УДК 517.956

М. Г. КАРАТОПРАКЛИЕВА

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. I

Краевые задачи для уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами рассматривались в работах [1—15] и др.

В настоящей статье рассматривается одна краевая задача для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами в многомерной цилиндрической области.

Пусть G — ограниченная область пространства $\mathbf{R}^m$ точек $x=(x_1, \ldots, x_m)$, являющаяся суммой двух областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ и разделяющей их $(m-1)$-мерной гладкой поверхности σ. Введем обозначения: $D=G\times(0, T)$, $D_0=\{(x, 0): x\in G\}$, $D_T=\{(x, T): x\in G\}$, $S_T=\partial G\times[0, T]$, $\sigma_T=\sigma\times(0, T)$. Пусть $D^{(r)}=G^{(r)}\times(0, T)$, $D_0^{(r)}=\{(x, 0): x\in G^{(r)}\}$ и $D_T^{(r)}=\{(x, T): x\in G^{(r)}\}$, $r=1, 2$.

Рассмотрим операторы

$$\mathscr{L}^{(1)}u\equiv k^{(1)}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha^{(1)}(x, t)\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}^{(1)}u \text{ в } \overline{D^{(1)}},$$

$$\mathscr{L}^{(2)}u\equiv k^{(2)}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha^{(2)}(x, t)\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}^{(2)}u \text{ в } \overline{D^{(2)}},$$

где

$$\mathscr{A}^{(r)}u\equiv\sum_{i, j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}^{(r)}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]+\sum_{i=1}^{m}a_i^{(r)}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(r)}(x, t)u, \quad r=1, 2.$$

Предположим, что $a_{ij}^{(r)}\in C^1(\overline{D^{(r)}})$, $k^{(r)}$, $\alpha^{(r)}$, $a^{(r)}$, $a_i^{(r)}$, $\dfrac{\partial k^{(r)}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial a^{(r)}}{\partial t}\in C(\overline{D^{(r)}})$, $a_{ij}^{(r)}=a_{ji}^{(r)}$, $i, j=1, \ldots, m$; $\sum\limits_{i, j=1}^{m}a_{ij}^{(r)}\xi_i\xi_j\geqslant\nu_r\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^2$ в $\overline{D^{(r)}}$ для любого вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_m)\in\mathbf{R}^m$, где $\nu_r\equiv\text{const}>0$; $k^{(r)}\leqslant 0$ на $\overline{D_0^{(r)}}$ $(r=1, 2)$. Функция $k^{(r)}$ меняет знак в $\overline{D^{(r)}}\backslash\overline{D_0^{(r)}}$ произвольным образом, так что $\mathscr{L}^{(r)}$ является оператором смешанного типа в $\overline{D^{(r)}}\backslash\overline{D_0^{(r)}}$ $(r=1, 2)$.

Положим $P_{0,r}^{-}=\{(x, 0)\in D_0^{(r)}: k^{(r)}(x, 0)<0\}$, $P_{T,r}^{-}=\{(x, T)\in D_T^{(r)}: k^{(r)}(x, T)<0\}$ и $P_{T,r}^{+}=\{(x, T)\in D_T^{(r)}: k^{(r)}(x, T)>0\}$, $r=1, 2$.

З а д а ч а А. Найти функцию $u(x, t)$ в $\bar{D}$ такую, что

$$\mathscr{L}^{(1)}u=f^{(1)} \text{ в } D^{(1)}, \quad \mathscr{L}^{(2)}u=f^{(2)} \text{ в } D^{(2)}, \tag{1}$$

$$u\big|_{D_T}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{P_{T,1}^{-}\cup P_{T,2}^{-}}=0, \quad u\big|_{S_T}=0, \tag{2}$$

$$u^{(1)}\big|_{\sigma_T}=u^{(2)}\big|_{\sigma_T}, \quad \gamma^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial N^{(1)}}\Big|_{\sigma_T}=\gamma^{(2)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}}\Big|_{\sigma_T}, \tag{3}$$

где $f^{(r)}$ и $\gamma^{(r)}$ — заданные функции; $\dfrac{\partial}{\partial N^{(r)}}=\sum\limits_{i, j=1}^{m}a_{ij}^{(r)}[\cos(\vec{n}, x_j)]\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\vec{n}$ — нормаль к σ_T, внешняя по отношению к $D^{(1)}$; $u^{(r)}=u$ в $\overline{D^{(r)}}$ $(r=1, 2)$.

Обозначим через $W_{2,0}^1(D)$ подпространство пространства Соболева

[16] $W^1_2(D)$, являющееся замыканием в норме $W^1_2(D)$ множества всех бесконечно дифференцируемых в $\bar{D}$ функций, равных нулю вблизи S_T. Отметим, что если S_T — гладкая поверхность, то $W^1_{2,0}(D)=\{v\in W^1_2(D):$ $v=0$ на $S_T\}$.

Будем предполагать, что $f^{(r)}\in L_2(D^{(r)})$, $\gamma^{(r)}\in C^1(\overline{D^{(r)}})$ и что $\gamma^{(r)}_{\min}\equiv$ $\equiv\min\{\gamma^{(r)}(x,t):(x,t)\in\overline{D^{(r)}}\}>0$, $r=1, 2$.

Определение 1. Функцию $u(x, t)$ будем называть обобщенным решением из пространства $W^1_2(D)$ задачи А, если $u\in W^1_{2,0}(D)$, $u=0$ на D_T и выполняется интегральное тождество

$$\sum_{r=1}^{2}\int\limits_{D^{(r)}}\Bigg\{-\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)}\eta)}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{m}a^{(r)}_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\gamma^{(r)}\eta)}{\partial x_j}+ \tag{4}$$

$$+\left(\alpha^{(r)}\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}a^{(r)}_{i}\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(r)}u\right)\gamma^{(r)}\eta-f^{(r)}\gamma^{(r)}\eta\Bigg\}dxdt=0$$

для любой функции $\eta\in W^1_{2,0}(D)$, $\eta=0$ в m-мерных окрестностях в D_0 множеств $P^-_{0,1}$ и $P^-_{0,2}$ и в m-мерных окрестностях в D_T множеств $P^+_{T,1}$ и $P^+_{T,2}$ (эти окрестности могут быть разными для разных функций η).

Отметим, что в случае, когда $k^{(1)}=-1$, $k^{(2)}=0$, $\alpha^{(1)}=0$ и $\alpha^{(2)}=1$, задача А рассматривалась в работах [8, 9], где доказаны единственность и существование обобщенного решения с конечным интегралом энергии.

Единственность обобщенного решения из $W^1_2(D)$ задачи А в случае, когда $k^{(r)}\leqslant 0$ на $\overline{D^{(r)}_T}$, $r=1, 2$, доказана в [17]. В настоящей работе доказывается существование обобщенного решения из $W^1_2(D)$ задачи А.

Лемма 1. *Пусть $\eta\in W^1_{2,0}(D)$ и $\eta=0$ в m-мерной окрестности $\mathscr{V}^0$ в D_0 множества $P_0\subset D_0$ и в m-мерной окрестности $\mathscr{V}^T$ в D_T множества $P_T\subset D_T$. Тогда существует последовательность функций $\{\eta_i\}\subset C^\infty(\bar{D})$ такая, что $\eta_i=0$ вблизи S_T в m-мерной окрестности в D_0 множества P_0 и в m-мерной окрестности в D_T множества P_T $(i=1, 2, \ldots)$, и $\eta_i\to\eta$ в $W^1_2(D)$ при $i\to\infty$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathscr{V}}^0$—m-мерная, лежащая на плоскости $t=0$ окрестность множества P_0, такая, что $\tilde{\mathscr{V}}^0\cap D_0=\mathscr{V}^0$, а $\tilde{\mathscr{V}}^T$ — m-мерная, лежащая на плоскости $t=T$ окрестность множества P_T, такая, что $\tilde{\mathscr{V}}^T\cap D_T=\mathscr{V}^T$. Тогда если $\operatorname{dist}\{\partial P_0;\ \partial\tilde{\mathscr{V}}^0\}=d_0$ и $\operatorname{dist}\{\partial P_T;\ \partial\tilde{\mathscr{V}}^T\}=d_T$, то $d=\min(d_0, d_T)>0$. Пусть $0<\rho<d/4$. Введем обозначения: $\tilde{\mathscr{V}}^0_\rho=$ $=\{(x, 0)\in\tilde{\mathscr{V}}^0:\operatorname{dist}[(x, 0);\ \partial\tilde{\mathscr{V}}^0]\geqslant\rho\}$, $\tilde{\mathscr{V}}^T_\rho=\{(x, T)\in\tilde{\mathscr{V}}^T:\operatorname{dist}[(x, T);$ $\partial\tilde{\mathscr{V}}^T]\geqslant\rho\}$, $\tilde{\mathscr{W}}^0_\rho=\{x:(x,0)\in\tilde{\mathscr{V}}^0_\rho\}$, $\tilde{\mathscr{W}}^T_\rho=\{x:(x,T)\in\tilde{\mathscr{V}}^T_\rho\}$, $\mathscr{V}^0_\rho=\tilde{\mathscr{V}}^0_\rho\cap D_0$, $\mathscr{V}^T_\rho=\tilde{\mathscr{V}}^T_\rho\cap D_T$, $\mathscr{W}^0_\rho=\tilde{\mathscr{W}}^0_\rho\cap G$, $\mathscr{W}^T_\rho=\tilde{\mathscr{W}}^T_\rho\cap G$.

Пусть $\mathscr{U}^0_\rho=\overline{\tilde{\mathscr{W}}^0_\rho}\times[-\rho, 2\rho]$, $\mathscr{U}^T_\rho=\overline{\tilde{\mathscr{W}}^T_\rho}\times[T-2\rho, T+\rho]$ и χ^0_ρ, χ^T_ρ суть соответствующие им характеристические функции. Положим $\varphi^l_\rho(x, t)=$ $=\left(\frac{1}{\rho}\right)^{m+1}\int\limits_{\mathbf{R}^{m+1}}\chi^l_\rho(\xi, \tau)\,\omega\left(\frac{x-\xi}{\rho}\right)\varkappa\left(\frac{t-\tau}{\rho}\right)d\xi d\tau$ для $l=0, T$, где $\omega\in$ $\in C^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\operatorname{supp}\omega=\{x\in\mathbf{R}^m:\sqrt{x_1^2+\cdots+x_m^2}\leqslant 1\}$, $\omega\geqslant 0$, $\omega(-x)=\omega(x)$, $\int\limits_{\mathbf{R}^m}\omega(x)\,dx=1$, и $\varkappa\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\operatorname{supp}\varkappa=[-1, 1]$, $\varkappa(-t)=\varkappa(t)$, $\varkappa\geqslant 0$,

$\int\limits_{-1}^{1} \varkappa(t)\,dt = 1$. Так как $\eta \in W^1_{2,0}(D)$, то существует последовательность функций $\{\beta_r\} \subset C^\infty(\bar{D})$, равных нулю вблизи S_T, которая сходится в $W^1_2(D)$ к функции η. Легко видеть, что функция $\beta_r(1-\overset{0}{\varphi}_\rho-\overset{T}{\varphi}_\rho) \in C^\infty(\bar{D})$ и равна нулю вблизи S_T и на множествах $\overset{0}{\mathscr{W}}_{2\rho} \times [0, \rho]$ и $\overset{T}{\mathscr{W}}_{2\rho} \times [T-\rho, T]$. Тогда она равна нулю и на множествах $\overset{0}{\mathscr{V}}_{2\rho}$ и $\overset{T}{\mathscr{V}}_{2\rho}$, являющихся в силу условия $0<\rho<d/4$ m-мерными окрестностями множеств P_0 и P_T соответственно. Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon>0$ существуют числа r_ε и ρ_ε такие, что $r_\varepsilon>0$, $0<\rho_\varepsilon<d/4$ и

$$\|\eta-\beta_{r_\varepsilon}(1-\overset{0}{\varphi}_{\rho_\varepsilon}-\overset{T}{\varphi}_{\rho_\varepsilon})\|_{W^1_2(D)}<\varepsilon.$$

Пусть числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ такие, что $\varepsilon_i>0$ и $\varepsilon_i>\varepsilon_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots$, и $\varepsilon_i\to 0$ при $i\to\infty$. Полагая $\eta_i=\beta_{r_{\varepsilon_i}}(1-\overset{0}{\varphi}_{\rho_{\varepsilon_i}}-\overset{T}{\varphi}_{\rho_{\varepsilon_i}})$, $i=1, 2, \ldots$, получаем требуемую последовательность функций. Лемма доказана.

Следствие 1. *В определении 1 достаточно потребовать, чтобы тождество (4) выполнялось для любой функции $\eta\in C^\infty(\bar{D})$, равной нулю вблизи S_T в m-мерных окрестностях в D_0 множеств $P^-_{0,1}$ и $P^-_{0,2}$ и в m-мерных окрестностях в D_T множеств $P^+_{T,1}$ и $P^+_{T,2}$.*

Следствие 2. *Для любой функции $\eta\in W^1_{2,0}(D)$, равной нулю на $D_T(D_0)$, существует последовательность функций из $C^\infty(\bar{D})$, равных нулю вблизи S_T и вблизи $D_T(D_0)$, которая сходится в $W^1_2(D)$ к функции η.*

Пусть $Q^0_r=\{(x, t)\in\overline{D^{(r)}}: k^{(r)}(x, t)=0\}$, $Q^+_r=\{(x, t)\in\overline{D^{(r)}}: k^{(r)}(x, t)>0\}$, $Q^-_r=\{(x, t)\in\overline{D^{(r)}}: k^{(r)}(x, t)<0\}$, $r=1, 2$. Обозначим через π_x прямую, проведенную через точку $(x, 0)$ параллельно оси Ot. Будем рассматривать следующие три случая:

$$k^{(r)} \text{ не меняет знака в } \overline{D^{(r)}}, \text{ т. е. } k^{(r)}\leqslant 0 \text{ или } k^{(r)}\geqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}}, \tag{5}$$

$k^{(r)}$ меняет знак в $\overline{D^{(r)}}$ и когда $\pi_x\cap\overline{Q^-_r}\cap\overline{Q^+_r}\neq\varnothing$ для $x\in\overline{G^{(r)}}$, то каждая точка множества $\pi_x\cap\overline{Q^-_r}\cap\overline{Q^+_r}$ принадлежит некоторому замкнутому отрезку точек множества $\pi_x\cap Q^0_r$ и при этом $\inf\{\operatorname{dist}(\pi_x\cap Q^+_r;\ \pi_x\cap Q^-_r):$

$$x\in\overline{G^{(r)}} \text{ и } \pi_x\cap Q^+_r\neq\varnothing,\ \pi_x\cap Q^-_r\neq\varnothing\}=d^{(r)}_0>0, \tag{6}$$

$$k^{(r)} \text{ меняет знак в } \overline{D^{(r)}} \text{ произвольным образом и липшицева в } \overline{D^{(r)}}. \tag{7}$$

Пусть выполняются условия

$$\frac{\partial^2 k^{(r)}}{\partial t^2},\ \frac{\partial\alpha^{(r)}}{\partial t},\ \frac{\partial^2\gamma^{(r)}}{\partial t^2}\in C(\overline{D^{(r)}}),\quad r=1, 2, \tag{8}$$

$$\min_{\overline{D^{(r)}}}\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)(x, t)\equiv\delta^{(r)}_0>0,\quad r=1, 2, \tag{9}$$

$$\gamma^{(r)}\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)-k^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}\geqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\quad r=1, 2, \tag{10}$$

$$-a^{(r)}\gamma^{(r)}+\frac{\partial(\alpha^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}-\frac{\partial^2(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t^2}\geqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\quad r=1, 2, \tag{11}$$

$$a^{(r)}_{\max}<0,\ -\nu_r(\gamma^{(r)}_{\min})^2 a^{(r)}_{\max}>4\mu_1^{(r)},\ r=1,\ 2, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &-a^{(r)}>B'\left\{3\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}+2\left[B'+\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}(\gamma^{(r)})^{-1}\right]k^{(r)}\right\} \text{ в } \overline{D^{(r)}}\\ &\text{и } -a^{(r)}>\frac{B'}{4}\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} \text{ на } \overline{D_0^{(r)}},\ r=1,\ 2,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где

$$\mu_1^{(r)}=\max_{\overline{D^{(r)}}}\sum_{i=1}^{m}\left(a_i^{(r)}\gamma^{(r)}-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial x_j}\right)^2(x,\ t),\ a^{(r)}_{\max}=\max_{\overline{D^{(r)}}}a^{(r)}(x,\ t),$$

$$\begin{aligned} B'=\max_{l=1,\ 2}&\left\{\frac{2\mu_2^{(l)}}{\nu_l},\ 4\mu_3^{(l)},\ \frac{16\mu_1^{(l)}}{\nu_l\delta_0^{(l)}(\gamma^{(l)}_{\min})^2},\right.\\ &\left.\max_{\overline{D^{(l)}}}\left[-2\frac{\partial\gamma^{(l)}}{\partial t}(\gamma^{(l)})^{-1}\right](x,\ t)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

В (14) постоянная $\mu_2^{(l)}\geqslant 0$ такая, что $\mu_2^{(l)}=0$, если $\sum\limits_{i,\ j=1}^{m}\frac{\partial a_{ij}^{(l)}}{\partial t}\xi_i\xi_j\geqslant 0$ в $\overline{D^{(l)}}$ для всех $\xi\in\mathbf{R}^m$, а в противном случае $\sum\limits_{i,\ j=1}^{m}\frac{\partial a_{ij}^{(l)}}{\partial t}\xi_i\xi_j\geqslant-\mu_2^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^2$ в $\overline{D^{(l)}}$ для всех $\xi\in\mathbf{R}^m$. Постоянная $\mu_3^{(l)}$ такая, что $\mu_3^{(l)}=0$, если $\frac{\partial a^{(l)}}{\partial t}\leqslant 0$ в $\overline{D^{(l)}}$, а в противном случае $\mu_3^{(l)}=\max\limits_{\overline{D^{(l)}}}\left\{-\frac{\partial a^{(l)}}{\partial t}(x,\ t)\,[a^{(l)}(x,\ t)]^{-1}\right\}$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (8)—(13) и какие-либо два из условий (5)—(7) (одно для $r=1$, а другое для $r=2$). Тогда существует обобщенное решение $u\in W_2^1(D)$ задачи А при произвольных $f^{(1)}\in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)}\in L_2(D^{(2)})$. Для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^1(D)}\leqslant\tilde{c}_0\,\{\|f^{(1)}\|_{L_2(D^{(1)})}+\|f^{(2)}\|_{L_2(D^{(2)})}\}. \tag{15}$$

Доказательство. Докажем теорему методом конечных разностей. План доказательства следующий: 1) строим разностную схему исходя из тождества (4) и условий $u|_{D_T}=0$ и $u|_{S_T}=0$; 2) показываем, что эта схема устойчива относительно правой части, откуда следует, что она имеет единственное решение u_Δ; 3) для решения u_Δ выводим подходящую априорную оценку, которая позволяет нам применить результаты О. А. Ладыженской [16, гл. VI, § 3] и найти некоторую функцию $u\in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,0}(D)$; 4) показываем, что u является обобщенным решением из $W_2^1(D)$ задачи А.

Проведем доказательство теоремы в случае, когда выполняется условие (7) для $r=1,\ 2$. Пусть $\mathcal{O}_\varepsilon(x,\ t)$ — открытый шар в $\mathbf{R}^{m+1}$ с центром $(x,\ t)$ и радиусом $\varepsilon>0$. Тогда $\partial Q_r^0\subset\bigcup\{\mathcal{O}_\varepsilon(x,\ t):(x,\ t)\in\partial Q_r^0\}\equiv(\partial Q_r^0)_\varepsilon$. Множество $(\partial Q_r^0)_\varepsilon$ является ε-окрестностью множества ∂Q_r^0. Обозначим через $\mathcal{U}_\varepsilon^{(r)}$ ε-окрестность множества $\overline{D^{(r)}}\setminus(\partial Q_r^0)_{3\varepsilon}$. Положим

$$\varphi_\varepsilon^{(r)}(x,\ t)=\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{m+1}\int\limits_{\mathbf{R}^{m+1}}\chi_\varepsilon^{(r)}(\xi,\ \theta)\,\omega\left(2\frac{x-\xi}{\varepsilon},\ 2\frac{t-\theta}{\varepsilon}\right)d\xi d\theta,$$

где $\chi_\varepsilon^{(r)}$ — характеристическая функция $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon^{(r)}}$, $w \in C^\infty(\mathbf{R}^{m+1})$, $\operatorname{supp} w = \overline{\mathcal{O}_1(0, 0)}$, $w \geqslant 0$, $w(-x, -t) = w(x, t)$, $\int\limits_{\mathbf{R}^{m+1}} w(x, t)\,dx\,dt = 1$. Легко видеть, что $\varphi_\varepsilon^{(r)} \in C^\infty(\mathbf{R}^{m+1})$, $0 \leqslant \varphi_\varepsilon^{(r)} \leqslant 1$, $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon^{(r)} = \overline{\mathcal{U}_{3\varepsilon/2}^{(r)}}$, $\varphi_\varepsilon^{(r)} \equiv 1$ в $\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon/2}^{(r)}}$ и $\varphi_\varepsilon^{(r)} \equiv 0$ в $(\overline{\partial Q_r^0})_\varepsilon$. Кроме того, $\left| \dfrac{\partial \varphi_\varepsilon^{(r)}}{\partial t}(x, t) \right| \leqslant \dfrac{2}{\varepsilon} M_r$ в $\mathbf{R}^{m+1}$, где постоянная $M_r > 0$ не зависит от ε.

Пусть $(Q_r^+)_\varepsilon = Q_r^+ \setminus (\partial Q_r^0)_\varepsilon$, $(Q_r^-)_\varepsilon = Q_r^- \setminus (\partial Q_r^0)_\varepsilon$, $(Q_r^0)_\varepsilon = Q_r^0 \setminus (\partial Q_r^0)_\varepsilon$. Так как $k^{(r)} \in C(\overline{D^{(r)}})$, то $\overline{(Q_r^+)_\varepsilon} \cap \overline{(Q_r^-)_\varepsilon} = \varnothing$, $\overline{(Q_r^-)_\varepsilon} \cap \overline{(Q_r^0)_\varepsilon} = \varnothing$, $\overline{(Q_r^+)_\varepsilon} \cap \overline{(Q_r^0)_\varepsilon} = \varnothing$ и $\overline{(Q_r^+)_\varepsilon} \cap \overline{D_0^{(r)}} = \varnothing$. Тогда если $(d_r^1)_\varepsilon = \operatorname{dist}\{\overline{(Q_r^+)_\varepsilon}; \overline{(Q_r^-)_\varepsilon}\}$, $(d_r^2)_\varepsilon = \operatorname{dist}\{\overline{(Q_r^+)_\varepsilon}; \overline{(Q_r^0)_\varepsilon}\}$, $(d_r^3)_\varepsilon = \operatorname{dist}\{\overline{(Q_r^-)_\varepsilon}; \overline{(Q_r^0)_\varepsilon}\}$ и $(d_r^4)_\varepsilon = \operatorname{dist}\{\overline{(Q_r^+)_\varepsilon}; \overline{D_0^{(r)}}\}$, то $d_\varepsilon^{(r)} = \min[(d_r^1)_\varepsilon, (d_r^2)_\varepsilon, (d_r^3)_\varepsilon, (d_r^4)_\varepsilon] > 0$.

Пусть τ — такое число, что

$$N\tau = T, \text{ где } N \geqslant 3 \text{ — целое число,} \tag{16}$$

и

$$0 < \tau < d_\varepsilon^{(r)}/3, \quad r = 1, 2. \tag{17}$$

Положим $k_\varepsilon^{(r)} = \varphi_\varepsilon^{(r)} k^{(r)}$. Пусть $x \in \overline{G^{(r)}}$. Рассмотрим точки $(x, l\tau)$, $l = 0, 1, \ldots, N$. Легко заметить, что существуют целые числа ν, N_0, $N_1, \ldots, N_{\nu+1}$, зависящие от x и $k_\varepsilon^{(r)}$, такие, что $\nu \geqslant 0$, $N_0 \equiv 0 \leqslant N_1 < N_2 < \ldots < N_\nu < N \equiv N_{\nu+1}$, $N_\nu \leqslant N - 3$,

$$\left.\begin{array}{l} k_\varepsilon^{(r)}(x, (1+N_\rho)\tau) = k_\varepsilon^{(r)}(x, (2+N_\rho)\tau) = 0 \text{ и} \\ N_\rho + 2 < N_{\rho+1} \text{ для } \rho = 1, \ldots, \nu \text{ при } \nu \geqslant 1. \end{array}\right\} \tag{18}$$

При этом выполняется один из следующих двух случаев:

I) ν — четное число; $k_\varepsilon^{(r)} \leqslant 0$ в точках $(x, 0)$, $(x, \tau), \ldots, (x, N_1\tau)$ и $(x, \tau(1+N_{2\rho}))$, $(x, \tau(2+N_{2\rho})), \ldots, (x, \tau N_{2\rho+1})$ для $\rho = 1, \ldots, \nu/2$; $k_\varepsilon^{(r)} \geqslant 0$ в точках $(x, \tau(1+N_{2\rho+1}))$, $(x, \tau(2+N_{2\rho+1})), \ldots, (x, \tau N_{2\rho+2})$ для $\rho = 0, \ldots, (\nu-2)/2$;

II) ν — нечетное число; $k_\varepsilon^{(r)} \leqslant 0$ в точках $(x, 0), \ldots, (x, \tau N_1)$ и $(x, \tau(1+N_{2\rho}))$, $(x, \tau(2+N_{2\rho})), \ldots, (x, \tau N_{2\rho+1})$ для $\rho = 1, \ldots, (\nu-1)/2$; $k_\varepsilon^{(r)} \geqslant 0$ в точках $(x, \tau(1+N_{2\rho+1})), \ldots, (x, \tau N_{2\rho+2})$ для $\rho = 0, \ldots, (\nu-1)/2$.

Очевидно $k_\varepsilon^{(r)}(x, l\tau) \leqslant 0$ для $l = 0, \ldots, N_1$ как в случае I), так и в случае II). Кроме того, $k_\varepsilon^{(r)}(x, l\tau) \leqslant 0$ для $l = 1 + N_\nu, \ldots, N$ в случае I), а $k_\varepsilon^{(r)}(x, l\tau) \geqslant 0$ для $l = 1 + N_\nu, \ldots, N$ в случае II). Случай $\nu = 0$ отвечает ситуации, когда $k_\varepsilon^{(r)}(x, l\tau) \leqslant 0$ для $l = 0, \ldots, N$. Случай $\nu = 1$ и $N_1 = 0$ отвечает ситуации, когда $k_\varepsilon^{(r)}(x, l\tau) \geqslant 0$ для $l = 1, \ldots, N$ и $k_\varepsilon^{(r)}(x, 0) = 0$. Если для некоторой точки $x \in \overline{G^{(r)}}$ имеем $\{(x, t) : 0 < t \leqslant t'\} \subset Q_r^+$, $k^{(r)}(x, 0) = 0$, $\{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant t''\} \subset (\overline{\partial Q_r^0})_\varepsilon$, $\{(x, t) : t'' \leqslant t \leqslant t'\} \subset \overline{(Q_r^+)_\varepsilon}$ и $0 < \tau < t' - t''$, то $N_1 = 0$ и

$$k_\varepsilon^{(r)}(x, 0) = k_\varepsilon^{(r)}(x, \tau) = k_\varepsilon^{(r)}(x, 2\tau) = 0. \tag{19}$$

Нетрудно показать, что существует число λ со свойствами

$$\lambda > B' \geqslant 0, \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a^{(r)} > \lambda \left\{ 3 \frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} + 2 \left[\lambda + \frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial t} (\gamma^{(r)})^{-1} \right] k^{(r)} \right\} \text{ в } \overline{D^{(r)}} \\ \text{и } -a^{(r)} > \frac{\lambda}{4} \frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} \text{ на } \overline{D_0^{(r)}} \text{ для } r=1,\ 2. \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Введем следующие функции:

$$\alpha_\varepsilon^{(r)} = \alpha^{(r)} - \frac{1}{2} \frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t} (\gamma^{(r)})^{-1} - \frac{1}{2} k^{(r)} \frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial t} (\gamma^{(r)})^{-1}, \qquad (22)$$

$$a_\varepsilon^{(r)} = a^{(r)} - \frac{\lambda}{4} k^{(r)} \frac{\partial \varphi_\varepsilon^{(r)}}{\partial t} + \frac{\lambda (1 - \varphi_\varepsilon^{(r)})}{4 \gamma^{(r)}} \left[\lambda k^{(r)} \gamma^{(r)} + \frac{\partial (k^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t} \right]. \qquad (23)$$

Пусть $p_1, \ldots, p_m$, $l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h_1>0, \ldots, h_m>0$, $\tau>0$ и τ удовлетворяет условиям (16) и (17). Разобьем $\mathbf{R}^{m+1}$ плоскостями $x_i = p_i h_i$, $i=1, \ldots, m$, $t=l\tau$ на элементарные ячейки $\omega_{pl} = \{(x, t) \in \mathbf{R}^{m+1}: p_i h_i < x_i < (1+p_i) h_i,\ i=1, \ldots, m,\ l\tau < t < (l+1)\tau\}$. Точку $(x^p, l\tau) = (p_1 h_1, \ldots, p_m h_m, l\tau)$ будем называть вершиной ячейки ω_{pl}. Вершины всех ячеек ω_{pl} образуют в $\mathbf{R}^{m+1}$ сетку точек Δ. Функции, определенные на сетке Δ, будем называть сеточными и обозначать латинскими буквами с нижним индексом Δ. Отметим, что если не указано, в какой точке взято значение данной сеточной функции, то будем считать, что это сделано в точке $(x^p, l\tau)$. Будем употреблять обозначения из [16, гл. VI], а также обозначения $\overset{+1}{u}_\Delta(x^p, l\tau) = u_\Delta(x^p, (l+1)\tau)$, $\overset{-1}{u}_\Delta(x^p, l\tau) = u_\Delta(x^p, (l-1)\tau)$. Положим $\omega_p = \{x \in \mathbf{R}^m: p_i h_i < x_i < (1+p_i) h_i,\ i=1, \ldots, m\}$, $\overline{G}_h = \{\overline{\omega}_p \subset \overline{G}\}$, $\overline{\Omega}_h = \{x^p \in \overline{G}_h\}$, $\partial\overline{\Omega}_h = \{x^p \in \partial \overline{G}_h\}$, $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \setminus \partial\overline{\Omega}_h$, $\overline{D}_\Delta = \{\overline{\omega}_{pl} \subset \overline{D}\}$, $D_\Delta = \overline{D}_\Delta \setminus \partial \overline{D}_\Delta$, $\overline{Y}_h = \{\overline{\omega}_p \subset \overline{G}_h: \omega_p \cap G^{(1)} \neq \varnothing$ и $\omega_p \cap G^{(2)} \neq \varnothing\}$, $\overset{*}{\Omega}_h = \{x^p \in \overline{\Omega}_h: \overline{\omega}_p \subset \overline{G}_h\}$, $\overset{*}{\zeta}_h = \{x^p \in \overline{\Omega}_h: \overline{\omega}_p \subset \overline{Y}_h\}$, $\overset{*}{\zeta}{}_h^{(1)} = \{x^p \in \overset{*}{\zeta}_h \cap (\overline{G^{(1)}} \setminus \sigma)\}$, $\overset{*}{\zeta}{}_h^{(2)} = \{x^p \in \overset{*}{\zeta}_h \cap \overline{G^{(2)}}\}$ и $\overline{G_h^{(r)}} = \{\overline{\omega}_p \subset \overline{G^{(r)}}\}$, $\overline{\Omega_h^{(r)}} = \{x^p \in \overline{G_h^{(r)}}\}$, $\overset{*}{\Omega}{}_h^{(r)} = \{x^p \in \overline{\Omega_h^{(r)}}: \overline{\omega}_p \subset \overline{G_h^{(r)}}\}$, $r=1, 2$.

Теперь напишем уравнения разностной схемы. Положим $N^{\#} = N_0 = 0$, когда $\nu=0$, и $N^{\#} = N_1$, когда $\nu \geqslant 1$. Пусть $x^p \in (\overset{*}{\Omega}{}_h^{(r)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(r)}) \setminus \partial\overline{\Omega}_h$. В точках $(x^p, l\tau)$, где целое число l принадлежит какому-либо промежутку $[0, N^{\#}]$, $[1+N_{2\rho}, N_{2\rho+1}]$ для $\rho=1, \ldots, (\nu-2)/2$ в случае I) и для $\rho=1, \ldots, (\nu-1)/2$ в случае II) или $l \in [1+N_\nu, N-2]$ в случае I), рассматриваем уравнение

$$\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_\Delta^{(r)} u_{tt} + \overset{+1}{\alpha}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_\Delta^{(r)} u_t + \mathscr{A}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} u_\Delta = f_\Delta^{(r)} \gamma_\Delta^{(r)},\ r=1,\ 2, \qquad (24)$$

где

$$\mathscr{A}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} u_\Delta \equiv \sum_{i,\,j=1}^{m} (\overset{+1}{a}_{ij\Delta} u_{x_i})_{\bar{x}_j} + \sum_{i=1}^{m} b_{i\Delta}^{(r)} u_{x_i} + \overset{+1}{a}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_\Delta^{(r)} u_\Delta. \qquad (25)$$

В случае I) в точках $(x^p, (N-1)\tau)$ рассматриваем разностное уравнение

$$\overset{+1}{\gamma}{}_\Delta^{(r)} \left(\overset{+1}{\alpha}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} - \frac{1}{\tau} \overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \right) u_t + \mathscr{A}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} u_\Delta = f_\Delta^{(r)} \gamma_\Delta^{(r)},\ r=1,\ 2. \qquad (26)$$

В точках $(x^p, l\tau)$, где целое число l принадлежит некоторому промежутку $[1+N_{2\rho+1}, N_{2\rho+2}]$ для $\rho=0, \ldots, (\nu-2)/2$ в случае I) и $\rho=0, \ldots$

..., $(\nu-3)/2$ в случае II) или $l\in[1+N_\nu, N-1]$ в случае II), рассматриваем разностное уравнение

$$k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\gamma^{(r)}_{\Delta}\overset{+1}{u}_{t\bar{t}}+\alpha^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{\gamma^{(r)}_{\Delta}}u_t+\mathscr{A}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}u_\Delta=f^{(r)}_{\Delta}\gamma^{(r)}_{\Delta},\ r=1,\ 2. \tag{27}$$

Будем предполагать, что неизвестная сеточная функция u_Δ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{array}{l} u_\Delta(x^p, N\tau)=0 \text{ для } x^p\in\overline{\Omega}_h;\ u_\Delta(x^p, l\tau)=0 \text{ для } x^p\in\partial\overline{\Omega}_h \\ \text{и } l=0, 1, \dots, N;\ u_\Delta(x^p, l\tau)=0 \text{ для } (x^p, l\tau)\notin\overline{D}_\Delta. \end{array}\right\} \tag{28}$$

В (24)—(27) использованы обозначения: $k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}=k^{(r)}_{\varepsilon}$, $\alpha^{(r)}_{\varepsilon\Delta}=\alpha^{(r)}_{\Delta}$, $a^{(r)}_{\varepsilon\Delta}=a^{(r)}_{\varepsilon}$, $\gamma^{(r)}_{\Delta}=\gamma^{(r)}$, $b^{(r)}_{i\Delta}=a^{(r)}_{i}\gamma^{(r)}-\sum\limits_{j=1}^{m}a^{(r)}_{ij}\dfrac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial x_j}$ в точках $(x^p, l\tau)$, когда $x^p\in\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h\cup\overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h$ и $0\leqslant l\leqslant N$; $k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}=\alpha^{(r)}_{\varepsilon\Delta}=a^{(r)}_{\varepsilon\Delta}=\gamma^{(r)}_{\Delta}=b^{(r)}_{i\Delta}=0$ в остальных точках сетки Δ; $a_{ij\Delta}=a^{(r)}_{ij}\gamma^{(r)}$ в точках $(x^p, l\tau)$, где $0\leqslant l\leqslant N$ и $x^p\in\overline{\Omega}_h$, причем $r=1$, когда $x^p\in\overset{*}{\Omega}{}^{(1)}_h\cup\overset{*}{\zeta}{}^{(1)}_h\cup\{(\partial\overline{\Omega}_h\backslash\overset{*}{\Omega}_h)\cap\overline{(G^{(1)}\backslash\sigma)}\}$, и $r=2$, когда $x^p\in\overset{*}{\Omega}{}^{(2)}_h\cup\cup\overset{*}{\zeta}{}^{(2)}_h\cup\{(\partial\overline{\Omega}_h\backslash\overset{*}{\Omega}_h)\cap\overline{G^{(2)}}\}$, $a_{ij\Delta}=0$ в остальных точках сетки Δ;

$$f^{(r)}_{\Delta}(x^p, l\tau)=\frac{1}{h_1h_2\cdots h_m\tau}\int\limits_{\omega_{pl}}f^{(r)}(x, t)\,dxdt, \tag{29}$$

где считаем, что $f^{(r)}=0$ вне $D^{(r)}$.

Как видно из (24)—(27), любой точке $(x^p, l\tau)$, где $x^p\in\Omega_h$ и $0\leqslant l\leqslant\leqslant N-1$, ставится в соответствие разностное уравнение. Таким образом, для определения неизвестных $u_\Delta(x^p, l\tau)$, где x^p пробегает Ω_h и $0\leqslant l\leqslant\leqslant N-1$, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Сеточную функцию u_Δ будем называть решением этой системы, если u_Δ удовлетворяет ее уравнениям и условиям (28).

Теперь покажем, что существует постоянная $c_0>0$ такая, что для любого ε, $0<\varepsilon<1$, для любых шагов $h_1, \dots, h_m$, τ сетки Δ, где τ достаточно мало, и для любого решения u_Δ описанной выше системы разностных уравнений имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\tau h_0\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{\overline{\Omega}_h}\Big[u^2_\Delta+(u_t)^2+\sum_{i=1}^{m}(u_{x_i})^2\Big]\leqslant\\ \leqslant c_0\sum_{r=1}^{2}\tau h_0\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h\cup\overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h}(f^{(r)}_{\Delta})^2,\end{gathered} \tag{30}$$

где $h_0=h_1h_2\cdots h_m$. Из (30) следует, что однородная система разностных уравнений имеет только тривиальное решение. Тогда для тех $\tau>0$, для которых справедливо (30), рассматриваемая система разностных уравнений имеет единственное решение u_Δ.

Пусть u_Δ — решение системы разностных уравнений. Положим $q(t)=\exp(\lambda t)$, $s(t)=-(\lambda/2)q(t)$, где постоянная λ удовлетворяет условиям (20) и (21). Пусть $q_\Delta=q$ и $s_\Delta=s$ в точках $l\tau$, $l=0, \pm1, \dots$ Умножим каждое уравнение системы на $\tau h_0(q_\Delta u_t+s_\Delta u_\Delta)$ и просуммируем сначала при фиксированном $p=(p_1, \dots, p_m)$ относительно l от 0 до

$N-1$, а потом по всем индексам p, когда x^p пробегает множество $(\overset{*}{\Omega}{}_h^{(r)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(r)}) \setminus \partial\overline{\Omega}_h$, $r=1, 2$. Ввиду (25) и (28) получаем тождество

$$\begin{gathered}
\tau h_0 \sum_{r=1}^{2} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r,\,*} \Big[\overset{+1}{\alpha}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} q_\Delta (u_t)^2 + \overset{+1}{\alpha}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} s_\Delta u_\Delta u_t + \\
+ \overset{+1}{a}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} q_\Delta u_\Delta u_t + \overset{+1}{a}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} s_\Delta u_\Delta^2 + \sum_{i=1}^{m} b_{i\Delta}^{(r)} u_{x_i} (s_\Delta u_\Delta + q_\Delta u_t) \Big] + \\
+ \tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{i,\,j=1}^{m} (\overset{+1}{a}_{ij\Delta} u_{x_i})_{\overline{x}_j} (s_\Delta u_\Delta + q_\Delta u_t) + h_0 \sum_{r=1}^{2} \sum_{r,\,*} A^{(r)}(x^p) = \\
= \sum_{r=1}^{2} \tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r,\,*} f_\Delta^{(r)} \gamma_\Delta^{(r)} (s_\Delta u_\Delta + q_\Delta u_t),
\end{gathered} \tag{31}$$

где $\sum\limits_{r,\,*}$ обозначает суммирование по тем индексам p, для которых x^p пробегает $(\overset{*}{\Omega}{}_h^{(r)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(r)}) \setminus \partial\overline{\Omega}_h$. Кроме того, в случае I)

$$\begin{gathered}
A^{(r)}(x^p) = \tau \sum_{l=0}^{N^{\#}} \Big[\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} u_{tt} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) + \\
+ \tau \sum_{\rho=1}^{(\nu-2)/2} \sum_{l=1+N_{2\rho}}^{N_{2\rho+1}} \Big[\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} u_{tt} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) + \\
+ \tau \sum_{\rho=0}^{(\nu-2)/2} \sum_{l=1+N_{2\rho+1}}^{N_{2\rho+2}} \Big[k_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \gamma_\Delta^{(r)} u_{t\overline{t}} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) + \\
+ \tau \sum_{l=1+N_\nu}^{N-2} \Big[\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} u_{tt} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) - \\
- \Big[\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} u_t (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, (N-1)\tau),
\end{gathered} \tag{32}$$

а в случае II)

$$\begin{gathered}
A^{(r)}(x^p) = \tau \sum_{l=0}^{N_1} \Big[\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} u_{tt} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) + \\
+ \tau \sum_{\rho=1}^{(\nu-1)/2} \sum_{l=1+N_{2\rho}}^{N_{2\rho+1}} \Big[\overset{+1}{k}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)} u_{tt} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) + \\
+ \tau \sum_{\rho=0}^{(\nu-3)/2} \sum_{l=1+N_{2\rho+1}}^{N_{2\rho+2}} \Big[k_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \gamma_\Delta^{(r)} u_{t\overline{t}} (q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta) \Big] (x^p, l\tau) +
\end{gathered} \tag{33}$$

$$+\tau\sum_{l=1+N_\nu}^{N-1}\left[k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\gamma^{(r)}_{\Delta}u_{t\bar t}\,(q_\Delta u_t+s_\Delta u_\Delta)\right](x^p,\,l\tau).$$

Оценка (30) получается из тождества (31) после подходящей оценки снизу его левой части и сверху правой части. Наметим вкратце, каким способом оценивается левая часть. Более подробные выкладки можно найти в [17]. Отметим, что всюду в дальнейшем будем предполагать, что $x^p\in(\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h\cup\overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h)\setminus\partial\overline{\Omega}_h$ и $0\leqslant l\leqslant N-1$, если не указано другое.

Суммируя по частям, согласно (2.4) [16, с. 280], и учитывая (2.2) и (2.3) [16, с. 280], (18) и (19), получаем, что в случае I)

$$\begin{aligned}A^{(r)}(x^p)\geqslant&-\frac{1}{2}\tau\sum_{l=0}^{N^{\#}+1}\Big\{(u_t)^2\Big[(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}+2\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta+\tau(\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t\Big]+\\&+2(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}u_\Delta u_t\Big\}-\frac{1}{2}\tau\sum_{\rho=1}^{(\nu-2)/2}\ \sum_{l=2+N_{2\rho}}^{1+N_{2\rho+1}}\Big\{(u_t)^2\Big[2\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta+\\&+(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}+\tau(\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t\Big]+2(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}u_\Delta u_t\Big\}-\\&-\tau\sum_{\rho=0}^{(\nu-2)/2}\ \sum_{l=2+N_{2\rho+1}}^{1+N_{2\rho+2}}\Big\{(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t u_\Delta u_t+(u_t)^2\Big[\frac{1}{2}(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t+\\&+\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{s}_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta}\Big]\Big\}-\frac{1}{2}\tau\sum_{l=2+N_\nu}^{N-1}\Big\{2(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}u_\Delta u_t+(u_t)^2\Big[(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}+\\&+2\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta+\tau(\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t\Big]\Big\}-\Big[\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta u_\Delta u_t+\frac{1}{2}\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta(u_t)^2\Big](x^p,0)\end{aligned}\tag{34}$$

и в случае II)

$$\begin{aligned}A^{(r)}(x^p)\geqslant&-\frac{1}{2}\tau\sum_{l=0}^{N_1+1}\Big\{(u_t)^2\Big[(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}+2\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta+\tau(\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t\Big]+\\&+2(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}u_\Delta u_t\Big\}-\frac{1}{2}\tau\sum_{\rho=1}^{(\nu-1)/2}\ \sum_{l=2+N_{2\rho}}^{1+N_{2\rho+1}}\Big\{(u_t)^2\Big[(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}+\\&+2\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta+\tau(\overset{-1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t\Big]+2(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}u_\Delta u_t\Big\}-\\&-\tau\sum_{\rho=0}^{(\nu-3)/2}\ \sum_{l=2+N_{2\rho+1}}^{1+N_{2\rho+2}}\Big\{(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t u_\Delta u_t+(u_t)^2\Big[\frac{1}{2}(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t+\\&+\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{s}_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta}\Big]\Big\}-\tau\sum_{l=2+N_\nu}^{N-1}\Big\{(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}s_\Delta\gamma^{(r)}_\Delta)_t u_\Delta u_t+(u_t)^2\Big[\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{s}_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta}+\end{aligned}\tag{35}$$

$$+\frac{1}{2}\left(k_{\varepsilon\Delta}^{(r)} q_\Delta \gamma_\Delta^{(r)}\right)_t \Big]\Big\} - \left[k_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{-1}{s_\Delta} \gamma_\Delta^{(r)} u_\Delta u_t + \frac{1}{2} k_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \overset{-1}{q_\Delta} \gamma_\Delta^{(r)} (u_t)^2 \right] (x^p, 0).$$

Из (31), (34), (35) ясно, что коэффициент при $u_\Delta u_t$ имеет вид

$$\bar{v}_{\varepsilon\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau) = \left\{ -\left(\overset{+1}{k_{\varepsilon\Delta}^{(r)}} s_\Delta \overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}} \right)_{\bar{t}} + \overset{+1}{\alpha_{\varepsilon\Delta}^{(r)}} \overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}} s_\Delta + \overset{+1}{a_{\varepsilon\Delta}^{(r)}} \overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}} q_\Delta \right\} (x^p, l\tau), \quad (36)$$

когда целое число l принадлежит $[0, N^{\#}+1]$, $[2+N_{2\rho}, 1+N_{2\rho+1}]$ для $\rho=1, \ldots, (\nu-2)/2$ в случае I) и $\rho=1, \ldots, (\nu-1)/2$ в случае II) и $l \in [2+N_\nu, N-1]$ в случае I), и вид

$$\overset{=}{v}_{\varepsilon\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau) = \left\{ -\left(k_{\varepsilon\Delta}^{(r)} \gamma_\Delta^{(r)} s_\Delta \right)_t + \overset{+1}{\alpha_{\varepsilon\Delta}^{(r)}} \overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}} s_\Delta + \overset{+1}{a_{\varepsilon\Delta}^{(r)}} \overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}} q_\Delta \right\} (x^p, l\tau), \quad (37)$$

когда l принадлежит $[2+N_{2\rho+1}, 1+N_{2\rho+2}]$ для $\rho=0, \ldots, (\nu-2)/2$ в случае I) и $\rho=0, \ldots, (\nu-3)/2$ в случае II) и $l \in [2+N_\nu, N-1]$ в случае II). Учитывая (22), (23) и применяя формулу конечных приращений (теорему Лагранжа), получаем

$$\bar{v}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} = q_\Delta \left(\overset{+1}{b_\Delta^{(r)}} + \bar{\varkappa}^{(r)} \right), \quad \overset{=}{v}_{\varepsilon\Delta}^{(r)} = q_\Delta \left(\overset{+1}{b_\Delta^{(r)}} + \overset{=}{\varkappa}^{(r)} \right), \quad (38)$$

где

$$\bar{\varkappa}^{(r)}(x^p, l\tau) = -\frac{\lambda^2}{2} \Big\{ (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau) - (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})(x^p, l\tau) +$$

$$+ [q((1-\theta_2)\tau) - 1](k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau) \Big\} q((\theta_2 - 1)\tau) - \quad (39)$$

$$-\frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t}(x^p, (l+1)\tau) - \frac{\partial (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t}(x^p, (l+\theta_1)\tau) \right],$$

$$\overset{=}{\varkappa}^{(r)}(x^p, l\tau) = \frac{1}{2} \lambda^2 (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau) [q(\theta_2 \tau) - 1] -$$

$$-\frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t}(x^p, (l+1)\tau) - \frac{\partial (k_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t}(x^p, (l+\theta_1)\tau) \right], \quad (40)$$

$$b_\Delta^{(r)}(x^p, l\tau) = (a^{(r)} \gamma^{(r)})(x^p, l\tau) - \frac{1}{4} \lambda^2 [(1-\varphi_\varepsilon^{(r)}) k^{(r)} \gamma^{(r)}](x^p, l\tau) -$$

$$-\frac{\lambda}{2} \left[\alpha^{(r)} \gamma^{(r)} - \lambda k^{(r)} \gamma^{(r)} - \frac{\partial (k^{(r)} \gamma^{(r)})}{\partial t} \right] (x^p, l\tau) \quad (41)$$

для $x^p \in \overset{*}{\Omega}_h^{(r)} \cup \overset{*}{\zeta}_h^{(r)}$ и $l=0, 1, \ldots, N$. В (37) и (38) $0<\theta_1, \theta_2<1$. Пусть

$$\left. \begin{aligned} v_{\varepsilon\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau) &= \bar{v}_{\varepsilon\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau) \ \text{или}\ v_{\varepsilon\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau) = \overset{=}{v}_{\varepsilon\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau), \\ \varkappa_\Delta^{(r)}(x^p, l\tau) &= \bar{\varkappa}^{(r)}(x^p, l\tau) \ \text{или}\ \varkappa_\Delta^{(r)}(x^p, l\tau) = \overset{=}{\varkappa}^{(r)}(x^p, l\tau) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

в зависимости от того, где находится l (см. (36) и (37)). Учитывая (38) и (42), суммированием по частям получаем, что

$$\tau \sum_{l=0}^{N-1} v_{\varepsilon\Delta}^{(r)} u_\Delta u_t = \tau \sum_{l=0}^{N-1} \Big\{ -\frac{1}{2} \left(\overset{+1}{b_\Delta^{(r)}} q_\Delta \right)_{\bar{t}} u_\Delta^2 - \frac{1}{2} \tau \overset{+1}{b_\Delta^{(r)}} q_\Delta (u_t)^2 +$$

$$+ \varkappa_\Delta^{(r)} q_\Delta u_\Delta u_t \Big\} - \frac{1}{2} \left(b_\Delta^{(r)} \overset{-1}{q_\Delta} u_\Delta^2 \right)(x^p, 0). \quad (43)$$

Отметим, что в силу равномерной непрерывности функций $k_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)}$ и $\dfrac{\partial(k_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}$ в $\overline{D^{(r)}}$ (при фиксированном $\varepsilon>0$) и непрерывности функции q из (39), (40) и (42) следует, что существует число $\tau'_\varepsilon>0$ такое, что при $0<\tau<\tau'_\varepsilon$ справедлива оценка $[\varkappa_\Delta^{(r)}(x^p, l\tau)]^2\leqslant -\dfrac{\lambda}{64}a_{\max}^{(r)}\delta_0^{(r)}\times$ $\times(\gamma_{\min}^{(r)})^2$, $r=1, 2$. Тогда для $0<\tau<\tau'_\varepsilon$ при помощи неравенства (1.3) [16, с. 33] выводим

$$\begin{aligned}|(\varkappa_\Delta^{(r)}u_\Delta u_t)(x^p, l\tau)|\leqslant \frac{1}{8}\delta_0^{(r)}\gamma_{\min}^{(r)}[u_t(x^p, l\tau)]^2+\\ +\frac{\lambda}{32}(-a_{\max}^{(r)})\gamma_{\min}^{(r)}[u_\Delta(x^p, l\tau)]^2.\end{aligned}\tag{44}$$

Принимая во внимание (41), (21) и (10), получаем, что

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{2}k_{\varepsilon\Delta}^{(r)}\overset{-1}{q_\Delta}\gamma_\Delta^{(r)}(u_t)^2-k_{\varepsilon\Delta}^{(r)}\overset{-1}{s_\Delta}\gamma_\Delta^{(r)}u_\Delta u_t-\frac{1}{2}b_\Delta^{(r)}\overset{-1}{q_\Delta}u_\Delta^2\right](x^p, 0)=\\ &=\frac{1}{8}q(-\tau)\left\{\gamma^{(r)}\left[-2k_\varepsilon^{(r)}(u_t)^2-2k_\varepsilon^{(r)}(u_t-\lambda u_\Delta)^2+\right.\right.\\ &\left.+\left(-4a^{(r)}-\lambda\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)u_\Delta^2-\lambda^2k^{(r)}(1-\varphi_\varepsilon^{(r)})u_\Delta^2\right]+\\ &\left.+2\lambda\left(\alpha^{(r)}\gamma^{(r)}-\frac{1}{2}\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\gamma^{(r)}-k^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}\right)u_\Delta^2\right\}(x^p, 0)\geqslant 0.\end{aligned}\tag{45}$$

Нетрудно убедиться с помощью теоремы Лагранжа, что

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda^2}{8}q(-\tau)[q(1-\varphi_\varepsilon^{(r)})k^{(r)}\gamma^{(r)}]_t(x^p, l\tau)=\frac{\lambda^2}{8}q(l\tau)\left\{-k^{(r)}\gamma^{(r)}\frac{\partial\varphi_\varepsilon^{(r)}}{\partial t}+\right.\\ &\left.+(1-\varphi_\varepsilon^{(r)})\left[\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}+\lambda k^{(r)}\gamma^{(r)}\right]\right\}(x^p, l\tau)+q(l\tau)\psi^{(r)}(x^p, l\tau),\end{aligned}\tag{46}$$

где выражение $\psi^{(r)}(x^p, l\tau)$ подобно выражениям $\bar{\varkappa}^{(r)}(x^p, l\tau)$ и $\bar{\bar{\varkappa}}^{(r)}(x^p, l\tau)$ из (39) и (40). Тогда существует число $\tau''_\varepsilon>0$ такое, что при $0<\tau<\tau''_\varepsilon$

$$|\psi^{(r)}(x^p, l\tau)|\leqslant -\frac{\lambda}{32}a_{\max}^{(r)}\gamma_{\min}^{(r)},\quad r=1, 2.\tag{47}$$

Из (23), (39), (46) следует, что

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{1}{2}(\overset{+1}{b_\Delta^{(r)}}q_\Delta)_{\bar t}+\overset{+1}{a_{\varepsilon\Delta}^{(r)}}\overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}}s_\Delta\right](x^p, l\tau)=q(l\tau)\psi^{(r)}(x^p, l\tau)+\\ &+\frac{1}{2}q(-\tau)\left\{q\left[-a^{(r)}\gamma^{(r)}+\frac{\lambda}{2}\alpha^{(r)}\gamma^{(r)}-\frac{1}{2}\lambda^2k^{(r)}\gamma^{(r)}-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}\right]\right\}_t(x^p, l\tau)-\frac{\lambda}{2}q(l\tau)(a^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau),\end{aligned}$$

откуда, применяя теорему Лагранжа и учитывая (47), (20), (21), (10), (11), для $0<\tau<\tau''_\varepsilon$ выводим

$$\left[-\frac{1}{2}(\overset{+1}{b_\Delta^{(r)}}q_\Delta)_{\bar t}+\overset{+1}{a_{\varepsilon\Delta}^{(r)}}\overset{+1}{\gamma_\Delta^{(r)}}s_\Delta\right](x^p, l\tau)\geqslant -\frac{5\lambda}{32}a_{\max}^{(r)}\gamma_{\min}^{(r)}q(l\tau).\tag{48}$$

При помощи теоремы Лагранжа и (2.2), (2.3) [16, с. 280] находим

$$\begin{gathered}\overline{\mathscr{H}}_{\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau)\equiv\left[\overset{+1}{\alpha}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta}q_\Delta-\frac{1}{2}(\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta})_{\bar t}-k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\gamma^{(r)}_{\Delta}\overset{-1}{s}_\Delta\right](x^p, l\tau)=\\ =[(\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau)-(\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, (l+\theta_1)\tau)]q(l\tau)+\\ +\left[\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)}-\frac{1}{2}\frac{\partial(k_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}\right](x^p, (l+\theta_1)\tau)q(l\tau)+\\ +\frac{1}{2}\lambda(-k_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, l\tau)[q(\theta_2\tau)-1]q((l-1)\tau)\end{gathered}\tag{49}$$

и

$$\begin{gathered}\overline{\overline{\mathscr{H}}}{}_{\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau)\equiv\left[\overset{+1}{\alpha}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta}q_\Delta-\frac{1}{2}(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}q_\Delta\gamma^{(r)}_{\Delta})_{t}-\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{+1}{s}_\Delta\overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta}\right](x^p, l\tau)=\\ =[(\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau)-(\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, (l+\theta_1)\tau)]q(l\tau)+\\ +\left[\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)}-\frac{1}{2}\frac{\partial(k_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}\right](x^p, (l+\theta_1)\tau)q(l\tau)+\\ +\frac{1}{2}\lambda q(l\tau)[q(\tau)-q(\theta_2\tau)](k_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)})(x^p, (l+1)\tau),\end{gathered}\tag{50}$$

где $0<\theta_1$, $\theta_2<1$. При этом (49) выполняется для тех значений l, для которых справедливо (36), (50) — для тех значений l, для которых справедливо (37). Применяя теорему Лагранжа и учитывая свойства функции $\varphi_\varepsilon^{(r)}$ и то, что $k_\varepsilon^{(r)}$ липшицева в $\overline{D^{(r)}}$ с постоянной $K_r>0$, получаем, что

$$\begin{gathered}\left|(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{-1}{s}_\Delta\gamma^{(r)}_{\Delta})_t(x^p, l\tau)\right|\leqslant\frac{\lambda}{2}q(l\tau)\left\{5K_rM_r\max_{\overline{D^{(r)}}}\gamma^{(r)}(x, t)+\right.\\ \left.+\lambda\max_{\overline{D^{(r)}}}|(k^{(r)}\gamma^{(r)})(x, t)|+\max_{\overline{D^{(r)}}}\left|\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}(x, t)\right|\right\}\equiv\frac{\lambda}{2}q(l\tau)c_r.\end{gathered}\tag{51}$$

В силу (22), (23), (9), (10), (51) и равномерной непрерывности функции $\alpha_\varepsilon^{(r)}\gamma^{(r)}$ в $\overline{D^{(r)}}$ (при фиксированном $\varepsilon>0$) заключаем, что существует число $\tau_\varepsilon'''>0$ такое, что для $0<\tau<\tau_\varepsilon'''$ и τ, удовлетворяющего условию

$$\tau\cdot 2\lambda c_r\leqslant\delta_0^{(r)}\gamma^{(r)}_{\min}, \quad r=1,\ 2,\tag{52}$$

из (49) и (50) следуют оценки

$$\left.\begin{gathered}\overline{\mathscr{H}}_{\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau)-\frac{1}{2}\tau(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\overset{-1}{s}_\Delta\gamma^{(r)}_{\Delta})_t(x^p, l\tau)\geqslant\frac{1}{4}\delta_0^{(r)}\gamma^{(r)}_{\min}\,q(l\tau),\\ \overline{\overline{\mathscr{H}}}{}_{\Delta}^{(r)}(x^p, l\tau)\geqslant\frac{1}{4}\delta_0^{(r)}\gamma^{(r)}_{\min}\,q(l\tau).\end{gathered}\right\}\tag{53}$$

Суммируя по частям, согласно (2.4) [16, с. 280], применяя теорему Лагранжа и учитывая (20) и (14), для $x^p\in\overline{\Omega}_h$ получаем, что

$$-\tau\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{m}(\overset{+1}{a}_{ij\Delta}q_\Delta u_{x_i}u_{x_jt})(x^p, l\tau)\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\tau \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i,j=1}^{m} [(\overset{+1}{a}_{ij\Delta} q_\Delta)_{\bar{t}} u_{x_i} u_{x_j}](x^p, l\tau) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\nu_r - \mu_2^{(r)}\right) \gamma_{\min}^{(r)} \tau \sum_{l=0}^{N-1} q((l-1)\tau) \sum_{i=1}^{m} [u_{x_i}(x^p, l\tau)]^2 \geqslant 0,$$

где $r=1$, когда $x^p \in \overset{*}{\Omega}{}_h^{(1)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(1)} \cup \{(\partial\overline{\Omega}_h \setminus \overset{*}{\Omega}_h) \cap (\overline{G^{(1)} \setminus \sigma})\}$, и $r=2$, когда $x^p \in \overset{*}{\Omega}{}_h^{(2)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(2)} \cup \{(\partial\overline{\Omega}_h \setminus \overset{*}{\Omega}_h) \cap \overline{G^{(2)}}\}$. Тогда, суммируя по частям, согласно (2.11) [16, с. 282], находим, что

$$\tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{i,j=1}^{m} (\overset{+1}{a}_{ij\Delta} u_{x_i})_{\bar{x}_j} (s_\Delta u_\Delta + q_\Delta u_t) =$$

$$= -\tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{+1}{a}_{ij\Delta} u_{x_i} (s_\Delta u_{x_j} + q_\Delta u_{t x_j}) \geqslant \tag{54}$$

$$\geqslant \frac{\lambda}{2}\tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{i,j=1}^{m} q_\Delta \overset{+1}{a}_{ij\Delta} u_{x_i} u_{x_j}.$$

При помощи неравенства Коши — Буняковского и неравенства (1.3) [16, с. 33] ввиду (28) имеем

$$\left| \sum_{r=1}^{2} \tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r,*} \sum_{i=1}^{m} b_{i\Delta}^{(r)} u_{x_i} (s_\Delta u_\Delta + q_\Delta u_t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{2} \tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r,*}{}' \left\{ \frac{1}{16} \delta_0^{(r)} \gamma_{\min}^{(r)} (u_t)^2 + \left(\frac{\lambda}{8} \nu_r \gamma_{\min}^{(r)} + \right.\right. \tag{55}$$

$$\left.\left. + \frac{4\mu_1^{(r)}}{\delta_0^{(r)} \gamma_{\min}^{(r)}} \right) \sum_{i=1}^{m} (u_{x_i})^2 + \frac{\lambda \mu_1^{(r)}}{2\nu_r \gamma_{\min}^{(r)}} u_\Delta^2 \right\} q_\Delta,$$

где $\sum\limits_{1,*}{}'$ обозначает суммирование по всем индексам p таким, что x^p пробегает $\overset{*}{\Omega}{}_h^{(1)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(1)} \cup \{(\partial\overline{\Omega}_h \setminus \overset{*}{\Omega}_h) \cap (\overline{G^{(1)} \setminus \sigma})\}$, а $\sum\limits_{2,*}{}'$ — суммирование по всем индексам p таким, что x^p пробегает $\overset{*}{\Omega}{}_h^{(2)} \cup \overset{*}{\zeta}{}_h^{(2)} \cup \{(\partial\overline{\Omega}_h \setminus \overset{*}{\Omega}_h) \cap \overline{G^{(2)}}\}$.

Ввиду (34), (35), (43)—(45), (48), (53)—(55) для $0 < t < \min(\tau'_\varepsilon, \tau''_\varepsilon, \tau'''_\varepsilon)$ и τ, удовлетворяющего условиям (52), (16), (17) и

$$\tau \left\{ \lambda \max_{\overline{D^{(r)}}} |(k^{(r)}\gamma^{(r)})(x,t)| + \max_{\overline{D^{(r)}}} \left| \left(\gamma^{(r)} \frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} \right)(x,t) \right| \right\} \leqslant \frac{\delta_0^{(r)}}{8\lambda} \gamma_{\min}^{(r)}, \quad r = 1, 2, \tag{56}$$

левая часть (31) оценивается снизу выражением

$$\sum_{r=1}^{2} \tau h_0 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r,*}{}' \left\{ \frac{\delta_0^{(r)}}{32} \gamma_{\min}^{(r)} (u_t)^2 + \frac{\lambda}{8} \nu_r \gamma_{\min}^{(r)} \sum_{i=1}^{m} (u_{x_i})^2 \right\} q_\Delta.$$

Оценивая правую часть (31) при помощи неравенства (1.3) [16, с. 33] и применяя неравенство (3.19) [16, с. 294], убеждаемся, что для $0<\tau<\min(\tau'_\varepsilon, \tau''_\varepsilon, \tau'''_\varepsilon)$ и τ, удовлетворяющего (16), (17), (52) и (56), имеет место оценка (30), где постоянная $c_0>0$ не зависит от $h_1, \ldots, h_m, \tau, \varepsilon$ и u_Δ.

Пусть $\varepsilon_i \to 0$ при $i\to\infty$ и $1>\varepsilon_i>\varepsilon_{i+1}$ для $i=1, 2, \ldots$ Легко заметить, что для любого ε_i существуют положительные числа $\tau_{\varepsilon_i}, h_{1\varepsilon_i}, \ldots, h_{m\varepsilon_i}$ со свойствами: а) τ_{ε_i} удовлетворяет условиям (16), (17), (52), (56) и $0<\tau_{\varepsilon_i}<\min(\tau'_{\varepsilon_i}, \tau''_{\varepsilon_i}, \tau'''_{\varepsilon_i})$; $\tau_{\varepsilon_i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$ и $h_{j\varepsilon_i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$, $j=1, \ldots, m$, монотонно убывая; б) имеют место сходимости

$$\Lambda(\overline{R^{(r)}_{\varepsilon_i}})\xrightarrow[i\to\infty]{}0,\ r=1, 2;\ \Lambda(\bar Z_{\Delta_i})\xrightarrow[i\to\infty]{}0;\ \Lambda(D\backslash D_{\Delta_i})\xrightarrow[i\to\infty]{}0, \tag{57}$$

где $\overline{R^{(r)}_{\varepsilon_i}}=\{\bar\omega_{pl}: (x^p, l\tau)\in(\partial Q^0_r)_{5\varepsilon_i/2}\}$; $\bar Z_{\Delta_i}=\{\bar\omega_{pl}\subset\bar D_{\Delta_i}:\bar\omega_p\subset\bar Y_{h_i}\}$; Δ_i — сетка с шагами $h_{1\varepsilon_i}, \ldots, h_{m\varepsilon_i}, \tau_{\varepsilon_i}$; Λ — мера Лебега в $\mathbf{R}^{m+1}$; $(\partial Q^0_r)_\delta$ — δ-окрестность множества ∂Q^0_r.

В силу условия а) для любой сетки Δ_i существует единственное решение u_{Δ_i} соответствующей системы разностных уравнений. При этом для него справедлива оценка (30), откуда, учитывая (29) и применяя неравенство Гёльдера, выводим

$$\begin{aligned}\tau_{\varepsilon_i}h_{0\varepsilon_i}\sum_{l=0}^{N(\varepsilon_i)-1}\sum_{\overline{\Omega}_{h_i}}\left\{(u_{\Delta_i t})^2+u^2_{\Delta_i}+\sum_{j=1}^{m}(u_{\Delta_i x_j})^2\right\}\leqslant\\ \leqslant c_0\left\{\|f^{(1)}\|^2_{L_2(D^{(1)})}+\|f^{(2)}\|^2_{L_2(D^{(2)})}\right\},\end{aligned}\tag{58}$$

где $h_{0\varepsilon_i}=h_{1\varepsilon_i}h_{2\varepsilon_i}\cdots h_{m\varepsilon_i}$, $\tau_{\varepsilon_i}N(\varepsilon_i)=T$ и $N(\varepsilon_i)\geqslant 3$ — целое число. Пусть u'_{Δ_i} — полилинейная интерполяция [16, с. 284], построенная с помощью функции u_{Δ_i}. В силу (58) к последовательности $\{u'_{\Delta_i}\}$ применимы теорема 3.2 и замечание 3.1 [16, с. 291—292]. Тогда существует подпоследовательность сеток $\{\Delta_{i_\beta}\}$ такая, что последовательность $\{\widetilde{u_{\Delta_{i_\beta}}}\}$ сходится слабо в $W^1_2(D)$ и в норме $L_2(G)$ равномерно относительно $t\in[0, T]$ к некоторой функции $u\in W^1_{2,0}(D)$. При этом

$$\left.\begin{aligned}(\widetilde{u_{\Delta_{i_\beta}}})_{x_j}\xrightarrow[\beta\to\infty]{}\frac{\partial u}{\partial x_j},\ j=1, \ldots, m,\ (\widetilde{u_{\Delta_{i_\beta}}})_t\xrightarrow[\beta\to\infty]{}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \text{слабо в } L_2(D);\ \widetilde{u_{\Delta_{i_\beta}}}\xrightarrow[\beta\to\infty]{}u \text{ в } L_2(D).\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

Нетрудно проверить, что $u=0$ на D_T. Покажем, что u удовлетворяет интегральному тождеству (4) для любой функции η с описанными в следствии 1 свойствами. Тем самым будет доказано, что u является обобщенным решением из $W^1_2(D)$ задачи А.

Так как $\eta=0$ вблизи S_T и $\tau_{\varepsilon_i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$, $h_{j\varepsilon_i}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$, $j=1, \ldots, m$, то существует число $\beta_0=\beta_0(\eta)>0$ такое, что $\eta=0$ в $\bar D\backslash\bar D_{\Delta_{i_\beta}}$, когда $\beta>\beta_0$. Пусть

$\eta_\Delta(x^p, l\tau)=\eta(x^p, l\tau)$ для $(x^p, l\tau)\in\bar D_\Delta$, $\eta_\Delta(x^p, -\tau)=\eta(x^p, 0)$ для $x^p\in\overline{\Omega}_h$ и $\eta_\Delta=0$ в остальных точках сетки Δ. Тогда $\eta_{\Delta_{i_\beta}}(x^p, l\tau)=0$ для $x^p\notin\Omega_{h_{i_\beta}}$

и $l=0, \ldots, N(\varepsilon_{i_\beta})$, когда $\beta>\beta_0$; $\eta_{\bar t}(x^p, 0)=0$ для $x^p\in\overline{\Omega}_h$; $(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta}\eta_\Delta)\times$

$\times (x^p, 0) = 0$ для $x^p \in \overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h$ и $(k^{(r)}_{\varepsilon\Delta} \eta_\Delta)(x^p, T) = 0$, когда $x^p \in \overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h$ и $(x^p, T) \in \overline{P^+_{T,r}}$, $r = 1, 2$.

Дальше будем считать, что $\beta > \beta_0$, и для простоты будем опускать нижний индекс i_β при ε, Δ и h. Таким же способом, как из (24)—(27) получили (31), получаем тождество, подобное (31), с той лишь разницей, что на месте $q_\Delta u_t + s_\Delta u_\Delta$ стоит η_Δ. Суммируя по частям в этом тождестве, согласно формулам (2.4) и (2.11) [16, с. 280, 282], и учитывая свойства функции η_Δ, получаем, что

$$\tau_\varepsilon h_{0\varepsilon} \sum_{r=1}^{2} \sum_{r,*} \sum_{l=0}^{N(\varepsilon)-1} \Big(\overset{+1}{\alpha}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta} \overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta} u_t \eta_\Delta + \overset{+1}{a}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta} \overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta} u_\Delta \eta_\Delta + \sum_{i=1}^{m} b^{(r)}_{i\Delta} u_{x_i} \eta_\Delta - \tag{60}$$
$$- \mathscr{C}^{(r)}_{\varepsilon\Delta} u_t - f^{(r)}_\Delta \gamma^{(r)}_\Delta \eta_\Delta \Big) - \tau_\varepsilon h_{0\varepsilon} \sum_{l=0}^{N(\varepsilon)-1} \sum_{\overline{\Omega}_h} \sum_{i,j=1}^{m} \overset{+1}{a}_{ij\Delta} u_{x_i} \eta_{x_j} = 0$$

или в эквивалентной записи

$$\int_{D_\Delta} \Big\{ (\overset{\widetilde{+1}}{\alpha}_{\varepsilon\Delta} \overset{\widetilde{+1}}{\gamma}_\Delta \tilde{\eta}_\Delta - \tilde{\mathscr{C}}_{\varepsilon\Delta}) \tilde{u}_t + \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_{x_i} \Big(\tilde{b}_{i\Delta} \tilde{\eta}_\Delta - \sum_{j=1}^{m} \overset{\widetilde{+1}}{a}_{ij\Delta} \tilde{\eta}_{x_j} \Big) + \tag{61}$$
$$+ \overset{\widetilde{+1}}{a}_{\varepsilon\Delta} \overset{\widetilde{+1}}{\gamma}_\Delta \tilde{\eta}_\Delta \tilde{u}_\Delta \Big\} dx dt = \int_{D_\Delta} \tilde{f}_\Delta \tilde{\gamma}_\Delta \tilde{\eta}_\Delta dx dt.$$

Сеточную функцию $\mathscr{C}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}$ определяем следующим образом: для $x^p \in \overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h$ полагаем $\mathscr{C}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}(x^p, l\tau) = (\overset{+1}{k}{}^{(r)}_{\varepsilon\Delta} \overset{+1}{\gamma}{}^{(r)}_{\Delta} \eta_\Delta)_{\bar{t}}(x^p, l\tau)$ или $\mathscr{C}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}(x^p, l\tau) = (\eta_\Delta k^{(r)}_{\varepsilon\Delta} \gamma^{(r)}_\Delta)_t (x^p, l\tau)$ в зависимости от того, где находится целое число l $(0 \leqslant l \leqslant N-1)$ в случаях I) и II), и считаем, что $\mathscr{C}^{(r)}_{\varepsilon\Delta} = 0$ в остальных точках сетки Δ. В (61) положили $\alpha_{\varepsilon\Delta} = \alpha^{(r)}_{\varepsilon\Delta}$, $a_{\varepsilon\Delta} = a^{(r)}_{\varepsilon\Delta}$, $\mathscr{C}_{\varepsilon\Delta} = \mathscr{C}^{(r)}_{\varepsilon\Delta}$, $b_{i\Delta} = b^{(r)}_{i\Delta}$, $\gamma_\Delta = \gamma^{(r)}_\Delta$, $f_\Delta = f^{(r)}_\Delta$ в точках $(x^p, l\tau)$, где $x^p \in \overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h$ и $0 \leqslant l \leqslant N$, $r = 1, 2$. Считаем, что $\alpha_{\varepsilon\Delta}$, $\mathscr{C}_{\varepsilon\Delta}$, $a_{\varepsilon\Delta}$, γ_Δ, $b_{i\Delta}$ и f_Δ равны нулю во всех других точках сетки Δ.

Интегральное тождество (4) можнс переписать в виде

$$\int_D \Big\{ \Big[\alpha\gamma\eta - \frac{\partial (k\gamma\eta)}{\partial t} \Big] \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big[- \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + b_i \eta \Big] + \tag{62}$$
$$+ a\gamma\eta u \Big\} dx dt = \int_D f\gamma\eta \, dx dt,$$

где $\alpha = \alpha^{(r)}$, $\gamma = \gamma^{(r)}$, $k = k^{(r)}$, $a = a^{(r)}$, $a_{ij} = a^{(r)}_{ij}$, $b_i = a^{(r)}_i \gamma^{(r)} - \sum_{j=1}^{m} a^{(r)}_{ij} \frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial x_j}$, $f = f^{(r)}$ в $D^{(r)}$, $r = 1, 2$. Очевидно коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и u в (62) суть функции из $L_2(D)$, а $f\gamma\eta \in L_2(D) \cap L_1(D)$.

Принимая во внимание теорему 1 [18, с. 418], сходимости (59), оценку (58) и свойства функции η_Δ, заключаем, что для доказательства того, что после предельного перехода в (61) при $\beta \to \infty$ получим (62), достаточно показать, что коэффициенты при $\tilde{u}_t$, $\tilde{u}_{x_i}$, $\tilde{u}_\Delta$ в (61) стремятся в $L_2(D)$, когда $\beta \to \infty$, к соответствующим коэффициентам при $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$,

u в (62) и $\int\limits_D (\tilde{f}_\Delta \tilde{\gamma}_\Delta \tilde{\eta}_\Delta - f\gamma\eta)\,dxdt \xrightarrow[\beta\to\infty]{} 0$. Эти сходимости устанавливаются одним и тем же способом, учитывая, что: 1) сеточные функции, являющиеся коэффициентами при u_t, u_{x_i}, u в (60), равномерно ограничены на сетке Δ постоянными, не зависящими ни от ε, ни от шагов сетки Δ; 2) кусочно-постоянные интерполяции [16, с. 284] этих сеточных функций сходятся равномерно, когда $\beta\to\infty$, к соответствующим коэффициентам при $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, u в (4); 3) имеет место (57) и справедлива лемма 4.1 [16, с. 301].

Следуя доказательству теоремы 3.1 [16, с. 291], выводим оценку $\|u'_{\Delta_{i_\beta}}\|^2_{W^1_2(D)} \leqslant (\tilde{c}_0)^2 \sum\limits_{r=1}^{2} \|f^{(r)}\|^2_{L_2(D^{(r)})}$ для всех $\beta\geqslant 1$, где постоянная $\tilde{c}_0>0$ зависит только от c_0 и от области D. Так как $u'_{\Delta_{i_\beta}} \xrightarrow[\beta\to\infty]{} u$ слабо в $W^1_2(D)$, то в силу теоремы 5 [18, с. 317] справедливо неравенство (15).

Если для некоторого r, $r=1$ или $r=2$, выполняется одно из условий (5) или (6), то доказательство теоремы ведется, как и выше, только считается, что $\varphi^{(r)}_\varepsilon\equiv 1$. При этом, когда имеет место (6), в (17) надо выбирать $\tau<d_0^{(r)}/3$. Если $k^{(r)}(x^p, 0)=0$ и $k^{(r)}(x^p, t)>0$ при $0<t\leqslant t'\leqslant T$ для некоторой точки $x^p\in(\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h)\setminus\partial\overline{\Omega}_h$ и шаг τ достаточно мал, то существует натуральное число $\tilde{N}_1$ со свойствами: $\tilde{N}_1\leqslant N$, $k^{(r)}(x^p, l\tau)\geqslant 0$ для $l=0, 1, \ldots, \tilde{N}_1$, и если $\tilde{N}_1\leqslant N-3$, то $k^{(r)}(x^p, (1+\tilde{N}_1)\tau)=k^{(r)}(x^p, (2+\tilde{N}_1)\tau)=0$ и $k^{(r)}(x^p, (3+\tilde{N}_1)\tau)<0$. Тогда в точках $(x^p, l\tau)$, где $0\leqslant l\leqslant\tilde{N}_1$, когда $\tilde{N}_1\leqslant N-3$, и $0\leqslant l\leqslant N-1$, когда $\tilde{N}_1=N$, рассматривается уравнение (27). Если выполняется условие (5), то $k^{(r)}\geqslant 0$ в $\overline{D^{(r)}}$ или $k^{(r)}\leqslant 0$ в $\overline{D^{(r)}}$. В первом случае в любой точке $(x^p, l\tau)$, где $x^p\in(\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h)\setminus\partial\overline{\Omega}_h$ и $0\leqslant l\leqslant N-1$, берется уравнение (27). Во втором случае в любой точке $(x^p, l\tau)$, где $x^p\in(\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h)\setminus\partial\overline{\Omega}_h$ и $0\leqslant l\leqslant N-2$, берется уравнение (24), а в точках $(x^p, (N-1)\tau)$, где $x^p\in(\overset{*}{\Omega}{}^{(r)}_h \cup \overset{*}{\zeta}{}^{(r)}_h)\setminus\partial\overline{\Omega}_h$, рассматривается уравнение (26). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (9),*

$$a^{(r)}\leqslant 0 \text{ и } \frac{\partial a^{(r)}}{\partial t}\leqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}} \text{ или } a^{(r)}<0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\quad r=1, 2, \tag{63}$$

$$\gamma^{(r)}\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)-k^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}>B''k^{(r)}\gamma^{(r)} \text{ в } Q_r^+,\quad r=1, 2, \tag{64}$$

где

$$B''=\max_{l=1,2}\left\{\frac{4\mu_2^{(l)}}{\nu_l},\ 2\mu_3^{(l)},\ \frac{16\mu_1^{(l)}}{\nu_l\delta_0^{(l)}(\gamma_{\min}^{(l)})^2},\ \max_{\overline{D^{(l)}}}\left[-2\frac{\partial\gamma^{(l)}}{\partial t}(\gamma^{(l)})^{-1}\right](x, t)\right\},$$

и какие-либо два из условий (5)—(7) (одно при $r=1$, другое при $r=2$). Тогда существует обобщенное решение из $W^1_2(D)$ задачи A при любых $f^{(1)}\in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)}\in L_2(D^{(2)})$ и для него справедлива оценка (15).

Эта теорема доказывается аналогично теореме 1. Отметим, что λ выбирается таким образом, чтобы было $\lambda>B''\geqslant 0$ и выполнялось условие

(64) с λ вместо постоянной B''. Теперь нет надобности вводить функцию $a_{\varepsilon}^{(r)}$, и вместо $\alpha_{\varepsilon}^{(r)}$ из (22) рассматривается функция

$$\alpha_{\varepsilon}^{(r)}=\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}-\frac{1}{2}k^{(r)}\left[\lambda+\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}(\gamma^{(r)})^{-1}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial k_{\varepsilon}^{(r)}}{\partial t}+\frac{1}{2}k_{\varepsilon}^{(r)}\left[\lambda+\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}(\gamma^{(r)})^{-1}\right],$$

где $k_{\varepsilon}^{(r)}=\varphi_{\varepsilon}^{(r)}k^{(r)}$. В разностных уравнениях (24)—(27) вместо $\overset{+1}{\alpha}{}_{\varepsilon\Delta}^{(r)}\overset{+1}{\gamma}{}_{\Delta}^{(r)}$ и $a_{\varepsilon\Delta}^{(r)}$ берутся $\alpha_{\varepsilon\Delta}^{(r)}\gamma_{\Delta}^{(r)}$ и $a_{\Delta}^{(r)}$, где $a_{\Delta}^{(r)}=a^{(r)}$ в точках $(x^p, l\tau)$, когда $x^p\in\overset{*}{\Omega}{}_h^{(r)}\cup\overset{*}{\zeta}{}_h^{(r)}$ и $0\leqslant l\leqslant N$, и $a_{\Delta}^{(r)}=0$ во всех других точках сетки Δ. Предполагается также, что $s(t)\equiv 0$.

Отметим, что, когда удовлетворено (9), условия (10)—(13) и (64) выполняются, если, например, $|a_i^{(r)}|$, $\left|\frac{\partial a^{(r)}}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial x_j}\right|$ и $\left|\frac{\partial a_{ij}^{(r)}}{\partial t}\right|$ достаточно малы в $\overline{D^{(r)}}$, а $(-a_{\max}^{(r)})>0$ — достаточно большое число, $r=1, 2$. Кроме того, в теорему 2 входит случай, когда $a^{(r)}\equiv 0$, $r=1, 2$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть выполняются (9) и какие-либо два из условий (5)—(7) (одно при $r=1$, другое при $r=2$). Пусть $\gamma^{(r)}\equiv\gamma_0^{(r)}=$ $=\mathrm{const}>0$, $a_{ij}^{(r)}=a_{ij}^{(r)}(x)$, $a_i^{(r)}=0$, $a^{(r)}\equiv a_0^{(r)}=\mathrm{const}\leqslant 0$ для $i, j=1, \ldots, m$ и $r=1, 2$. Тогда существует обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи A при любых $f^{(1)}\in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)}\in L_2(D^{(2)})$ и для него имеет место (15).*

Аналогично теоремам 1 и 2 доказывается и следующая

Теорема 3. *Пусть $k^{(r)}\leqslant 0$ в $D^{(r)}$, $r=1, 2$, и существует число $\lambda_0\geqslant 0$ такое, что*

$$\alpha^{(r)}\gamma^{(r)}-\frac{1}{2}\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}-\frac{1}{2}\lambda_0 k^{(r)}\gamma^{(r)}>0 \quad в \quad \overline{D^{(r)}},\quad r=1, 2.$$

Тогда задача A имеет обобщенное решение из $W_2^1(D)$ при любых $f^{(1)}\in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)}\in L_2(D^{(2)})$ и для него имеет место (15).

Литература

1. Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 3. С. 373—376.
2. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 561—564.
3. Бицадзе А. В. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1953. Т. 41.
4. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 901—903.
5. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 5. С. 1017—1019.
6. Франкль Ф. И. // Вестн. МГУ. 1951. Т. 11. С. 3—7.
7. Карманов В. Г. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 1. С. 117—134.
8. Ладыженская О. А., Ступялис Л. // Вестн. ЛГУ. 1965. № 19. С. 38—46.
9. Ладыженская О. А., Ступялис Л. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 116. С. 101—136.
10. Ступялис Л. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1975. Т. 127. С. 115—145.
11. Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 3. С. 499—502.
12. Нахушев А. М., Пашковский В. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 57—63.
13. Салахитдинов М. А., Аманов Д. // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1969. № 6. С. 23—29.
14. Каратопраклиев Г. Д. // Докл. БАН. 1980. Т. 33, № 2. С. 163—166.

15. Каратопраклиев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 59—63.
16. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
17. Каратопраклиева М. Г. // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. София. 1985.
18. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1959. Т. 5.

Народная Республика Болгария *Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.*

УДК 517.95

А. Г. КУЗЬМИН

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В последние годы значительное внимание в литературе, посвященной уравнениям смешанного типа, уделяется вопросам спектральной теории [1, с. 378; 2—7]; при этом рассматриваются уравнения Чаплыгина и Лаврентьева — Бицадзе. В данной работе рассматривается уравнение, имеющее независимую переменную t типа времени и равномерно эллиптический оператор по пространственным переменным $x=(x_1, \ldots, x_n)$:

$$Lu \equiv ku_{tt}+a_{ij}u_{x_ix_j}+\alpha u_t+\beta_i u_{x_i}+cu=f, \quad a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \mu\xi^2, \tag{1}$$

где $u_t=\partial u/\partial t$; $u_{x_i}=\partial u/\partial x_i$; $a_{ij}\equiv a_{ji}$ и по дважды повторяющемуся в одночлене индексу подразумевается суммирование от 1 до n. Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются функциями x и t, причем $k(x, t)$, вообще говоря, изменяет знак в заданной области D.

В работах [8—12] доказаны априорные оценки для решений некоторых краевых и начально-краевых задач для уравнения (1) при весьма слабых ограничениях на коэффициенты. Доказана фредгольмова разрешимость этих задач для уравнения

$$L_\lambda u \equiv Lu - \lambda u \tag{2}$$

с вещественным параметром λ. Постановка задач зависит от знака коэффициента k на основаниях цилиндрической области D. На разрешимость задач существенным образом влияют значения коэффициента α на множестве K тех точек поверхности вырождения типа, которые или являются характеристическими, или расположены на боковой границе области D.

Таким образом, установленные в [8—12] результаты для уравнения (1) в целом аналогичны классическим теоремам для эллиптических уравнений, а также известным результатам о фредгольмовой разрешимости задачи Трикоми [2—4]. Отличительной чертой уравнения (1) является необходимость наложения некоторых ограничений на коэффициент α на множестве K. Близкие результаты для более простого уравнения были получены в [13], однако некоторые утверждения этой работы нуждаются в переработке [14]. Уравнения вида (1), содержащие, кроме того, смешанную производную u_{tx_i}, рассмотрены в [10].

В данной работе доказана фредгольмова разрешимость задач для уравнения (2) в энергетическом классе (в отличие от [8—12], где рассматривалось пространство Соболева $W_2^2(D)$). Исследованы сопряженные задачи. Выявлены направления распространения особенностей решения в гиперболических частях области D. Показано, что с точки зрения гладкости решений уравнение (1) обладает свойствами, аналогичными свойствам гиперболических уравнений, если α достаточно велико.

В частном случае при $k\leqslant 0$ в области D полученные результаты по