4W') +$$

$$+\frac{1}{16}(3z - 5\bar{z})(\omega z + 4\bar{W}') = -iab - b(z - \bar{z}). \quad (3.11)$$

Дифференцируем (3.11) по z и \bar{z} :

$$-(\omega z + 4\bar{W}')\bar{W}''W''' + (\omega\bar{z} + 4W')W''\bar{W}''' - \frac{3}{4}W'' + \frac{3}{4}\bar{W}'' = 0.$$

Предположим $W'' \neq 0$, $\bar{W}'' \neq 0$, делим на $W''\bar{W}''$:

$$-(\omega z + 4\bar{W}')\frac{W'''}{W''} + (\omega\bar{z} + 4W')\frac{\bar{W}'''}{\bar{W}''} - \frac{3}{4}\frac{1}{W''} + \frac{3}{4}\frac{1}{\bar{W}''} = 0. \quad (3.12)$$

После дифференцирования по z и \bar{z} переменные разделяются:

$$\frac{1}{W''} \left(\frac{W'''}{W''} \right)' = \frac{1}{\bar{W}''} \left(\frac{\bar{W}'''}{\bar{W}''} \right)' = K \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют равенства

$$W''' = (KW' + K_1)W'', \quad W'' = \frac{1}{2}KW'^2 + K_1W' + K_2. \quad (3.13)$$

После подстановки полученных равенств в (3.12) переменные разделяются:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}(W'')^{-1} + 4\bar{K}_1W' &= -\omega z(KW' + K_1) = \\ &= \frac{3}{4}(\bar{W}'')^{-1} + 4K_1\bar{W}' - \omega\bar{z}(K\bar{W}' + \bar{K}_1) = N \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

При $K \neq 0$ сделаем замену переменных $\zeta = W'$, $\lambda = (K\zeta + K_1)^{-1}$ или $\zeta = -K_1K^{-1} + K^{-1}\lambda^{-1}$.

Уравнение (3.13) запишем в виде

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2}K\zeta^2 + K_1\zeta + K_2,$$

отсюда

$$-\frac{\lambda^{-2}}{K} \frac{d\lambda}{dz} = \frac{\lambda^{-2}}{2K} + \tilde{K}_2, \quad \tilde{K}_2 = K_2 - \frac{K_1^2}{2K}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.14) определяет

$$z = \frac{4\bar{K}_1}{\omega K} + \frac{\lambda}{\omega} \left[-\tilde{N} + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda^{-2}}{2K} + \tilde{K}_2 \right)^{-1} \right], \quad \tilde{N} = N + 4\frac{K_1\bar{K}_1}{K}.$$

После этого (3.15) становится тождеством по переменной λ

$$-\frac{\lambda^{-2}}{K} \left(\frac{\lambda^{-2}}{2K} + \tilde{K}_2 \right) = -\frac{\tilde{N}}{\omega} \left(\frac{\lambda^{-2}}{2K} + \tilde{K}_2 \right)^2 + \frac{3}{4\omega} \left(\frac{\lambda^{-2}}{2K} + \tilde{K}_2 \right) + \frac{3\lambda^{-2}}{4\omega K}.$$

Расщепление по λ даёт:

$$\lambda^{-4} : \tilde{N} = 2\omega, \quad \lambda^{-2} : \tilde{K}_2 = \frac{9}{8\omega} \neq 0.$$

Остаётся равенство

$$2\tilde{K}_2 = \frac{3}{4\omega} \neq \frac{9}{4\omega}.$$

Противоречие. Значит, $K = 0$ и уравнения (3.14) принимают вид

$$W'' = K_1 W' + K_2, \quad \frac{3}{4}(W'')^{-1} + 4\bar{K}_1 W' = \omega K_1 z + N.$$

В новых переменных $W' = \zeta$ эти равенства определяют z через ζ и тождество по ζ при $K_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \omega K_1 z &= \frac{3}{4}(K_1 \zeta + K_2)^{-1} + 4\bar{K}_1 \zeta - N, \\ \omega K_1 (K_1 \zeta + K_2) &= -\frac{3}{4}K_1 + 4\bar{K}_1 (K_1 \zeta + K_2)^2. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициент при ζ^2 , получим $K_1 = 0$. Значит, $W'' = K_2 \neq 0$, $W' = K_2 z + K_3$ и уравнение (3.11) становится тождеством по переменным z и \bar{z} :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}(\omega z + 4\bar{K}_2 \bar{z} + 4\bar{K}_3)^2 K_2 + \frac{1}{8}(\omega \bar{z} + 4K_2 z + 4K_3)^2 \bar{K}_2 + \frac{1}{16}(5z - 3\bar{z})(\omega \bar{z} + 4K_2 z + 4K_3) + \\ + \frac{1}{16}(3z - 5\bar{z})(\omega z + 4\bar{K}_2 \bar{z} + 4\bar{K}_3) = -iab - b(z - \bar{z}). \end{aligned}$$

Расщепляем тождество по переменным z и \bar{z} :

$$\begin{aligned} z\bar{z} : K_2 = \bar{K}_2 \in \mathbb{R}, \quad z^2 : K_2 \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{8}\omega^2 \right) + 2K_2^3 + \frac{3}{16}\omega = 0, \\ z : \left(\frac{3}{4} - \omega\bar{K}_2 \right) \bar{K}_3 + \left(4K_2^2 + \frac{5}{4} \right) K_3 = -b, \\ K_3^2 - \bar{K}_3^2 = -i\frac{ab}{2K_2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$4 \operatorname{Im} K_3 \operatorname{Re} K_3 = -\frac{ab}{2K_2}.$$

Если $\operatorname{Im} K_3 \neq 0$, то

$$4K_2^2 + \omega K_2 + \frac{1}{2} = 0, \quad \left(\frac{3}{2} - 2\omega K_2 \right) \operatorname{Re} K_3 = -b.$$

Отсюда следует, что $\omega = -4K_2$. Противоречие. Значит,

$$\operatorname{Im} K_3 = 0, \quad ab = 0, \quad K_3(2 + 4K_2^2 - \omega K_2) + b = 0, \quad 32K_2^3 + 2(10 - \omega^2)K_2 + 3\omega = 0. \quad (3.16)$$

Итак, получили решение: $b \neq 0$, $a = 0$,

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4}\omega z\bar{z} + \frac{1}{2}K_2(z^2 + \bar{z}^2) + K_3(z + \bar{z}) = \left(\frac{1}{4}\omega + K_2 \right) x^2 + \left(\frac{1}{4}\omega - K_2 \right) y^2 + 2K_3 x, \\ u = \psi_y &= \left(\frac{1}{2}\omega - 2K_2 \right) y, \quad v = -\left(\frac{1}{2}\omega + 2K_2 \right) x - 2K_3, \quad p = -2bc^{-1}\rho, \quad w = -2y, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \exp \left[-\frac{c}{4b} \left(x^2 \left(\frac{1}{4}\omega^2 - 4K_2^2 - 1 \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + y^2 \left(\frac{1}{4}\omega^2 - 4K_2^2 - 4 \right) + 4K_3 \left(\frac{1}{2}\omega - 2K_2 \right) x \right) \right], \end{aligned}$$

где постоянные K_2, K_3, ω, b удовлетворяют равенствам (3.16).

Если $K_2 = 0$, то получим разобранный случай с $\omega = 0$.

4. Решение с линейным полем скоростей

Если u, v — постоянные, то получаются уже найденные решения (3.6), (3.7) и (3.8).

Рассмотрим линейное поле инвариантных скоростей при $c \neq 0$

$$u = b_1^1 x + b_2^1 y + u_0, \quad v = b_1^2 x + b_2^2 y + v_0, \quad w = b_1^3 x + b_2^3 y + w_0, \quad \Delta = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \neq 0.$$

Система (1.3) принимает вид

$$\rho^{-1} p_x = -x - b_1^1 u - b_2^1 v, \quad \rho^{-1} p_y = 2w - b_1^2 u - b_2^2 v, \quad (4.1)$$

$$c p \rho^{-1} = -b_1^3 u - (b_2^3 + 2)v - 2b, \quad (4.2)$$

$$D(p\rho^{-1}) = -\frac{2}{3}(b_1^1 + b_2^2)p\rho^{-1}, \quad (4.3)$$

$$D \ln \rho = -b_1^1 - b_2^2 + c(a - w). \quad (4.4)$$

Из (4.2) следуют соотношения

$$\begin{aligned} p &= \rho P, \quad P = P_0 + P_1 x + P_2 y, \\ b_1^3 b_1^1 + b_2^3 (b_2^3 + 2) &= -c P_1, \\ b_1^3 b_2^1 + b_2^3 (b_2^3 + 2) &= -c P_2, \\ b_1^3 u_0 + v_0 (b_2^3 + 2) + 2b &= -c P_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Равенство (4.3) влечёт, что

$$\begin{aligned} (5b_1^1 + 2b_2^2)P_1 + 3b_1^2 P_2 &= 0, \\ 3b_2^1 P_1 + (2b_1^1 + 5b_2^2)P_2 &= 0, \\ P_1 u_0 + P_2 v_0 + \frac{2}{3}(b_1^1 + b_2^2)P_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В силу (4.1)

$$(\ln \rho)_x P = -P_1 - x(1 + (b_1^1)^2 + b_2^1 b_1^2) - y b_2^1 (b_1^1 + b_2^2) - b_1^1 u_0 - b_2^1 v_0, \quad (4.7)$$

$$(\ln \rho)_y P = -P_2 + 2w_0 - b_1^2 u_0 - b_2^2 v_0 + x(2b_1^3 - b_1^2 (b_1^1 + b_2^2)) + y(2b_2^3 - b_2^1 b_1^2 - (b_2^2)^2).$$

Совместность последних двух уравнений даёт

$$P_1 b_2^1 (b_1^1 + b_2^2) = P_2 (1 + (b_1^1)^2 + b_2^1 b_1^2),$$

$$P_1 (2b_2^3 - b_2^1 b_1^2 - (b_2^2)^2) = P_2 (2b_1^3 - b_1^2 (b_1^1 + b_2^2)),$$

$$P_1 (2w_0 - b_1^2 u_0 - b_2^2 v_0) + P_2 (b_1^1 u_0 + b_2^1 v_0) = P_0 (2b_1^3 + (b_2^1 - b_1^2) (b_1^1 + b_2^2)).$$

Из уравнений (4.1) в силу (4.4) следует тождество по x, y :

$$\begin{aligned} P [c(a - w) - b_1^1 - b_2^2] &= -u \left[P_1 + b_1^1 u_0 + b_2^1 v_0 + x(1 + (b_1^1)^2 + b_2^1 b_1^2) + y b_2^1 (b_1^1 + b_2^2) \right] + \\ &+ v \left[2w_0 - P_2 - b_1^2 u_0 - b_2^2 v_0 + x(2b_1^3 - b_1^2 (b_1^1 + b_2^2)) + y(2b_2^3 - b_2^1 b_1^2 - (b_2^2)^2) \right]. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x^2, y^2, xy , получим

$$b_1^3(b_1^3b_1^1 + b_2^3b_1^2) = -b_1^1(1 + (b_1^1)^2 + b_2^1b_1^2) - (b_1^2)^2(b_1^1 + b_2^2),$$

$$\begin{aligned} b_2^3(b_1^3b_2^1 + b_2^3b_2^2) &= -(b_2^1)^2(b_1^1 + b_2^2) - b_2^2(b_2^1b_1^2 + (b_2^2)^2), \\ (b_1^1 + b_2^2)(b_1^3b_2^3 + b_1^1b_2^1 + b_1^2b_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Если $b_1^1 + b_2^2 \neq 0$, то из последних трёх равенств следует, что

$$b_1^3b_2^3 = -b_1^1b_2^1 - b_1^2b_2^2,$$

$$b_1^1((b_1^3)^2 + 1 + (b_1^1)^2 + (b_1^2)^2) = 0,$$

$$b_2^2((b_2^3)^2 + (b_2^1)^2 + (b_2^2)^2) = 0.$$

Получаем $b_1^1 = b_2^2 = 0$. Противоречие.

Следовательно,

$$b_1^1 = \omega, \quad b_2^2 = -\omega, \quad \Delta = -\omega^2 - b_2^1b_1^2 \neq 0,$$

$$b_1^3(\omega b_1^3 + b_1^2b_2^3) = \omega(\Delta - 1), \quad b_2^3(b_2^1b_1^3 - \omega b_2^3) = -\omega\Delta,$$

Согласно (4.6) $P_1 = P_2 = 0$, а в силу (4.5) $b_1^3 = 0, b_2^3 = -2$, поэтому $\omega = 0, P_0 = -2bc^{-1}$. Из уравнения (4.4) следует, что

$$u_0 = 0, \quad v_0 = -4bb_1^2(b_2^1)^{-1}, \quad b_1^2 + (b_1^1)^{-1} + b_2^1 + 4(b_2^1)^{-1} = 0, \quad a = 0. \quad (4.8)$$

С условием (4.8) получим из (4.7) решение

$$u = b_2^1y, \quad v = b_1^2x - 4bb_1^2(b_2^1)^{-1}, \quad w = -2y, \quad p = -2bc^{-1}\rho,$$

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{c}{4b} (x^2(1 + b_2^1b_1^2) - 8b_1^2bx + y^2(4 + b_2^1b_1^2)) \right]. \quad (4.9)$$

При $c = 0$ подмодель (1.3) с линейным полем скоростей принимает вид

$$w = -2y, \quad b = 0,$$

$$\rho^{-1}p_x = -x - b_1^1u - b_2^1v, \quad \rho^{-1}p_y = -4y - b_1^2u - b_2^2v, \quad (4.10)$$

$$DS = 0, \quad D\rho = -\rho(b_1^1 + b_2^2).$$

Из первых двух уравнений (4.10) в силу тождества

$$\rho^{-1}Dp = \frac{5}{3}S\rho^{-1/3}D\rho = D\left(\frac{5}{2}S\rho^{2/3}\right)$$

следует интеграл Бернулли:

$$5S\rho^{2/3} + J = B^2(S), \quad J = u^2 + v^2 + x^2 + 4y^2.$$

Отсюда в силу (4.4) следует равенство

$$\frac{2}{3}(b_1^1 + b_2^2)(B^2 - J) = DJ. \quad (4.11)$$

Выражения J и DJ — квадратичные функции переменных x, y . Если $B'_S \neq 0$, то $S = S(I)$, I — квадратичная функция.

Из уравнения $DS = 0$ следует, что I — интеграл характеристического равенства, т. е. $dI = (b_1^2 x + b_2^2 y + v_0) dx - (b_1^1 x + b_2^1 y + u_0) dy$. Отсюда следует равенство $b_1^1 + b_2^2 = 0$, поэтому $b_1^1 = \omega$, $b_2^2 = -\omega$. Система (1.3) имеет интегралы $p(S), \rho(S)$,

$$-\int p' \rho^{-1} dS = \frac{x^2}{2}(1 - \Delta) + \frac{y^2}{2}(4 - \Delta) + u_0(\omega x + b_1^2 y) + v_0(b_2^1 x - \omega y).$$

Должно выполняться тождество $DI \equiv 0$, следовательно,

$$(\omega x + b_2^1 y + u_0)(x(1 - \Delta) + \omega u_0) + (b_1^2 x - \omega y)(y(4 - \Delta) + b_1^2 u_0) = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при различных мономах x^2, y^2, xy, x, y , получим

$$\omega = u_0 = v_0 = 0, \quad \Delta = -b_2^1 b_1^2 \neq 0,$$

$$(b_1^2)^{-1} + b_1^2 + 4(b_2^1)^{-1} + b_2^1 = 0. \quad (4.12)$$

Если B — постоянная, то после расщепления (4.11) по u и v следует $b_1^1 = b_2^2 = 0$.

Интегрируя (4.10), получим решение с условием (4.12):

$$u = b_2^1 y, \quad v = b_1^2 x, \quad w = -2y, \quad b = c = 0,$$

$$\rho = -p'(I), \quad I = \frac{1}{2} [x^2(1 + b_2^1 b_1^2) + y^2(4 + b_2^1 b_1^2)], \quad (4.13)$$

где $p(I)$ — произвольная монотонно убывающая функция.

5. Инвариантное решение подмодели

Система (1.3) допускает перенос по y . Класс инвариантных решений, не зависящих от y , определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} uu_x + \rho^{-1} p_x &= -x, & u\tilde{v}_x &= 2w, \\ uw_x &= -2\tilde{v} - c\rho\rho^{-1}, & \tilde{v} &= v + b, \\ u\rho_x + \rho u_x &= c\rho(a - w), & uS_x &= \frac{2}{3}cS(w - a), & S &= p\rho^{-5/3}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Имеется интеграл при $u \neq 0$:

$$\rho u S^{3/2} = D \quad (c \neq 0), \quad \rho u = D \quad (c = 0).$$

Если $u = 0$, то $\tilde{v}(x)$ — произвольная функция, $w = a = 0$,

$$p = -2c^{-1}\tilde{v}\rho, \quad \rho = \rho_0 \tilde{v}^{-1} \exp\left(\frac{c}{2} \int x \tilde{v}^{-1} dx\right), \quad v = \tilde{v}(x) - b. \quad (5.2)$$

Если $u \neq 0$, то введём замену $x = x(u)$ — обратная функция к функции $u = u(x)$. Система (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} p &= D\rho u^{2/3}, \\ u + \frac{2}{3}Du^{-1/3} + Du^{2/3}R_u + xx_u &= 0, \\ u\tilde{v}_u &= 2wx_u, & uw_u + (2\tilde{v} + cDu^{2/3})x_u &= 0, \\ R_u &= -u^{-1} + acu^{-1}x_u - \frac{1}{2}c\tilde{v}_u. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Система (5.3) сводится к одному квазилинейному уравнению третьего порядка для функции $x(u)$. При $c = 0$ система (5.1) имеет интегралы

$$\begin{aligned} u\rho &= D, u^2 + 5S_0\rho^{2/3} + x^2 = B^2, \\ S &= S_0, w^2 + (v + b)^2 = A^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Решение задаётся формулами

$$v = -b + A \sin \left(E + 2 \int u^{-1} dx \right), \quad w = A \cos \left(E + 2 \int u^{-1} dx \right), \quad p = S_0\rho^{5/3}, \quad (5.5)$$

функции $u(x), \rho(x)$ определяются формулами (5.4). Здесь D, B, A, S_0, E — постоянные.

Для нахождения области определения и качественного представления о поведении решения рассмотрим равенство, следующее из (5.4):

$$F(\rho) = D^2\rho^{-2} + 5S_0\rho^{2/3} = B^2 - x^2 = G(x) > 0.$$

Построим графики функций $F(\rho)$ и $G(x)$ (рис. 1).

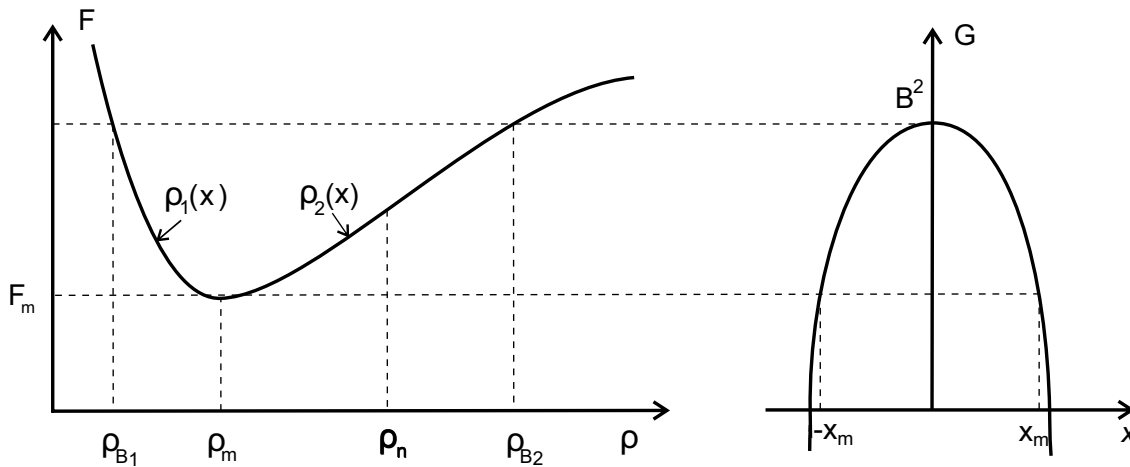


Рис. 1. Область определения инвариантного решения

Функция $F(\rho)$ имеет минимум при $\rho_m = (3d/5)^{3/8}$, $d = D^2S_0^{-1}$, $F_m = 4(5/3)^{3/4}d^{1/4}$ и точку перегиба $\rho_n = (9d/10)^{3/8} > \rho_m$.

Обратная функция к $F(\rho)$ двужначна. Есть два решения $\rho_i(x)$, $i = 1, 2$. Значения F_m задают область определения решения $|x| \leq x_m$, где $\pm x_m$ определяют точки пересечения параболы $G = B^2 - x^2$ с прямой $F = F_m$. Область значений для функций $\rho_{B_1} < \rho_1 < \rho_m$ и $\rho_m < \rho_2 < \rho_{B_2}$ определяется точками пересечения прямой $G = B^2$ с кривой $F = F(\rho)$. Если x меняется от 0 до x_m , то плотность ρ_1 возрастает от ρ_{B_1} до ρ_m , а скорость u_1 убывает; плотность ρ_2 убывает от ρ_{B_2} до ρ_m , а скорость u_2 возрастает. Таким образом, получаем схлопывание или растекание сгустка плотности. За область определения решения движение продолжается другим, быть может не инвариантным, решением. На границах $x = \pm x_m$ имеется особенность производной плотности.

6. Движение частиц для точного решения

6.1. Безвихревое решение

Рассмотрим решение (2.11). Формулы (1.2) принимают вид

$$u = \frac{tx}{1+t^2}, \quad v = \frac{(t^2+3)ty + (t^2-1)z}{(1+t^2)^2}, \quad w = \frac{(t^2-1)(tz+y)}{(1+t^2)^2},$$

$$p = f(I)(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad \rho = -2f'(I)(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad I = \frac{x^2}{1+t^2} + 4\left(\frac{y+tz}{1+t^2}\right)^2. \quad (6.1)$$

Уравнение движения частиц

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (6.2)$$

с формулами (6.1) интегрируется:

$$x = x_0\sqrt{1+t^2}, \quad y = y_0 - tz_0 + 2y_0t\tau, \quad z = z_0 + ty_0 - 2y_0\tau, \quad (6.3)$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты начального ($t = 0$) положения частицы, которые называют лагранжевыми координатами. Якобиан преобразования к этим координатам $J = (1+t^2)^{\frac{3}{2}} \neq 0$ не вырожден. Значит, частицы не сталкиваются (отсутствие коллапса).

Исключая y_0 из формул (6.3), получим уравнение прямой при фиксированном t

$$x = x_0\sqrt{1+t^2}, \quad 2\tau\left(\frac{y+tz}{1+t^2}\right) + \frac{z-ty}{1+t^2} = z_0,$$

в которую переходит прямая $x = x_0, z = z_0$. Множество таких прямых при различных значениях t образует линейчатую поверхность, на которой лежат траектории частиц (рис. 2¹). Сначала частицы сгущаются, а при $t > 0$ разлетаются.

Поверхность уровня для плотности и давления есть эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{1+t^2} + 4\left(\frac{y+tz}{1+t^2}\right)^2 = R^2. \quad (6.4)$$

При $t = 0$ ось цилиндра $x_0^2 + 4y_0^2 = R^2$ совпадает с осью z_0 . Пусть в (6.1) функция $f(I)$ монотонно убывает, $f'(0) = -2^{-1}\rho_0$, $f'(\infty) = f(\infty) = 0$, $f(0) = p_0$. Плотность и давление распределены с максимумами на оси цилиндра — поверхности уровня. Со временем $t > 0$ плотность и давление уменьшаются до нуля (вакуум) за счёт растекания газа в бесконечность. Если монотонно убывающая функция $f(I)$ имеет точки перегиба, то плотность в этих точках имеет локальные максимумы. Локальные максимумы находятся на движущихся поверхностях уровня (6.4). Таким образом, получается движение уединённых волн газа типа солитонов.

6.2. Постоянное решение подмодели

Рассмотрим решение (3.7) с $P = -2c^{-1}v_0$. Формулы (1.2) принимают вид

$$u = \frac{tx}{1+t^2}, \quad v = \frac{v_0(1-ab^{-1}t) + ty - z}{1+t^2}, \quad w = \frac{v_0(t+ab^{-1}) + tz + y}{1+t^2},$$

$$\rho = \rho_0(1+t^2)^{-3/2}e^T, \quad p = -2c^{-1}v_0\rho_0(1+t^2)^{-5/2}e^T, \quad (6.5)$$

$$T = \frac{c}{1+t^2} \left(\frac{x^2}{4v_0} - y(t+ab^{-1}) + z(1-ab^{-1}t) \right),$$

где постоянные $\rho_0 > 0$, $cv_0 < 0$. Уравнения движения частиц (6.2) с формулами (6.5) интегрируются:

$$x = x_0\sqrt{1+t^2}, \quad y = y_0 - tz_0 + v_0\tau(1-ab^{-1}t), \quad z = z_0 + ty_0 + v_0\tau(t+ab^{-1}). \quad (6.6)$$

¹В подписях к данному и к следующим рисункам этой работы упоминаются цвета линий при разъяснении их содержимого. К сожалению, цветные рисунки доступны лишь читателям электронной версии журнала на сайте srnj.csu.ru.

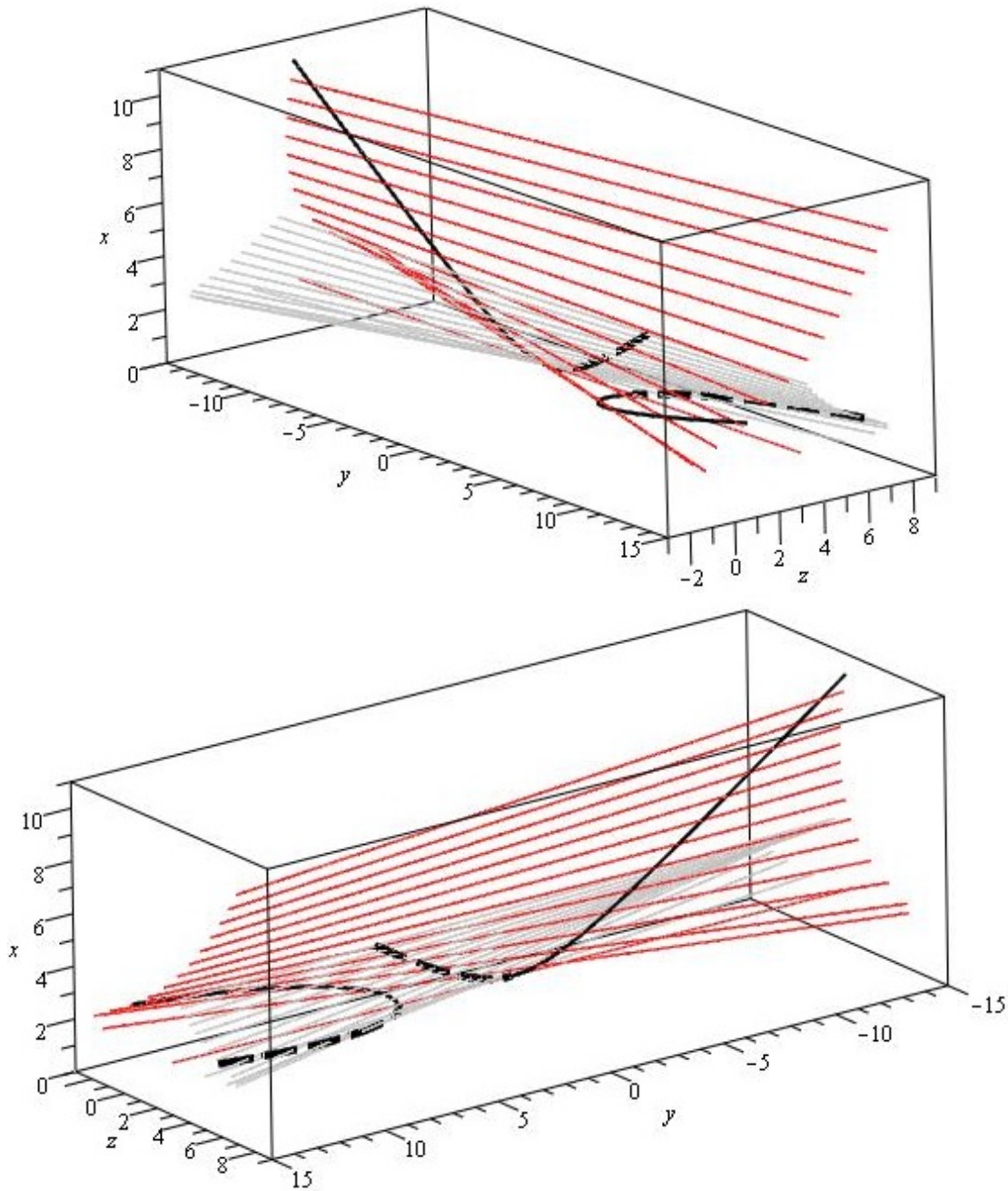


Рис. 2. Линейчатая поверхность и две траектории с начальными данными $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 3)$; $(2, 5, 3)$ при $t = -2, \dots, 5$ (при $t < 0$ пунктирные линии и поверхность серая, при $t > 0$ сплошные линии и поверхность красная, вид картины с разных сторон)

При $t = 0$ получим лагранжевы координаты x_0, y_0, z_0 . Якобиан $J = (1 + t^2)^{3/2} > 0$ особенностей не имеет.

Из равенств (6.6) следуют соотношения с разделёнными переменными

$$x = x_0 \sqrt{1 + t^2}, \quad (y - v_0 \tau (1 - ab^{-1}t))^2 + (z - v_0 \tau (t + ab^{-1}))^2 = (y_0^2 + z_0^2)(1 + t^2) = R^2.$$

Эти равенства задают окружность радиуса R при фиксированном t , которая есть пересечение плоскости и цилиндра. Ось цилиндра параллельна оси x и проходит через точку $(0, v_0 \tau (1 - ab^{-1}t), v_0 \tau (t + ab^{-1}))$. Для различных t окружности образуют поверхность, на которой лежат траектории частиц, которые в момент $t = 0$ находятся на окружности $x = x_0, y^2 + z^2 = y_0^2 + z_0^2$ (рис. 3).

Также из формул (6.6) следуют соотношения

$$x = x_0 \sqrt{1 + t^2}, \quad y(t + ab^{-1}) - z(1 - ab^{-1}t) = (ab^{-1}y_0 - z_0)(1 + t^2),$$

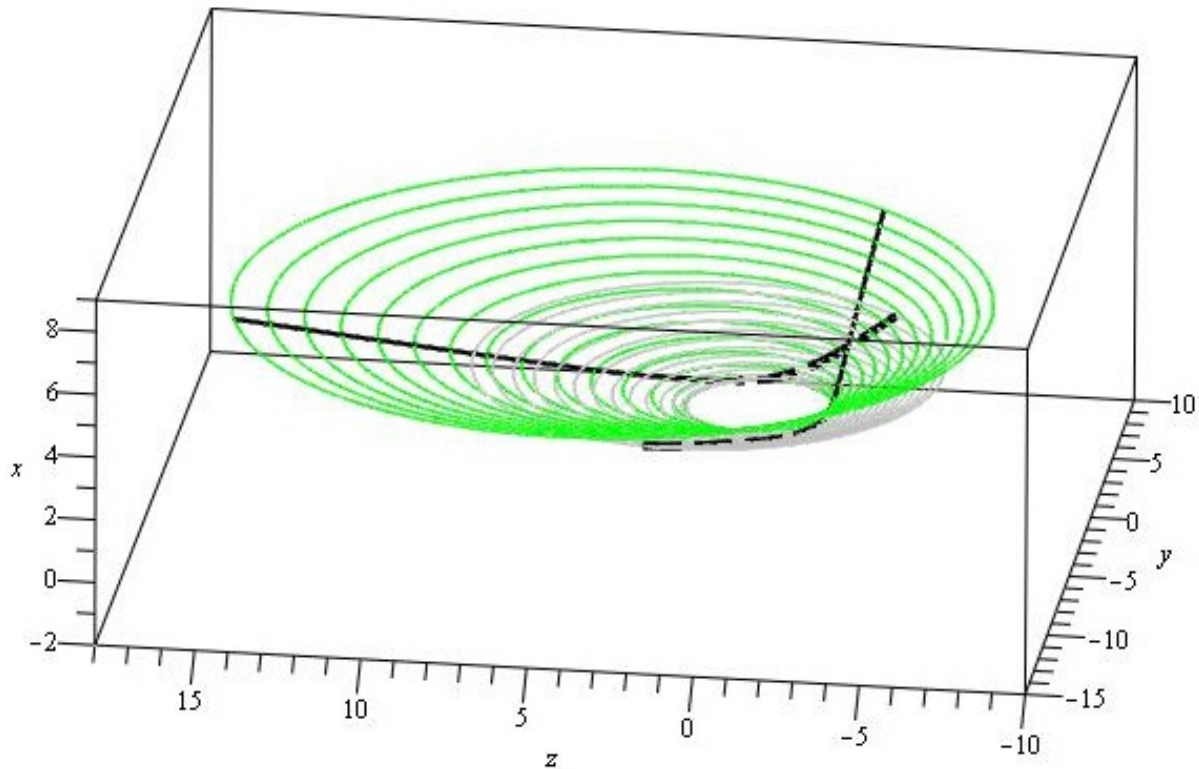


Рис. 3. Поверхность из окружностей и две траектории с начальными данными $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1); (1, -1, -2)$ при $ab^{-1} = 1, v_0 = 0.5, R = \sqrt{5}, t = -3, \dots, 5$ (при $t < 0$ пунктирные линии и поверхность серая, при $t > 0$ сплошные линии и поверхность зелёная)

которые задают прямую как пересечение двух плоскостей при фиксированном t и для любого v_0 .

В начальный момент времени эти плоскости таковы:

$$x = x_0, \quad ab^{-1}y - z = ab^{-1}y_0 - z_0.$$

Множество прямых для различных значений времени t образует линейчатую поверхность, на которой лежат траектории (рис. 4).

Объединяя рис. 3 и 4, при $t > 0$ получим траектории как пересечение линейчатой поверхности и поверхности из окружностей. Таких траекторий не более двух (рис. 5).

Поверхности уровня плотности и давления — параболические цилиндры,двигающиеся со временем. Максимум достигается на цилиндре, проходящем через начало координат. На других поверхностях уровня плотность и давление экспоненциально убывают. Получается движение волны плотности и давления в виде параболического цилиндра.

6.3. Решение с линейным полем скоростей

Рассмотрим решение (4.13) с условием (4.12). Формулы (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{b_2^1(y + tz)}{(1 + t^2)^{3/2}} + \frac{tx}{1 + t^2}, \\ v &= \frac{2t(y + tz)}{(1 + t^2)^2} + \frac{b_1^2 x}{(1 + t^2)^{3/2}} + \frac{ty - z}{1 + t^2}, \\ w &= \frac{b_1^2 tx}{(1 + t^2)^{3/2}} - 2 \frac{y + tz}{(1 + t^2)^2} + \frac{tz + y}{1 + t^2}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

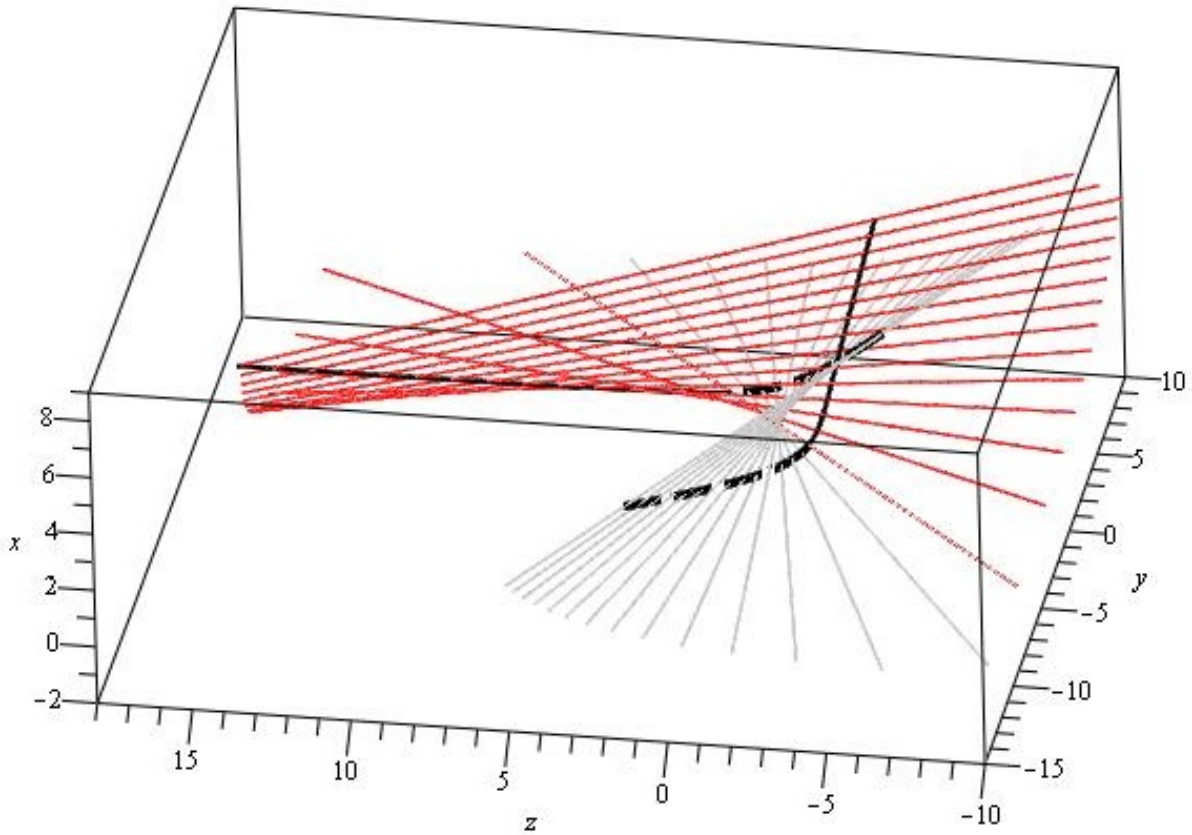


Рис. 4. Линейчатая поверхность и две траектории с начальными данными $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1); (1, -1, -2)$ при $ab^{-1} = 1, t = -3, \dots, 5$ (при $t < 0$ пунктирные линии и поверхность серая, при $t > 0$ сплошные линии и поверхность красная)

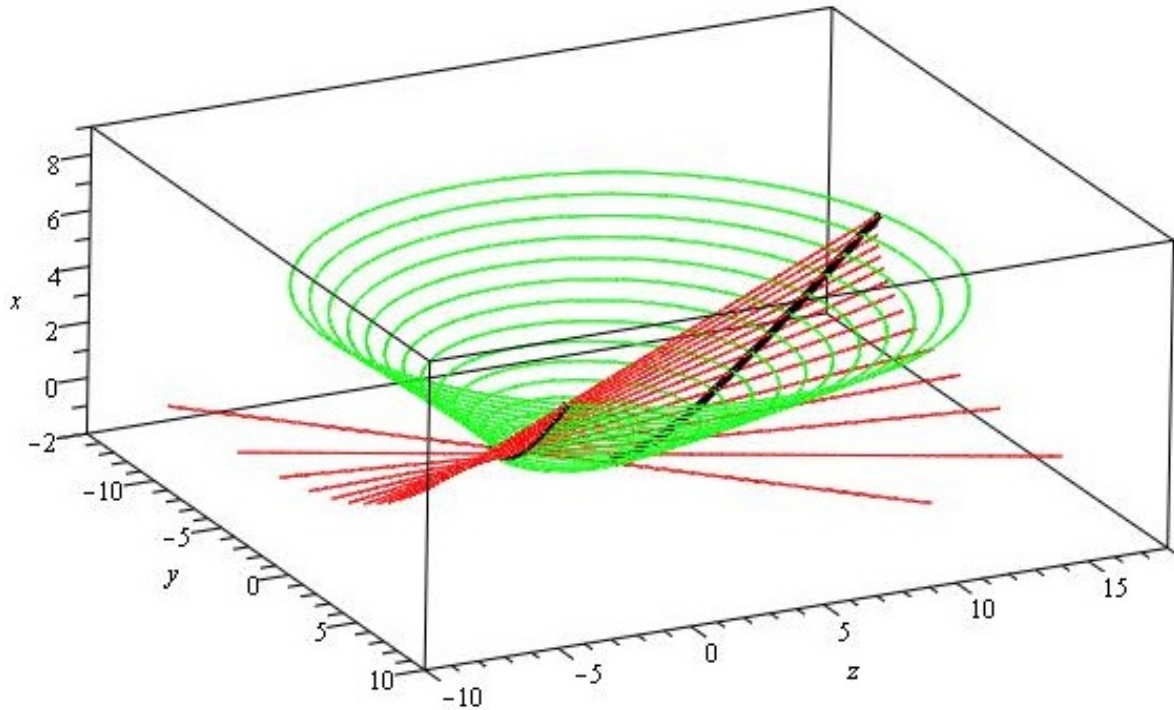


Рис. 5. Траектории как пересечение линейчатой поверхности с поверхностью из окружностей

$$p = f(I)(1 + t^2)^{-5/2}, \quad \rho = -f'(I)(1 + t^2)^{-3/2},$$

где

$$I = \frac{x^2(1 + b_2^1 b_1^2)}{2(1 + t^2)} + \frac{(y + tz)^2(4 + b_2^1 b_1^2)}{2(1 + t^2)^2},$$

$$(b_1^2)^{-1} + b_1^2 + 4(b_2^1)^{-1} + b_2^1 = 0,$$

поэтому $b_2^1 b_1^2 = -n^2 < 0$. Уравнение движения частиц (6.2) для решения (6.7) интегрируется:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1+t^2} \left(x_0 \cos \varphi + \frac{b_2^1}{n} y_0 \sin \varphi \right), \quad \varphi = n\tau, \\ y &= y_0 \cos \varphi + \frac{b_1^2}{n} x_0 \sin \varphi - t \left(z_0 + \frac{2x_0}{b_2^1} (1 - \cos \varphi) - \frac{2y_0}{n} \sin \varphi \right), \\ z &= z_0 + \frac{2x_0}{b_2^1} (1 - \cos \varphi) - \frac{2y_0}{n} \sin \varphi + t \left(y_0 \cos \varphi + \frac{b_1^2}{n} x_0 \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Якобиан перехода к лагранжевым координатам $J = (1+t^2)^{3/2} > 0$ не имеет особенностей.

Из (6.8) следуют равенства с разделёнными переменными

$$\frac{1}{1+t^2} \left(\frac{b_1^2}{n} x \right)^2 + \left(\frac{y+tz}{1+t^2} \right)^2 = \left(\frac{b_1^2}{n} x_0 \right)^2 + y_0^2 = R^2,$$

$$\frac{z-ty}{1+t^2} + \frac{2x}{b_2^1 \sqrt{1+t^2}} = z_0 + \frac{2x_0}{b_2^1} = K,$$

которые задают эллипс при фиксированном t как пересечение эллиптического цилиндра с плоскостью.

Множество эллипсов для различных t при фиксированных R и K образуют поверхность из эллипсов, на которой лежат траектории точек, расположенных на начальном эллипсе (рис. 6).

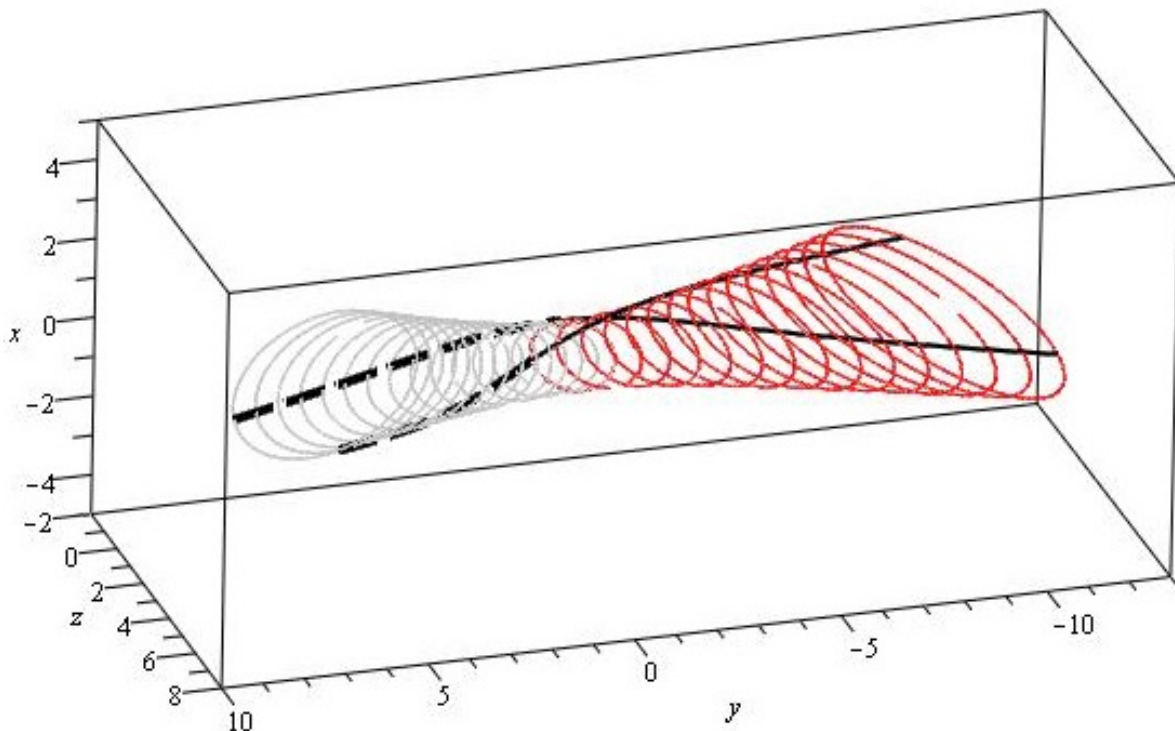


Рис. 6. Две траектории на поверхности из эллипсов с начальными данными $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 3)$; $(2^{-1}, 0, 3 - 2/\sqrt{5})$ при $b_1^2 = -2\sqrt{5}$, $b_2^1 = 2^{-1}\sqrt{5}$, $R = 1$, $K = 3$, $t = -2, \dots, 3$ (при $t < 0$ пунктирные линии и поверхность серая, при $t > 0$ сплошные линии и поверхность красная)

Поверхность уровня плотности и давления

$$\left(\frac{y + tz}{1 + t^2}\right)^2 - \frac{b_1^2}{b_2^1} \frac{x^2}{(1 + t^2)} = R^2$$

совпадает с эллиптическим цилиндром, который движется со временем (рис. 7).

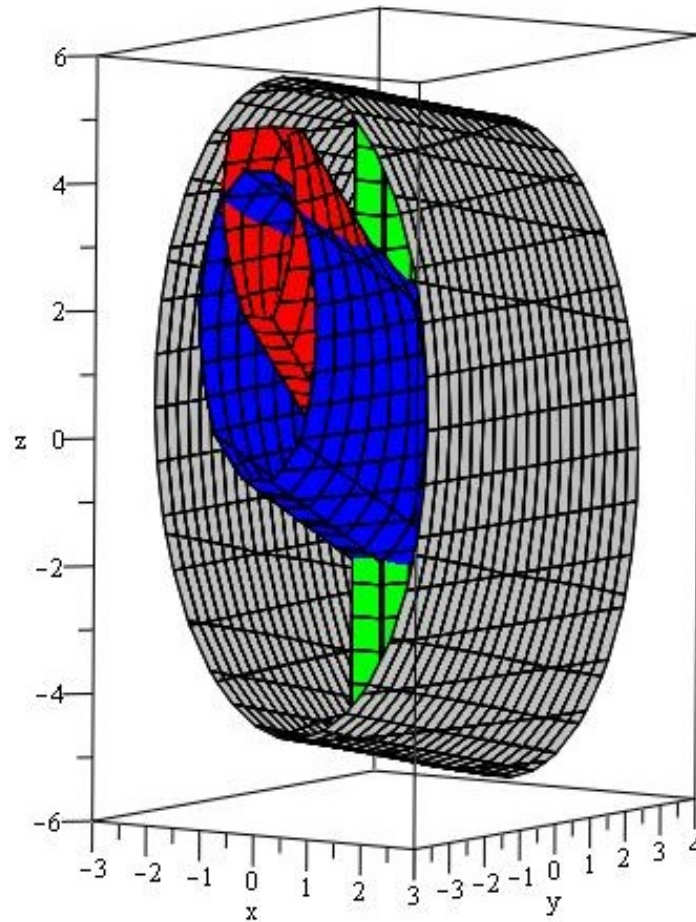


Рис. 7. Поверхность уровня плотности и давления при $b_1^2 = -2\sqrt{5}$, $b_2^1 = 2^{-1}\sqrt{5}$, $R = 1$, $t = 0$ (зелёная), $t = 1$ (красная), $t = 2$ (синяя), $t = 5$ (серая)

Аналогично решению (2.11) получаются движения уединённых волн давления и плотности с фронтами — эллиптическими цилиндрами с локальными максимумами плотности в точках перегиба функции $f(I)$.

Заключение

Итак, рассмотрена инвариантная подмодель на двумерной подалгебре ранга 2 одноатомного газа. Найдены различные простые решения подмодели, записанные через инварианты подалгебры: (2.7), (2.11), (3.6), (3.7), (3.8), (3.17), (4.9), (4.13), (5.2), (5.4)–(5.5). Для некоторых из решений подмодели рассмотрены движения частиц в физическом пространстве. Дано представление движения в целом: найдены поверхности из траекторий частиц, выходящих с определённых начальных кривых (эллипсов, прямых), которыми можно непрерывно покрыть всё пространство. Газ сначала сжимается, затем расширяется. Движение частиц происходит без коллапса. Найдены решения с уединёнными волнами плотности.

Список литературы

1. **Овсянников, Л. В.** Программа «Подмодели». Газовая динамика / Л. В. Овсянников // Приклад. математика и механика. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 30–55.
2. **Чиркунов, Ю. А.** Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск : НГТУ, 2012. — 659 с.
3. **Черевко, А. А.** Оптимальная система подалгебр алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$ / А. А. Черевко. — Новосибирск, 1996. (Препринт / РАН. Сиб. отд-е. Ин-т гидродинамики; № 4-96). — 39 с.
4. **Шаяхметова, Р. Ф.** Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа / Р. Ф. Шаяхметова // Сиб. электрон. мат. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 605–625.
5. **Хабиров, С. В.** Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений / С. В. Хабиров // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 6. — С. 1396–1406.
6. **Хабиров, С. В.** Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду / С. В. Хабиров // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 3. — С. 439–444.
7. **Шаяхметова, Р. Ф.** Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 одноатомного газа с проективным оператором / Р. Ф. Шаяхметова // Тр. Ин-та механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН. — 2016. — Т. 11, № 1. — С. 127–135.
8. **Шаяхметова, Р. Ф.** Сгущение газа с последующим разлетом / Р. Ф. Шаяхметова // Тр. Ин-та механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН. — 2017. — Т. 12, № 2. — С. 195–198.

Поступила в редакцию 08.05.2018

После переработки 11.06.2018

Сведения об авторах

Хабиров Салават Валеевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия; профессор кафедры математики, Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; e-mail: habirov@anrb.ru.

Шаяхметова Рената Фуатовна, аспирант, младший научный сотрудник, Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия; e-mail: shayakhmetova.renata@gmail.com.

SIMPLE SOLUTIONS OF RANK 2 INVARIANT SUBMODEL FOR MONATOMIC GAS

S.V. Khabirov^{1,2,a}, R.F. Shayakhmetova^{1,b}

¹*Mavlyutov Institute of Mechanics of Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia*

²*Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia*

^a*habirov@anrb.ru*, ^b*shayakhmetova.renata@gmail.com*

We consider the invariant submodel of rank 2 on two-dimensional subalgebra containing the projective operator and the dilatation operator with respect to the thermodynamic parameters of a monatomic gas. The submodel is written in the canonical form, therefore, the representation of the solution has a nontrivial form. Invariant solutions, irrotational motions, and a series of simple solutions with differential relations are obtained. The gas motions are without collapse on the whole space. Gas is compressed at first, and then it is dispersed to the vacuum. Soliton-like movements of gas bunch have also been found.

Keywords: *monatomic gas, invariant submodel, differential relations, solitary density waves.*

References

1. **Ovsyannikov L.V.** The "podmodeli" program. Gas dynamics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 601–627.
2. **Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V.** *Elementy simmetriynogo analiza differentsial'nykh uravneniy mekhaniki sploshnoy sredy* [Elements of differential equations symmetry analysis for continuum mechanics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University, 2012. 659 p. (In Russ.).
3. **Cherevko A.A.** *Optimal'naya sistema podalgebr algebrы Li operatorov, dopuskaemykh sistemoy uravneniy gazovoy dinamiki s uravneniyem sostoyaniya $p = f(S)\rho^{5/3}$* [The optimal system of subalgebras for the Lie algebra of operators admissible by the system of equations of gas dynamics with the equation of state $p = f(S)\rho^{5/3}$]. Novosibirsk, Siberian Branch of RAS, Institute of Hydrodynamics, 1996, no. 4. 39 p. (In Russ.).
4. **Shayakhmetova R.F.** Vlozhennye invariantnye podmodeli dvizheniya odnoatomnogo gaza [Inserted invariant submodels for motion of monatomic gas]. *Sibirskiyе elektronnyе matematicheskiye izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2014, vol. 11, pp. 605–625. (In Russ.).
5. **Khabirov S.V.** A hierarchy of submodels of differetial equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1110–1119.
6. **Khabirov S.V.** Reduction of an invariant submodel of gas dynamics to canonical form. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 3–4, pp. 355–359.
7. **Shayakhmetova R.F.** Invariantnye podmodeli ranga 3 i ranga 2 odnoatomnogo gaza s proektivnym operatorom [Invariant submodels of rank 3 and rank 2 monatomic gas with the projective operator]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova UNTs RAN*. [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center of RAS], 2016, vol. 11, no. 1, pp. 127–135. (In Russ.).
8. **Shayakhmetova R.F.** Sgushcheniye gaza s posleduyushchim razletom [The compression of gas followed by expansion]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova UNTs RAN* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center of RAS], 2017, vol. 12, no. 2, pp. 195–198. (In Russ.).