D. R. Yafaev, New scattering channels in a two-body system with slowly decreasing interaction,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 1, 211–236

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 1

НОВЫЕ КАНАЛЫ РАССЕЯНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ С МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© Д. Р. Яфаев

Рассматривается оператор Шрёдингера H с потенциалом $V(x)$, убывающим на бесконечности как $|x|^{-\rho}$, $0<\rho<1$. Стандартная оценка на производные $D^{\kappa}V(x)$ через $|x|^{-\rho-|\kappa|}$ предполагается вне произвольной конической окрестности некоторого заданного подпространства X_1. Этого хватает для существования модифицированного волнового оператора, сплетающего оператор кинетической энергии H_0 и H. Показано, что при некоторых предположениях нестационарное уравнение Шрёдингера имеет решения, „живущие“ при больших t в параболической окрестности подпространства X_1. Тем самым такие решения играют промежуточную роль между решениями, отвечающими связанным состояниям, и решениями со свободной асимптотикой. Их существование показывает, в частности, что волновой оператор для пары H_0, H не является полным.

§1. Введение

Цель теории рассеяния состоит в нахождении асимптотики при $t\to\infty$ решения $u(t)=\exp(-iHt)f$ нестационарного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом $H=-2^{-1}\Delta+V(x)$ в пространстве $\mathcal{H}=L_2(\mathbb{R}^d)$. Если f — собственный вектор, т. е. $Hf=\lambda f$, то, очевидно, $u(t)=\exp(-i\lambda t)f$. Предположим теперь, что f ортогонален подпространству $\mathcal{H}^{(p)}$, натянутому на все собственные векторы. В быстро убывающем случае, когда $V(x)=O(|x|^{-\rho})$, $\rho>1$, асимптотика $u(t)$ такая же, как для свободной системы, т. е.

$$\exp(-iHt)f=\exp(-iH_0t)f+o(1) \tag{1.1}$$

для некоторого $f_0\in\mathcal{H}$ и $H_0=-2^{-1}\Delta$. Символ $o(1)$ означает функцию, норма которой в пространстве $\mathcal{H}$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Можно переписать (1.1) в эквивалентном виде

$$(\exp(-iHt)f)(x)=\exp(i\Phi(x,t))t^{-d/2}g(x/t)+o(1), \tag{1.2}$$

где $\Phi(x,t) = x^2(2t)^{-1}$, $g = \exp(i\pi d/4)\hat{f}_0$, а $\hat{f}_0 = Ff_0$ — преобразование Фурье f_0.

Соотношение (1.2) выполняется (см., например, [1]) также для медленно убывающих потенциалов, удовлетворяющих условию

$$|D^\kappa V(x)| \le C(1+|x|)^{-\rho-|\kappa|}, \quad \rho > 0, \tag{1.3}$$

для $|\kappa| = 0,1,2$. В этом случае фазовая функция $\Phi(x,t)$ зависит от потенциала $V(x)$. Она может быть построена как (возможно, приближенное) решение уравнения эйконала

$$\partial\Phi/\partial t + 2^{-1}|\nabla\Phi|^2 + V = 0. \tag{1.4}$$

Асимптотика (1.2) показывает, что, если f принадлежит абсолютно непрерывному подпространству $\mathcal{H}^{(\mathrm{ac})} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^{(p)}$ оператора H, то решение $(\exp(-iHt)f)(x)$ „живет" в области, где $|x| \sim t$. Отображение $W\colon g \mapsto f$, определяемое посредством (1.2), изометрично, и его образ совпадает с подпространством $\mathcal{H}^{(\mathrm{ac})}$. Ясно, что WF — обычный (модифицированный) волновой оператор, сплетающий H_0 и H.

Цель этой статьи состоит в построении новых каналов рассеяния, которые возникают за счет собственных значений, порождаемых потенциалом $V(x)$ на „сечениях" задачи. Наши конкретные примеры показывают, в частности, что такой эффект имеет место при ослаблении условия (1.3) на производные $V(x)$. Точнее, наше доказательство существования новых каналов основывается на следующей конструкции. Она похожа на конструкцию работы [2], но проще ее. Разница состоит в том, что здесь мы проводим вычисления в координатном, вместо импульсного, представлении. Мы предполагаем, что

$$\mathbb{R}^d = X_1 \oplus X^1, \quad \dim X_1 = d_1,\ \dim X^1 = d^1,\ d_1 + d^1 = d, \tag{1.5}$$

и $V(x) = V(x_1, x^1)$. Введем оператор

$$H^1(x_1) = -2^{-1}\Delta_{x^1} + V(x_1, x^1) \tag{1.6}$$

в пространстве $L_2(X^1)$. Предположим, что оператор $H^1(x_1)$ имеет собственное значение $\lambda(x_1)$, и обозначим через $\psi(x_1)$ соответствующую нормированную собственную функцию. В содержательных случаях функция $\lambda(x_1)$ стремится к нулю при $|x_1| \to \infty$, но медленнее, чем $|x_1|^{-1}$. Мы рассматриваем ее как „эффективную" потенциальную энергию и сопоставляем дальнодействующему потенциалу $\lambda(x_1)$ фазовую функцию $\mathfrak{F}(x_1,t)$. Это означает, что $\mathfrak{F}(x_1,t)$ удовлетворяет (1.4), где $V(x)$ заменено на $\lambda(x_1)$. Мы показываем, что при некоторых предположениях для каждого $g \in L_2(X_1)$ найдется элемент $f \in \mathcal{H}^{(\mathrm{ac})}$ такой, что

$$(\exp(-iHt)f)(x) = \psi(x_1,x^1)\exp(i\mathfrak{F}(x_1,t))t^{-d_1/2}g(x_1/t) + o(1). \tag{1.7}$$

Множество таких элементов f составляет подпространство $\mathfrak{H} \subset \mathcal{H}^{(\mathrm{ac})}$. Оно строится как образ соответствующего волнового оператора $\mathcal{W}\colon L_2(X_1) \to \mathcal{H}$. Подпространство $\mathfrak{H}$ ортогонально образу $\mathcal{R}(W)$ оператора W, если он существует. Сужение оператора H на подпространство $\mathfrak{H}$ имеет абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с положительной полуосью.

Существование решений нестационарного уравнения Шрёдингера с асимптотикой (1.7) требует довольно специальных предположений, естественно формулируемых в терминах собственных функций $\psi(x_1,x^1)$ оператора $H^1(x_1)$. Типичная асимптотика $\psi(x_1,x^1)$ при $\lambda(x_1) \to 0$ оказывается автомодальной:

$$\psi(x_1,x^1) \sim |x_1|^{-\sigma d^1/2}\Psi(|x_1|^{-\sigma}x^1) \tag{1.8}$$

для некоторых $\Psi \in L_2(X^1)$ и $\sigma > 0$. Мы доказываем соотношение (1.7) при условии, что асимптотика (1.8) выполняется для $\sigma < 1/2$. В предположении (1.8) решение (1.7) „живет“ в параболической области, где $|x_1| \sim t$, $|x^1| \sim t^{\sigma}$. Это обеспечивает ортогональность подпространств $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{R}(W)$.

Исследование асимптотики собственных функций $\psi(x_1)$ при стремлении собственных чисел $\lambda(x_1)$ к нулю оказывается не простой задачей. Поэтому существенно, что $\psi(x_1,x^1)$ может быть выбрана как *приближенное* решение уравнения $H^1(x_1)\psi(x_1) - \lambda(x_1)\psi(x_1) = 0$. В наших применениях это позволяет построить $\psi(x_1)$ как собственную функцию некоторого вспомогательного оператора с *дискретным спектром*. На самом деле не требуется даже того, что V имеет отрицательную часть. Функция $\psi(x_1)$ может порождаться *положительным* минимумом (по переменной x^1) потенциала $V(x_1,x^1)$. В этом случае $\psi(x_1)$ отвечает резонансному состоянию оператора $H^1(x_1)$.

Типичный пример потенциала, к которому применима наша конструкция, дается равенством

$$V(x_1,x^1) = -v(\langle x_1\rangle^q + \langle x^1\rangle^q)^{-\rho/q}, \quad \rho \in (0,1), \ q \in (0,2), \ v > 0, \tag{1.9}$$

$\langle x\rangle = (1+x^2)^{1/2}$. Для потенциала (1.9) оценка (1.3) выполняется для любого κ вне произвольных конических окрестностей подпространств X_1 и X^1. Этого достаточно для существования волнового оператора W. Если $1 \leq q < 2$, то оценка (1.3) справедлива (равномерно по направлениям x) для $|\kappa| = 1$, но нарушается для $|\kappa| = 2$. Если $0 < q < 1$, то (1.3) нарушается уже для $|\kappa| = 1$. Соотношение (1.8) выполняется для

$$\sigma = (\rho + q)(2 + q)^{-1}$$

и любой собственной функции $\Psi(x^1)$ вспомогательного оператора $K_0 = -2^{-1}\Delta_{x^1} + v\rho q^{-1}|x^1|^q$ с дискретным спектром. Таким образом, в случае (1.9) решения с асимптотикой (1.7) существуют, если $q < 2(1-\rho)$. Подчеркнем, что волновой оператор $\mathcal{W} = \mathcal{W}_n$ может быть построен в терминах каждой собственной функции $\Psi = \Psi_n$ оператора K_0. Кроме того, переменные x_1 и x^1 можно поменять ролями. Это дает новый набор волновых операторов $\mathcal{W}^m$. Образы всех волновых операторов $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{W}^m$ и W ортогональны друг другу.

Потенциал (1.9) радиален при $q = 2$. В этом случае $\sigma = (2+\rho)/4 > 1/2$ и решения с асимптотикой (1.7) не существуют. Этого, конечно, можно было ожидать, так как волновой оператор W является полным. Этот пример показывает, что соотношение (1.8) для $\sigma > 1/2$ не обеспечивает существования решений с асимптотикой (1.7).

В разделе 2 мы напоминаем процедуру, которая сопоставляет каждому дальнодействующему (двухчастичному) потенциалу $V(x)$ такую фазовую функцию $\Phi(x,t)$, что выполняется (1.2). Общая конструкция каналов (1.7) обсуждается в разделе 3. В разделе 4 собраны сведения технического характера о теории возмущений. Конкретные примеры потенциалов, для которых существуют решения типа (1.7), приведены в разделах 5 и 6.

§2. Модифицированные волновые операторы

Напомним некоторые элементарные результаты теории рассеяния для двух частиц с дальнодействующим потенциалом. Мы обсуждаем здесь только существование волновых операторов и, следуя [3], проводим вычисления в координатном представлении. По сравнению с традиционным подходом [4, 5, 1], в котором свободная динамика определяется в импульсном представлении, это позволяет нам обойтись без метода стационарной фазы.

Опишем явную процедуру построения приближенного решения уравнения эйконала (1.4). Оказывается, оно может быть представлено в виде суммы по нечетным степеням t. Именно, положим

$$\Phi(x,t) = x^2(2t)^{-1} + \Omega(x,t) \tag{2.1}$$

и

$$\Omega(x,t) = \sum_{l=1}^{n} a_l(x) t^{2l-1}. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\partial\Phi/\partial t + 2^{-1}|\nabla\Phi|^2 + V = \sum_{l=1}^{n}((2l-1)a_l + \langle x, \nabla a_l\rangle + b_l)t^{2l-2} + \mathcal{R}_n, \tag{2.3}$$

где

$$b_1 = V, \qquad b_l = 2^{-1}\sum_{k=1}^{l-1}\langle\nabla a_k, \nabla a_{l-k}\rangle, \quad l \geq 2, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{R}_n = 2^{-1}\sum_{l=n+1}^{2n}\Big(\sum_{k=l-n}^{n}\langle\nabla a_k, \nabla a_{l-k}\rangle\Big)t^{2l-2}. \tag{2.5}$$

Сумма в правой части (2.3) равна нулю, если функции a_l удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(2l-1)a_l + \langle x, \nabla a_l\rangle + b_l = 0. \tag{2.6}$$

Решая это уравнение, находим, что

$$a_l(x) = -\int_0^1 s^{2l-2} b_l(sx)\,ds. \tag{2.7}$$

Таким образом, при заданных функциях $a_1, \ldots, a_{l-1}$ мы строим b_l по формуле (2.4), а затем находим a_l по формуле (2.7). Индуктивно это определяет все коэффициенты a_l. Первый из них равен

$$a_1(x) = -\int_0^1 V(sx)\,ds.$$

Ясно, что

$$D^\kappa a_l(x) = O(|x|^{-p-|\kappa|}), \quad |x| \to \infty,$$
$$\text{если } D^\kappa b_l(x) = O(|x|^{-p-|\kappa|}),\ p < 2l-1. \tag{2.8}$$

Тем самым верна следующая

Лемма 2.1. *Пусть для некоторого* $\kappa^{(0)}$ *условие* (1.3) *выполняется для всех* $|\kappa| \le \kappa^{(0)}$. *Определим функции* a_l *равенствами* (2.4), (2.7). *Тогда*

$$D^\kappa a_l(x) = O(|x|^{-2l+2-l\rho-|\kappa|}), \quad |\kappa| + l \le \kappa^{(0)} + 1, \ l\rho < 1. \tag{2.9}$$

Отметим, что функция b_l удовлетворяет оценке (2.9), если $(l-1)\rho < 1$. В силу уравнения (2.6) выражение (2.3) равно $\mathcal{R}_n$, если функции a_l, b_l определены равенствами (2.4), (2.7). Согласно лемме 2.1, каждая функция $\langle \nabla a_k, \nabla a_{l-k}\rangle$ в правой части (2.5) ограничена функцией $|x|^{-2l+2-l\rho}$ при $|x| \to \infty$. Поэтому при $|x| \ge ct$

$$|\langle \nabla a_k(x), \nabla a_{l-k}(x)\rangle| \le Ct^{-2l+2-l\rho}, \quad l \ge n+1.$$

Здесь и ниже C и c — различные положительные оценочные постоянные. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.2. *Пусть условие* (1.3) (*где* $\rho \in (0,1]$) *выполняется для* $|\kappa| \le [\rho^{-1}] + 1$. *Положим* $n = [\rho^{-1}]$ *и определим функции* $\Phi_0(x,t)$, $\Omega(x,t)$ *равенствами* (2.1), (2.2), (2.4), (2.7). *Тогда для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и любой постоянной* $c > 0$

$$\begin{gathered} \sup_{|x|\ge ct} |D^\kappa \Omega(x,t)| \le Ct^{1-|\kappa|-\varepsilon}, \quad |\kappa| = 1,2, \\ \sup_{|x|\ge ct} |\partial\Phi(x,t)/\partial t + 2^{-1}|\nabla\Phi(x,t)|^2 + V(x)| \le Ct^{-1-\varepsilon}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Введем теперь унитарный оператор $U_0(t)$,

$$(U_0(t)f)(x) = \exp(i\Phi(x,t))t^{-d/2} f(x/t), \tag{2.11}$$

в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, отвечающий правой части (1.2). Простое вычисление дает следующий результат.

Лемма 2.3. *Пусть* $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, Ω *связано с* Φ *равенством* (2.1),

$$B = \partial\Phi/\partial t + 2^{-1}|\nabla\Phi|^2 - i2^{-1}\Delta\Omega.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\big((i\partial/\partial t + 2^{-1}\Delta)U_0(t)f\big)(x) \\ &\quad = \exp(i\Phi(x,t))t^{-d/2} \\ &\qquad \times \big(-B(x,t)f(x/t) + it^{-1}\langle\nabla\Omega(x,t), (\nabla f)(x/t)\rangle + 2^{-1}t^{-2}(\Delta f)(x/t)\big). \end{aligned}$$

Конструкция леммы 2.2 ставит в соответствие каждому дальнодействующему потенциалу V фазовую функцию $\Phi(x,t)$, и, следовательно, модифицированную свободную эволюцию (2.11). Обозначим через Γ соответствующее отображение $\Gamma\colon V \mapsto \Phi$. Объединяя предложение 2.2 и лемму 2.3, мы получаем

Предложение 2.4. *В условиях предложения* 2.2, *для любого* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ *имеем*

$$\|(i\partial/\partial t + 2^{-1}\Delta - V)U_0(t)f\| = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \ t \to \infty.$$

Пусть $\mathbf{X}$ — оператор умножения на $x^2/2$ в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Согласно формулам (2.1), (2.2) и лемме 2.1, для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty}\big(\Phi(tx,t) - \Phi(tx,t+s)\big) = sx^2/2, \quad x \neq 0,$$

так, что сильный предел

$$\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U_0^*(t+s)U_0(t) = \exp(is\mathbf{X}). \tag{2.12}$$

Полученный результат влечет за собой

Предложение 2.5. *В условиях предложения* 2.2 *волновой оператор*

$$W = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} \exp(iHt)U_0(t) \tag{2.13}$$

существует, изометричен, и выполняется сплетающее свойство $HW = W\mathbf{X}$.

Приведенная конструкция, конечно, сохраняется, если $V = V_1 + V_2$, где V_1 удовлетворяет (1.3) для $|\kappa| \leq [\rho^{-1}] + 1$, а V_2 быстро убывает, т. е. удовлетворяет (1.3) для некоторого $\rho > 1$ и $\kappa = 0$. Как показано в [1], достаточно предположить (1.3) относительно V_1 только для $|\kappa| \leq 2$. Это достигается за счет подходящего разбиения V на быстро и медленно убывающие части и доказательству существования точного решения уравнения (1.4) (с V_1 вместо V). Достоинство изложенной конструкции (так же как и конструкции [5]) состоит в ее явном характере. Кроме того, она работает, даже если предположение (1.3) выполняется только в некотором конусе $K \subset \mathbb{R}^d$. В этом случае свободная динамика $U_0(t)$ определяется в пространстве $L_2(K)$, элементы f в предложении 2.4 должны быть выбраны из множества $C_0^\infty(K)$, а волновой оператор W действует из $L_2(K)$ в $\mathcal{H}$.

В действительности, конструкция этого раздела применима, если V имеет $[\rho^{-1}] + 1$ производных по угловым переменным, удовлетворяющих (1.3). По радиальной переменной $r = |x|$ достаточно предположить существование одной производной $D_r V(x) = O(|x|^{-1-\rho})$. Например, для потенциалов $V(x) = v(r)g(\omega)$, $\omega = xr^{-1}$, где g — гладкая функция на единичной сфере, достаточно предположить, что $v'(r) = O(r^{-1-\rho})$. В этом случае функции a_l выражаются в терминах интегралов функции v (и ее степеней). Эти выражения содержат производные функции g, но не функции v. Условие на v' требуется для проверки (2.10) при $|\kappa| = 2$. В частности, в одномерном случае волновой оператор (2.13) существует, если условие (1.3) выполняется при $\kappa = 0, 1$.

§3. Общая конструкция

Цель этого раздела состоит в доказательстве асимптотики (1.7). Напомним, что $\mathbb{R}^d$ разлагается в ортогональную сумму (1.5), а x_1, x^1 — проекции вектора $x \in \mathbb{R}^d$ на подпространства X_1, X^1. Переформулируем соотношение (1.7) в терминах соответствующего волнового оператора. Функция $\mathfrak{F}(x_1, t)$ определяется конструкцией §2, которая применяется по переменной x_1 (вместо x) к функции $\lambda(x_1)$ (вместо $V(x)$), т. е. мы полагаем $\mathfrak{F} = \Gamma\lambda$. Пусть $U_1(t)$ оператор модифицированной свободной эволюции по переменной x_1,

$$(U_1(t)f)(x_1) = \exp(i\mathfrak{F}(x_1,t))t^{-d_1/2}f(x_1/t). \tag{3.1}$$

Согласно предложению 2.4, для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\})$ справедлива оценка

$$\|(i\partial/\partial t + 2^{-1}\Delta_{x_1} - \lambda)U_1(t)f\|_{L_2(X_1)} = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \ t \to \infty. \tag{3.2}$$

Пусть изометрический оператор $J\colon L_2(X_1) \to \mathcal{H}$ определяется равенством

$$(Jf)(x_1, x^1) = \psi(x_1, x^1)f(x_1), \quad J = J(\psi). \tag{3.3}$$

Мы докажем существование волнового оператора

$$\mathcal{W} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\infty} \exp(iHt)JU_1(t). \tag{3.4}$$

Сформулируем точные условия на функцию $\psi(x_1, x^1)$. Мы предполагаем, что $\psi(x_1, \cdot)$ — *приближенная* собственная функция оператора (1.6), а именно

$$-2^{-1}\Delta_{x^1}\psi(x_1,x^1) + V(x_1,x^1)\psi(x_1,x^1) = \lambda(x_1)\psi(x_1,x^1) + Y(x_1,x^1), \tag{3.5}$$

где

$$\lim_{|x_1|\to\infty} \|\psi(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = 1, \tag{3.6}$$

$$\|Y(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{-1-\varepsilon}), \quad |x_1| \to \infty, \tag{3.7}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Приближенные „собственные значения" $\lambda(x_1)$ должны удовлетворять условию предыдущего раздела:

$$D^\kappa\lambda(x_1) = O(|x_1|^{-\rho-|\kappa|}), \quad \rho > 0, \ |\kappa| \le [\rho^{-1}] + 1. \tag{3.8}$$

Относительно самой функции $\psi(x_1, x^1)$ мы предполагаем, что при $|x_1| \to \infty$

$$\|\nabla_{x_1}\psi(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{-1}), \quad \|\Delta_{x_1}\psi(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{-1-\varepsilon}) \tag{3.9}$$

и

$$\|\widetilde{\psi}(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{1-\varepsilon}), \quad \text{где } \widetilde{\psi}(x_1,x^1) = (x^1)^2\psi(x_1,x^1). \tag{3.10}$$

Наше последнее условие на $\psi(x_1, x^1)$ параметризуется функцией $\eta(x_1)$, удовлетворяющей оценкам

$$D^\kappa\eta(x_1) = O(|x_1|^{-|\kappa|}), \quad |\kappa| = 0,1, \qquad \Delta\eta(x_1) = O(|x_1|^{-1}). \tag{3.11}$$

Мы предполагаем, что вспомогательная функция

$$\xi(x_1,x^1) = (2\langle\nabla_{x^1}\psi, x^1\rangle + d^1\psi)\eta(x_1) + \langle\nabla_{x_1}\psi, x_1\rangle \tag{3.12}$$

удовлетворяет оценке

$$\|\xi(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{3.13}$$

Предположим дополнительно, что

$$|(\nabla\eta)(x_1)|\|\nabla_{x_1}\widetilde{\psi}(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{-\varepsilon}), \tag{3.14}$$

$$|(\nabla\eta)(x_1)|^2\|\check{\psi}(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{1-\varepsilon}), \tag{3.15}$$

где $\check{\psi}(x_1,x^1) = |x^1|^4\psi(x_1,x^1)$.

Подчеркнем, что все условия на функции $\psi(x_1, x^1)$, $Y(x_1, x^1)$ и $\lambda(x_1)$ используются только для достаточно больших $|x_1|$. Условия на $\psi(x_1, x^1)$ допускают функции с асимптотикой (1.8). Более общим образом, сформулированные предположения выполняются для функций вида

$$\psi(x_1,x^1) = b(x_1)^{-d^1/2}\Psi(x_1, b(x_1)^{-1}x^1), \tag{3.16}$$

где $\Psi(x_1, x^1)$ „слабо“ зависит от переменной x_1.

Лемма 3.1. *Пусть* $\psi(x_1, x^1)$ *определяется формулой* (3.16), *где*

$$\int (1+|x^1|^4)^2 |D_{x_1}^{\kappa_1} D_{x^1}^{\kappa^1} \Psi(x_1, x^1)|^2 dx^1 = O(|x_1|^{-2|\kappa_1|(1+\varepsilon)}),\ 0 \le |\kappa_1| + |\kappa^1| \le 2, \quad (3.17)$$

$\varepsilon > 0$. *Относительно функции* $b(x_1)$ *предположим, что для некоторого* $\sigma \in [0, 1/2)$

$$|b(x_1)| \ge c|x_1|^\sigma, \quad c > 0, \quad |D^\kappa b(x_1)| \le C|x_1|^{\sigma - |\kappa|}, \quad |\kappa| \le 3. \qquad (3.18)$$

Тогда для функции

$$\eta(x_1) = 2^{-1} b(x_1)^{-1} \langle \nabla b(x_1), x_1 \rangle \qquad (3.19)$$

выполняются все условия (3.9)–(3.15).

Доказательство. Все условия проверяются прямыми вычислениями. Для проверки первой оценки (3.9) заметим, что

$$\begin{aligned} &\nabla_{x_1} \psi(x_1, x^1) \\ &\quad = b(x_1)^{-d^1/2} \Big(-2^{-1} d^1 b(x_1)^{-1} \nabla b(x_1) \Psi(x_1, b(x_1)^{-1} x^1) \\ &\qquad + (\nabla_{x_1} \Psi)(x_1, b(x_1)^{-1} x^1) \\ &\qquad - b(x_1)^{-2} \nabla b(x_1) \langle (\nabla_{x^1} \Psi)(x_1, b(x_1)^{-1} x^1), x^1 \rangle \Big). \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Первый член в правой части удовлетворяет (3.9), так как, согласно (3.18), $b(x_1)^{-1} \nabla b(x_1) = O(|x_1|^{-1})$. Для доказательства оценки через $|x_1|^{-1}$ для норм в $L_2(X^1)$ второго и третьего слагаемых надо дополнительно учесть условие (3.17) соответственно для $|\kappa_1| = 1$, $\kappa^1 = 0$ и для $\kappa_1 = 0$, $|\kappa^1| = 1$. Для доказательства второй оценки (3.9) еще раз дифференцируем (3.20) по x_1 и используем предположения (3.17) относительно вторых производных функции $\Psi(x_1, x^1)$ и предположения (3.18) на вторые производные $b(x_1)$. Условие (3.10) выполняется, потому что

$$\begin{gathered} \|\widetilde{\psi}(x_1, \cdot)\|_{L_2(X^1)} = b^2(x_1) \|\widetilde{\Psi}(x_1, \cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{2\sigma}), \\ \widetilde{\Psi}(x_1, x^1) = (x^1)^2 \Psi(x_1, x^1), \end{gathered}$$

и $\sigma < 1/2$. Используя равенство (3.20) и определяя $\eta(x_1)$ посредством (3.19), находим, что функция (3.12) равна

$$\xi(x_1, x^1) = b(x_1)^{-d^1/2} \langle \nabla_{x_1} \Psi(x_1, b(x_1)^{-1} x^1), x_1 \rangle.$$

Поэтому (3.13) — прямое следствие (3.17) для $|\kappa_1| = 1$, $\kappa^1 = 0$. Проверка (3.14) аналогична проверке первого условия (3.9). Мы опять используем равенство (3.20). Умножение на $(x^1)^2$ дает дополнительный множитель $b^2(x_1)$, так что

$$\|\nabla_{x_1}\widetilde{\psi}(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{-1+2\sigma}).$$

Поскольку $\nabla\eta(x_1) = O(|x_1|^{-1})$, это дает (3.14) (при $\varepsilon = 1$). Наконец, заметим, что

$$\|\check{\psi}(x_1,\cdot)\|^2_{L_2(X^1)} = b^8(x_1)\int |x^1|^8|\Psi(x_1,x^1)|^2dx^1 = O(|x_1|^{8\sigma}).$$

Поэтому левая часть (3.15) ограничена равномерно по x_1. •

Отметим, что функция (3.19) равняется $\eta(x_1) = \sigma/2$, если $b(x_1)$ однородна степени σ (для достаточно больших $|x_1|$).

Для доказательства существования волнового оператора (3.4) было бы достаточно проверить, что функция $u_1(t) = JU_1(t)f$ является „хорошим“ приближенным решением нестационарного уравнения Шрёдингера, т. е.

$$\left\|\frac{d}{dt}(\exp(iHt)u_1(t))\right\| = \|i\partial u_1/\partial t - Hu_1\| = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0,\ t \to \infty. \tag{3.21}$$

Начальные данные f могут быть выбраны из любого плотного в $L_2(X_1)$ множества. К сожалению, для функции $\psi(x_1, x^1)$ с асимптотикой (1.8) оценка (3.21) может выполняться только при $\varepsilon = 0$. Оказывается, лучшее приближение к решению уравнения Шрёдингера дается формулой

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \exp(i\gamma(x_1,x^1)t^{-1})u_1(x,t),\\ \gamma(x_1,x^1) &= (x^1)^2\eta(x_1),\\ u_1(t) &= JU_1(t)f. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Пусть функция* $u(t)$ *определяется равенствами* (3.22), *где* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\})$. *Предположим, что функция* $\psi(x_1, x^1)$ *удовлетворяет для некоторого* $\sigma \in \mathbb{R}$ *условиям* (3.6) *и* (3.9)–(3.15). *Пусть выполняются соотношения* (3.8) *и* (3.7) *для функций* $\lambda(x_1)$ *и* $Y(x_1, x^1)$, *определенных равенством* (3.5). *Тогда*

$$\|i\partial u/\partial t - Hu\| = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0,\ t \to \infty. \tag{3.23}$$

Доказательство. Вычислим левую часть (3.23). По определению (3.22)

$$i\partial u/\partial t = t^{-2}\gamma u + i\tau\psi\partial g/\partial t, \quad \tau = \exp(i\gamma(x_1, x^1)t^{-1}), \; g = U_1(t)f, \tag{3.24}$$

и

$$2^{-1}\Delta_{x_1}u = 2^{-1}g\Delta_{x_1}(\tau\psi) + \langle\nabla_{x_1}(\tau\psi), \nabla_{x_1}g\rangle + 2^{-1}\tau\psi\Delta_{x_1}g. \tag{3.25}$$

Учитывая, что функция g не зависит от x^1, получаем равенство

$$(2^{-1}\Delta_{x^1} - V)u = \tau g(2^{-1}\Delta_{x^1} - V)\psi + g\langle\nabla_{x^1}\psi, \nabla_{x^1}\tau\rangle + 2^{-1}\psi g\Delta_{x^1}\tau. \tag{3.26}$$

Мы должны показать, что норма в пространстве $\mathcal{H}$ суммы выражений (3.24)–(3.26) оценивается через $O(t^{-1-\varepsilon})$. Заметим, что по условиям (3.10) и (3.11) для $\kappa = 0$ норма первого слагаемого в правой части (3.24) есть

$$t^{-2}\|\gamma u\| = t^{-2}\|\widetilde{\psi}\eta g\| = O(t^{-1-\varepsilon}). \tag{3.27}$$

В силу уравнения (3.5) первое слагаемое в правой части (3.26) равняется $-\tau(\lambda\psi + Y)g$. Поэтому сумма последних членов в (3.24) и (3.25) равна

$$\tau\psi(i\partial/\partial t + 2^{-1}\Delta_{x_1} - \lambda)g - \tau Y g. \tag{3.28}$$

Норма (в $\mathcal{H}$) первого слагаемого в (3.28) ограничена числом $t^{-1-\varepsilon}$ согласно (3.6) и (3.2). Такая же оценка для второго слагаемого в (3.28) выполняется на основании условия (3.7). Действительно,

$$\begin{aligned}\|Yg\|^2 &= t^{-d_1}\int\int |Y(x_1, x^1)f(x_1/t)|^2 dx_1 dx^1 \\ &\le t^{-d_1}\int |x_1|^{-2-2\varepsilon}|f(x_1/t)|^2 dx_1 = ct^{-2-2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\langle\nabla_{x_1}(\tau\psi), \nabla g\rangle - \tau i t^{-1}\langle\nabla_{x_1}\psi, x_1\rangle g = O(t^{-1-\varepsilon}), \quad \nabla g = \nabla_{x_1}g. \tag{3.29}$$

(Это означает, конечно, что норма в $\mathcal{H}$ левой части есть $O(t^{-1-\varepsilon})$). Заметим, что $\mathfrak{F}(x_1,t) = (x_1)^2(2t)^{-1} + \Omega_1(x_1,t)$, где Ω_1 удовлетворяет условию (2.10) по переменной x_1. По определению функций g и τ,

$$\nabla g(x_1,t) = t^{-d_1/2}\exp(i\mathfrak{F}(x_1,t)) \\ \times \big(i(x_1/t + \nabla\Omega_1(x_1,t))f(x_1/t) + t^{-1}(\nabla f)(x_1/t)\big) \tag{3.30}$$

и $\nabla_{x_1}\tau = \tau i(x^1)^2 t^{-1}\nabla\eta$. Согласно предположениям (3.10) и (3.11) для $\kappa = 1$,

$$\|\psi\langle\nabla_{x_1}\tau, \nabla g\rangle\|^2 = t^{-2}\int\int |\widetilde{\psi}(x_1,x^1)\langle\nabla\eta(x_1), \nabla g(x_1,t)\rangle|^2 dx_1 dx^1 \\ \le t^{-2}\int |x_1|^{-2\varepsilon}|\nabla g(x_1,t)|^2 dx_1.$$

В силу (3.30) и (2.10) это выражение не превосходит $C\,t^{-2-2\varepsilon}$. Аналогично, для доказательства равенства

$$\langle\nabla_{x_1}\psi, \nabla_{x_1}g\rangle = it^{-1}\langle\nabla_{x_1}\psi, x_1\rangle g + O(t^{-1-\varepsilon})$$

следует использовать первое условие (3.9) и (2.10). Это дает (3.29).

Сгруппируем теперь второе слагаемое в правой части (3.25) с двумя последними членами в правой части (3.26). Поскольку

$$(\nabla_{x^1}\tau)(x_1,x^1) = 2i\eta(x_1)t^{-1}x^1\tau, \\ (\Delta_{x^1}\tau)(x_1,x^1) = (2it^{-1}d^1\eta(x_1) - 4t^{-2}(x^1)^2\eta(x_1)^2)\tau,$$

можно переписать их сумму как

$$\langle\nabla_{x_1}(\tau\psi), \nabla g\rangle + i\big(2\langle\nabla_{x^1}\psi, x^1\rangle + d^1\psi\big)\eta\tau g t^{-1} - 2\tau\widetilde{\psi}\eta^2 g t^{-2}. \tag{3.31}$$

Учитывая (3.29) и используя обозначение (3.12), найдем, что сумма первых двух членов равна $i\tau\xi g t^{-1} + O(t^{-1-\varepsilon})$. Согласно (3.13), $\|\xi g\| = O(t^{-\varepsilon})$. Последний член в (3.31) такой же как (3.27) (с заменой η на η^2).

Остается рассмотреть последнее слагаемое в правой части (3.25). Заметим, что

$$\tau^{-1}\Delta_{x_1}(\tau\psi) = \Delta_{x_1}\psi + it^{-1}(2\langle\nabla\eta, \nabla_{x_1}\widetilde{\psi}\rangle + \widetilde{\psi}\Delta\eta) - t^{-2}\check{\psi}|\nabla\eta|^2. \tag{3.32}$$

Вклады в $g\Delta_{x_1}(\tau\psi)$ каждого из слагаемых в правой части оцениваются с помощью второго предположения (3.9) и (3.10), (3.14), (3.15). •

Теперь легко установить основной результат этого раздела.

Теорема 3.3. *Пусть функции* $\psi(x_1, x^1)$, $\lambda(x_1)$, *и* $Y(x_1, x^1)$ *удовлетворяют условиям предложения* 3.2. *Определим оператор* $U_1(t)$ *равенством* (3.1), *где* $\mathfrak{F} = \Gamma\lambda$. *Тогда предел* (3.4) *существует и волновой оператор* $\mathcal{W} : L_2(X_1) \to \mathcal{H}$ *изометричен. Обозначим через* $\mathbf{X}_1$ *умножение на* $x_1^2/2$ *в пространстве* $L_2(X_1)$. *Выполняется сплетающее свойство* $H\mathcal{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}_1$. *В частности, сужение* H *на образ* $\mathcal{W}$ *имеет абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Существование предела (3.4) можно проверять на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\})$. Используем обозначение (3.22). Достаточно установить сходимость $\exp(iHt)u(t)$ вместо $\exp(iHt)u_1(t)$. Действительно, согласно первому условию (3.13)

$$\|u(t) - u_1(t)\|^2 \leq t^{-2-d_1} \int\int |\widetilde{\psi}(x_1, x^1)\eta(x_1)f(x_1/t)|^2 dx_1 dx^1 = O(t^{-2\varepsilon}).$$

Предел $\exp(iHt)u(t)$ существует, поскольку в силу предложения 3.2 производная этой функции интегрируема. Сплетающее свойство обеспечивается равенством (2.12). •

Замечание. Если $\eta(x_1)$ постоянна (для достаточно больших $|x_1|$), то правая часть (3.32) равняется $\Delta_{x_1}\psi$ и предположения (3.14), (3.15) можно опустить. В частности, это верно, если в условиях леммы 3.1 функция $b(x_1)$ однородна (по крайней мере, при достаточно больших $|x_1|$).

Следующее очевидное утверждение позволяет упростить построение волнового оператора (3.4).

Предложение 3.4. *Предположим, что оператор* $J(\psi_0)$ *определяется равенством* (3.3), *где функция* $\psi_0(x_1, x^1)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{|x_1|\to\infty} \|\psi(x_1, \cdot) - \psi_0(x_1, \cdot)\|_{L_2(X^1)} = 0.$$

Тогда волновые операторы (3.4), *отвечающие* $J(\psi)$ *и* $J(\psi_0)$, *существуют одновременно и совпадают.*

Решения с асимптотиками (1.1) и (1.7) „живут“ в разных областях $\mathbb{R}^d$. Приведем точную формулировку этого утверждения.

Теорема 3.5. *Пусть оба волновых оператора* (3.4) *и* (2.13), *отвечающих некоторым функциям* $\mathfrak{F}$ *и* Φ, *существуют. Предположим, что функция* (3.10) *удовлетворяет оценке*

$$\|\widetilde{\psi}(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)} = O(|x_1|^{2-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{3.33}$$

Тогда образы операторов $\mathcal{W}$ *и* W *ортогональны.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\lim_{t\to\infty}(JU_1(t)f, U_0(t)g) = 0 \tag{3.34}$$

для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\})$ и $g(x_1, x^1) = g_1(x_1)g^1(x^1)$, где $g_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\})$ и $g^1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d^1} \setminus \{0\})$. Заметим, что линейные комбинации таких элементов g плотны в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда (3.34) — следствие равенства

$$\lim_{t\to\infty} t^{-(d+d_1)/2} \int\int |\psi(x_1, x^1)|\,|f(x_1/t)|\,|g_1(x_1/t)|\,|g^1(x^1/t)|\,dx_1 dx^1 = 0.$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$\int |\psi(x_1, x^1)|\,|g^1(x^1/t)|\,dx^1 \le Ct^{-2+d^1/2}|x_1|^{2-\varepsilon}. \tag{3.35}$$

Интеграл (3.35) не превосходит

$$\Big(\int |g^1(x^1/t)|^2|x^1|^{-4}dx^1 \cdot \int |\widetilde{\psi}(x_1, x^1)|^2 dx^1\Big)^{1/2} = Ct^{-2+d^1/2}\|\widetilde{\psi}(x_1,\cdot)\|_{L_2(X^1)}.$$

По условию (3.33) это выражение совпадает с правой частью (3.35). •

Аналогичные соображения показывают, что при любом $c > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{|x^1|\ge c|x_1|} |(JU_1(t)f)(x_1, x^1)|^2 dx_1 dx^1 = 0, \quad \forall f \in L_2(X_1). \tag{3.36}$$

Поэтому при $f \in R(\mathcal{W})$ функция $\exp(-iHt)f$ „живет“ в произвольной конической (в действительности, даже параболической) окрестности подпространства X_1.

В заключение отметим (ср. с замечанием в конце предыдущего раздела), что естественная модификация теоремы 3.3 сохраняется даже если сделанные выше предположения выполняются только в некотором конусе $K_1 \subset X_1$. В этом случае $\mathcal{W} : L_2(K_1) \to \mathcal{H}$. Во внешность конуса K_1 функции $\lambda(x_1)$ и $\psi(x_1, \cdot)$ могут быть продолжены произвольным образом.

§4. Теория возмущений

В этом параграфе собраны стандартные сведения из теории возмущений собственных значений и собственных функций оператора Шрёдингера. Они используются в следующем разделе для проверки предположений предыдущего раздела для конкретных классов потенциалов.

Обозначим через X оператор умножения на $(x^2+1)^{1/2}$ в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Доказательство следующего элементарного утверждения может быть получено интегрированием по частям.

Лемма 4.1. *Для любого* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *и любых* $i, j = 1, \ldots, d$

$$\|X^k D_j \psi\| \le C(\|\Delta\psi\| + \|X^{2k}\psi\|),$$
$$\|X^k D_i D_j \psi\| \le C(\|X^k \Delta\psi\| + \|X^{4k}\psi\|).$$

Напомним, что оператор Шрёдингера $K = -2^{-1}\Delta + U$ с полуограниченным снизу потенциалом $U(x)$ определяется посредством квадратичной формы

$$(Kf, f) = 2^{-1}\|\nabla f\| + (Uf, f).$$

Лемма 4.2. *Пусть* $K = -2^{-1}\nabla + U$, *где* $U(x) \ge u_0$. *Выберем любую регулярную точку* z *оператора* K. *Тогда для любого* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|X^k R(z) X^{-k}\| \le C_k < \infty, \quad R(z) = (K - z)^{-1}, \tag{4.1}$$

где C_k *зависит только от величины* u_0 *и расстояния* d *от* z *до спектра* K.

Доказательство. Поскольку

$$X^k R(z) - R(z) X^k = R(z)[K, X^k] R(z),$$

для некоторых ограниченных функций $\mathbf{w}_k(x)$ и $w_k(x)$

$$X^k R(z) X^{-k} - R(z) = R(z)(\nabla \mathbf{w}_k X^{k-1} + w_k X^{k-2}) R(z) X^{-k}.$$

Отсюда следует, что

$$\|X^k R(z) X^{-k}\|$$
$$\le \|R(z)\| + C\|R(z)\nabla\| \|X^{k-1} R(z) X^{-k}\| + C\|R(z)\| \|X^{k-2} R(z) X^{-k}\|.$$

Заметим, что $\|\nabla(K-u_1)^{-1/2}\|^2 \le 2$, $u_1 = u_0 - 1$, $\|(K-u_1)^{1/2}R(z)\|$, $\|R(z)\|$ ограничены постоянными, которые зависят только от u_0 и d. Тем самым индуктивно по $k = 1, 2, \dots$ мы получаем (4.1). •

Рассмотрим самосопряженный оператор $K_0 = -2^{-1}\Delta + U_0$ с полуограниченным снизу потенциалом U_0, который, возможно, возрастает на бесконечности, но не быстрее некоторой степени $|x|$. Предположим, что оператор K_0 имеет изолированное простое собственное значение Λ_0. Относительно соответствующей собственной функции Ψ_0 предположим, что

$$\|X^k\Psi_0\| \le C_k < \infty, \quad \forall k. \tag{4.2}$$

Выберем $\varepsilon_0 > 0$ таким образом, чтобы интервалы $[(\Lambda_0 - \varepsilon_0, \Lambda_0)$ и $(\Lambda_0, \Lambda_0 + \varepsilon_0)]$ не содержали спектра оператора K_0.

Введем возмущение оператора K_0. Предположим, что

$$\|\mathcal{U}(b)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\mathcal{U}(b,x)| \to 0 \quad \text{при } b \to \infty$$

и положим

$$U(b,x) = U_0(x) + \mathcal{U}(b,x).$$

Тогда при достаточно больших b спектр оператора $K(b) = -2^{-1}\Delta + U(b)$ в $[\Lambda_0 - \varepsilon_0, \Lambda_0 + \varepsilon_0]$ состоит из единственного собственного числа $\Lambda(b)$. Это собственное число является простым и $\Lambda(b) \to \Lambda_0$ при $b \to \infty$. Соответствующая собственная функция $\Psi(b)$,

$$-2^{-1}\Delta\Psi(b) + U(b)\Psi(b) = \Lambda(b)\Psi(b), \tag{4.3}$$

может быть построена как

$$\Psi(b) = P(b)\Psi_0, \quad \text{где } P(b) = -(2\pi i)^{-1}\int_C (K(b) - z)^{-1}dz; \tag{4.4}$$

C — окружность $|z - \Lambda_0| = \varepsilon_0$, обходимая против часовой стрелки. В частности, $\|\Psi(b) - \Psi_0\| \to 0$ при $b \to \infty$. Наша цель состоит в получении оценок на производные $\Psi(b)$.

Предложение 4.3. *Пусть выполняется* (4.2). *Предположим, что*

$$\|\partial^\kappa \mathcal{U}(b)/\partial b^\kappa\| \le b^{-\epsilon-\kappa}, \quad \epsilon > 0, \ \kappa = 0, 1, \dots, l. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\|X^k \Psi(b)\| + \|X^k D_j \Psi(b)\| + \|X^k D_i D_j \Psi(b)\| \le C \tag{4.6}$$

и

$$\|X^k \partial^\kappa \Psi(b)/\partial b^\kappa\| + \|X^k D_j \partial^\kappa \Psi(b)/\partial b^\kappa\| + \|X^k D_i D_j \partial^\kappa \Psi(b)/\partial b^\kappa\| \le C b^{-\epsilon-\kappa} \tag{4.7}$$

для любых $k = 0, 1, \dots, i, j = 1, \dots, d$, *и* $\kappa = 1, \dots, l$.

Доказательство. Согласно (4.4),

$$\|X^k \Psi(b)\| \le (2\pi)^{-1} \int_C \|X^k (K(b) - z)^{-1} X^{-k}\| |dz| \, \|X^k \Psi_0\|.$$

Здесь интеграл ограничен равномерно по b согласно лемме 4.2, а последний сомножитель конечен согласно условию (4.2). Это дает первую оценку (4.6). Теперь равномерная ограниченность $\|X^k \Delta \Psi(b)\|$ вытекает из уравнения (4.3). Для доказательства остальных оценок (4.6) остается сослаться на лемму 4.1.

Дифференцируя (4.4) по b, найдем, что

$$\partial \Psi(b)/\partial b = (2\pi i)^{-1} \int_C (K(b) - z)^{-1} \partial \mathcal{U}(b)/\partial b \, (K(b) - z)^{-1} \Psi_0 dz,$$

откуда

$$\|X^k \partial \Psi(b)/\partial b\| \le (2\pi)^{-1} \int_C \|X^k (K(b) - z)^{-1} X^{-k}\|^2 |dz| \|\partial \mathcal{U}(b)/\partial b\| \|X^k \Psi_0\|.$$

Ввиду условия (4.5) это дает первую оценку (4.7) для $\kappa = 1$. Дифференцируя (4.3) по b, получим оценку для $\|X^k \Delta \partial \Psi(b)/\partial b\|$ и, согласно лемме 4.1, оценки (4.7) для $\kappa = 1$. Оценки для $\kappa > 1$ выводятся вполне аналогично. •

Поскольку

$$\Lambda(b) = \Lambda_0 + (\Psi(b), \Psi_0)^{-1} (\mathcal{U}(b) \Psi(b), \Psi_0),$$

справедливо

Следствие 4.4. *Выполняется оценка*

$$\|\partial^\kappa \Lambda(b)/\partial b^\kappa\| \le b^{-\epsilon-\kappa}, \quad \epsilon > 0, \ \kappa = 1, \dots, l. \tag{4.8}$$

§5. Класс потенциалов

Здесь мы построим конкретный класс потенциалов $V(x)$, для которых выполняются все условия раздела 3. Эти потенциалы убывают на бесконечности и тем самым отвечают двухчастичному случаю.

Пусть (1.5) — какое-либо разложение $\mathbb{R}^d$. Положим

$$V(x_1, x^1) = -\big(\acute{a}(x_1) + v(x^1)\big)^{-p}, \quad p > 0. \tag{5.1}$$

Предположим, что функции a и v удовлетворяют следующим условиям.

Условие 5.1. *Для достаточно больших $|x_1|$ функция $a(x_1)$ дифференцируема α раз и*

$$|a(x_1)| \geq c|x_1|^s, \quad s > 0, \quad c > 0, \quad |D^\kappa a(x_1)| \leq C|x_1|^{s-|\kappa|}, \quad |\kappa| \leq \alpha.$$

Предположим, что $\alpha \geq [(sp)^{-1}] + 1$ и $\alpha \geq 3$.

Условие 5.2. *Функция $v(x^1)$ дифференцируема ν раз по переменной $r = |x^1|$, а ее производные локально ограничены. Справедливо представление*

$$v(x^1) = \phi(\omega)r^q + \widetilde{v}(x^1), \quad 0 < c_1 \leq \phi(\omega) \leq c_2 < \infty, \quad q > 0, \quad \omega = x^1 r^{-1},$$

где

$$|\partial^\kappa \widetilde{v}(x^1)/\partial r^\kappa| \leq C r^{q-\varepsilon-\kappa}, \ \varepsilon > 0, \ \kappa \leq \nu, \quad \text{для } r \geq 1. \tag{5.2}$$

Предположим, что $\nu \geq [(sp)^{-1}] + 1$.

При этих условиях оценка (1.3) выполняется для $\rho = p\min\{q, s\}$ и $|\kappa| \leq \min\{\alpha, \nu\}$ вне произвольных конических окрестностей подпространств X_1 и X^1. Этого хватает для существования волнового оператора (2.13), если $\min\{\alpha, \nu\} \geq [\rho^{-1}] + 1$.

Мы покажем, что при условиях

$$pq < 2, \quad 2s(p+1) < q + 2 \tag{5.3}$$

волновой оператор (3.4) существует. Поскольку из (5.3) вытекает неравенство

$$ps < p(q+2)(2p+2)^{-1} < 1,$$

то потенциал (5.1) обязательно медленно убывает.

Мы построим приближенные собственные функции $\psi(x_1, x^1)$ оператора (1.6) как настоящие собственные функции оператора Шрёдингера с некоторым возрастающим потенциалом. С этой целью мы прежде всего заменим потенциал (5.1) N членами его разложения Тейлора:

$$(v(x^1)+a)^{-p} = a^{-p}\sum_{k=0}^{N-1} c_k(a^{-1}v(x^1))^k + a^{-p}O((a^{-1}v(x^1))^N), \quad a = a(x_1), \tag{5.4}$$

где $c_0 = 1$, $c_1 = -p$. Ниже мы увидим, что при достаточно больших N остаточным членам в (5.4) можно пренебречь. Слагаемое, отвечающее $k = 0$, не зависит от x^1 и, следовательно, влияет только на собственное число $\lambda(x_1)$. Главный вклад в эффективный потенциал определяется следующим членом $-pa^{-p-1}v(x^1)$, или, точнее, его асимптотикой на бесконечности. Для того чтобы свести задачу к случаю ограниченных возмущений, рассмотренному в разделе 4, мы обрежем при достаточно больших $r = |x^1|$ все слагаемые в (5.4), кроме $-pa^{-p-1}\phi(\omega)r^q$. Пусть $\zeta \geq 0$ — C^∞-функция, такая что $\zeta(r) = 1$ при $r \leq 1$ и $\zeta(r) = 0$ при $r \geq 2$. Положим (значение параметра $\theta > 0$ выбирается ниже)

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(a, x^1) &= pa^{-p-1}(\phi(\omega)r^q + \zeta(a^{-\theta}r)\widetilde{v}(x^1)) \\ &\quad - a^{-p}\zeta(a^{-\theta}r)\sum_{k=2}^{N-1} c_k(a^{-1}v(x^1))^k\end{aligned} \tag{5.5}$$

и рассмотрим собственные функции задачи

$$-2^{-1}\Delta\psi + \mathcal{V}(a, x^1)\psi = (\lambda + a^{-p})\psi, \quad \Delta = \Delta_{x^1}. \tag{5.6}$$

Проводя здесь замену переменной

$$x^1 = by, \quad b = a^\tau, \quad \tau = (p+1)(q+2)^{-1},$$

и вводя новую функцию $\Psi(y) = \psi(x^1)$, получим, что

$$-2^{-1}\Delta\Psi + U(b, y)\Psi = \Lambda\Psi, \quad \Delta = \Delta_y,$$

где

$$\begin{aligned}&\Lambda = a^{2\tau}(\lambda + a^{-p}), \quad \beta = 1 - \tau q, \quad \theta = (1+\delta)\tau, \\ &U(b, y) = p\phi(\omega)|y|^q + \mathcal{U}(b, y), \quad \omega = y|y|^{-1},\end{aligned} \tag{5.7}$$

и

$$\mathcal{U}(b, y) = pb^{-q}\widetilde{v}(by)\zeta(b^{-\delta}|y|) - \zeta(b^{-\delta}|y|)\sum_{k=1}^{N-2} c_{k+1}a^{-\beta k}v_b^{k+1}(y), \tag{5.8}$$

$v_b(y) = b^{-q}v(by)$. Отметим, что $\beta > 0$, если $pq < 2$.

Лемма 5.3. *Пусть выполняется условие 5.2, и пусть функция $\mathcal{U}(b,y)$ определяется формулой (5.8), где $\beta > 0$ и параметр δ достаточно мал. Тогда для некоторого $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$*

$$|\partial^\kappa \mathcal{U}(b,y)/\partial b^\kappa| \le C b^{-\epsilon-\kappa}, \quad \kappa = 0,1,...,\nu. \tag{5.9}$$

Доказательство. Если $b|y| \le 1$, то $|\mathcal{U}(b,y)| \le C b^{-q}$, потому что функции v и $\widetilde{v}$ локально ограничены. Пусть $b|y| \ge 1$. В силу (5.2) и условия $\zeta(b^{-\delta}|y|) = 0$ для $|y| \ge 2b^\delta$

$$|b^{-q}\widetilde{v}(by)\zeta(b^{-\delta}|y|)| \le C_1 b^{-\varepsilon}|y|^{q-\varepsilon}\zeta(b^{-\delta}|y|) \le C b^{-\varepsilon+(q-\varepsilon)\delta}.$$

Это выражение не превосходит $b^{-\epsilon_0}$, где $\epsilon_0 = \varepsilon - (q-\varepsilon)\delta > 0$ для достаточно малых δ. Аналогичным образом, функции

$$a^{-\beta k}\zeta(b^{-\delta}|y|)v_b^{k+1}(y), \quad k = 1,...,N-2,$$

не превосходят $b^{-\sigma_k}$, где $\sigma_k = (\beta\tau^{-1} - \delta q)k - \delta q \ge \beta\tau^{-1} - 2\delta q =: \epsilon_1 > 0$ при условии $2\delta q < \beta\tau^{-1}$.

Для оценки производных всех этих функций заметим, что

$$|\partial(b^{-q}\widetilde{v}(by))/\partial b| = |\partial(b^{-q}v(by))/\partial b|$$

и по условию 5.2

$$\begin{aligned} &|\partial(b^{-q}v(by))/\partial b| \le C b^{-1-q}, && \text{если } b|y| \le 1, \\ &|\partial(b^{-q}\widetilde{v}(by))/\partial b| \le C b^{-1-\varepsilon}|y|^{q-\varepsilon}, && \text{если } b|y| \ge 1. \end{aligned}$$

Это дает (5.9) для $\beta = 1$, потому что из-за функции $\zeta(b^{-\delta}|y|)$ можно считать, что $|y| \le 2b^\delta$. Производные высшего порядка могут быть оценены совершенно аналогично. •

Пусть Λ_0 и Ψ_0 собственное значение и нормированная собственная функция оператора

$$K_0 = -2^{-1}\Delta + U_0(y), \quad \text{где } U_0(y) = p\phi(\omega)|y|^q,\ \omega = y|y|^{-1}. \tag{5.10}$$

Разумеется, Ψ_0 удовлетворяет (см., например, [6]) условию (4.2). Наложим дополнительно

Условие 5.4. *Либо собственное значение* Λ_0 *является простым, либо потенциал* v *сферически симметричен. Во втором случае мы предполагаем, что* $\Psi_0(y) = \widetilde{\Psi}_0(|y|)Y_l(\omega)$, *где* $Y_l(\omega), l = 0, 1, 2, \ldots$ — *некоторая сферическая функция.*

Заметим, что в случае $v(y) = v(|y|)$ потенциал (5.8) тоже сферически симметричен. Поэтому подпространство функций, допускающих факторизацию $\Psi(y) = \widetilde{\Psi}(|y|)Y_l(\omega)$, инвариантно относительно всех операторов $K(b) = K_0 + \mathcal{U}(b)$. Собственное значение Λ_0 является простым для сужения K_0 на это подпространство. Согласно лемме 5.3, отсюда следует, что при условии 5.4 предложение 4.3 может быть применено к паре операторов K_0 и $K(b)$.

Обозначим через $\Lambda(b)$ собственное значение оператора $K(b)$, сходящееся к Λ_0, и через $\Psi(b, y)$ соответствующую собственную функцию (4.4). Определим теперь приближенную собственную функцию $\psi(x_1, x^1)$ оператора (1.6) соотношением

$$\psi(x_1, x^1) = b^{-d^1/2}\Psi(b, b^{-1}x^1), \quad b = a^\tau(x_1). \tag{5.11}$$

Представление (5.11) имеет такую же структуру как (3.16). Учитывая предложение 4.3, мы видим, что для функций (5.11) выполняются все условия леммы 3.1. Более того, $\sigma = s\tau < 1/2$ при втором условии (5.3). Согласно (5.7), функция (5.11) удовлетворяет уравнению (5.6), где

$$\lambda(x_1) = -a^{-p} + \Lambda(a^\tau)a^{-2\tau}, \quad 2\tau > p. \tag{5.12}$$

Согласно условию 5.1 и оценкам (4.8), эта функция удовлетворяет (3.8). Таким образом, верна

Лемма 5.5. *Пусть выполняются условия* 5.1, 5.2, 5.4 *и неравенства* (5.3). *Тогда „собственные функции"* (5.11) *удовлетворяют условиям* (3.6) *и* (3.9)–(3.15). *„Потенциал"* (5.12) *удовлетворяет (как функция* x_1*) условиям* (3.8).

Остается установить малость поправочного члена, отвечающего (5.11), (5.12).

Лемма 5.6. *Предположим дополнительно к условиям леммы* 5.5, *что число* N *в* (5.4) *удовлетворяет* $N > (s^{-1} - p)\beta^{-1}$. *Определим функцию* $Y(x_1, x^1)$ *равенством* (3.5). *Тогда выполняется условие* (3.7).

Доказательство. Сравнивая уравнения (3.5) и (5.6), найдем, что

$$Y = (V - \mathcal{V} + a^{-p})\psi.$$

Поэтому, согласно (5.1) и (5.5), функция $Y(x_1, x^1)$ равняется

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad Y_j(x_1, x^1) = y_j(a(x_1), x^1)\psi(x_1, x^1),$$

где

$$y_1(a, x^1) = -(v(x^1) + a)^{-p} + a^{-p} \sum_{k=0}^{N-1} c_k (a^{-1} v(x^1))^k,$$

$$y_2(a, x^1) = -a^{-p} \sum_{k=2}^{N-1} c_k (a^{-1} v(x^1))^k (1 - \zeta(a^{-\theta} x^1)),$$

$$y_3(a, x^1) = pa^{-p-1} \widetilde{v}(x^1)(1 - \zeta(a^{-\theta} x^1)).$$

В силу (5.4) функция $y_1(a, x^1)$ ограничена величиной $Ca^{-p-N}(1 + |x^1|)^{Nq}$. Используя (5.11) и заменяя в интеграле x^1 на bx^1, найдем, что

$$\|Y_1(x_1, \cdot)\|^2_{L_2(X^1)} \le Ca^{-2p-2N} b^{2Nq} \int (1 + |x^1|)^{2Nq} |\Psi(b, x^1)|^2 dx^1.$$

Теперь оценка (4.6) показывает, что $\|Y_1(x_1, \cdot)\|_{L_2(X^1)}$ не превосходит $Ca^{-p-N\beta} = O(|x_1|^{-1-\varepsilon})$, если $s(p + N\beta) > 1$. Так как $y_2(a, x^1) = 0$ для $|x^1| \le a^\theta = b^{1+\delta}$, то

$$\|Y_2(x_1, \cdot)\|^2_{L_2(X^1)} \le C \sum_{k=2}^{N-1} a^{-2p-2k} b^{2kq} \int\limits_{|x^1| \ge b^\delta} |x^1|^{2kq} |\Psi(b, x^1)|^2 dx^1.$$

Учитывая (4.6), мы видим, что правая часть убывает быстрее любой степени $|x_1|^{-1}$ при $|x_1| \to \infty$. Норма $Y_3(x_1, \cdot)$ может быть оценена точно так же. •

Таким образом, функции $\psi(x_1, x^1)$, $\lambda(x_1)$ и $Y(x_1, x^1)$ удовлетворяют всем условиям предложения 3.2, и теорема 3.3 обеспечивает существование волнового оператора (3.4). Используя неравенство (5.9) (для $\kappa = 0$) и предложение 3.4, заменим функцию (5.11) в определении (3.3) на более простую:

$$\psi(x_1, x^1) = a^{-\tau d^1/2} \Psi_0(a^{-\tau} x^1), \quad a = a(x_1), \quad \tau = (p+1)(q+2)^{-1}. \tag{5.13}$$

Ортогональность каналов, отвечающих волновым операторам (3.4) и (2.13), является следствием теоремы 3.5. Сформулируем теперь полученный результат.

Теорема 5.7. *Пусть потенциал V определяется формулой* (5.1), *где a и v удовлетворяют соответственно условиям* 5.1 *и* 5.2. *Предположим, что выполняются неравенства* (5.3). *Пусть Λ_0 собственное число, а Ψ_0 соответствующая собственная функция оператора* (5.10). *Пусть выполняется также условие* 5.4. *Определим „потенциал“ $\lambda(x_1)$ и функцию $\psi(x_1, x^1)$ соответственно равенствами* (5.12) *и* (5.13) *и положим $\mathfrak{F} = \Gamma\lambda$. Тогда существует волновой оператор* (3.4). *Он изометричен и $H\mathcal{W} = \mathcal{W}\mathrm{X}_1$. Образ $\mathcal{W}$ ортогонален образу W, если волновой оператор* (2.13) *существует.*

Существование волнового оператора (3.4) показывает, что W теряет полноту. Подчеркнем, что для потенциалов (5.1) существует счетный набор волновых операторов $\mathcal{W}_n$, отвечающих каждому собственному числу Λ_n оператора (5.10). Образы этих операторов, очевидно, ортогональны друг другу, если собственные функции Ψ_n выбраны ортогональными.

Обсудим, наконец, пример (1.9). Этот потенциал имеет вид (5.1) и удовлетворяет условиям 5.1 и 5.2, где $s = q$ и $p = \rho/q$. В случае $s = q$ условия (5.3) сводятся к неравенству $q(2p+1) < 2$. Таким образом, условия (5.3) выполняются при $q < 2(1-\rho)$. При этом предположении волновые операторы $\mathcal{W}_n$ существуют. Меняя ролями переменные x^1 и x_1, построим также волновые операторы $\mathcal{W}^m$. В силу соотношения (3.36) образы операторов $\mathcal{W}_n$ и $\mathcal{W}^m$ ортогональны друг другу.

В случае (1.9) волновой оператор W существует для произвольных $\rho > 0$, $q > 0$. Он будет полным, если либо $\rho > 1$ (V быстро убывает), либо $q \geq 2$ (так что оценка (1.3) верна для $|\kappa| \leq 2$). Напротив, W теряет полноту, если $\rho \in (0,1)$, $q < 2(1-\rho)$. Можно предположить, что W будет полным также при $\rho \in (0,1)$, $q \in (2(1-\rho), 2)$, но это утверждение, по-видимому, не вытекает из известных результатов.

В действительности, рассмотрение примера (1.9) ненамного проще доказательства теоремы 5.7. С другой стороны, при дополнительном условии $q > 1-\rho$ мы можем (подробности см. в [7]) прямо определить $\psi(x_1, x^1)$ равенством (5.13) и избежать изучения семейства (5.11).

§6. Обобщения

Класс потенциалов (5.1) может быть расширен в различных направлениях. Так, наше построение применимо, если представление (5.1) выполняется только в некоторой области $\mathbb{R}^d$. Как и в разделе 5, мы предполагаем здесь, что функции a и v удовлетворяют условиям 5.1, 5.2 и 5.4. Мы предполагаем также, что выполняются неравенства (5.3).

В действительности, для существования волнового оператора $\mathcal{W}$ достаточно предположить справедливость условия (5.1) только для больших $|x_1|$ и для

$|x^1| \leq |x_1|^\gamma$, где γ — любое число, большее чем $s(p+1)(q+2)^{-1}$. Потенциал $V(x_1, x^1)$ может быть произвольной (например, ограниченной) функцией на любом множестве $G_1 \times X^1$, где $G_1 \subset X_1$ компактно, а также в области $|x^1| \geq |x_1|^\gamma$. Первое из этих замечаний очевидно. Поясним второе. Мы опять определяем функции $\psi(x_1, x^1)$ и $\lambda(x_1)$ соответственно равенствами (5.11) и (5.12). По сравнению с доказательством теоремы 5.7 мы должны дополнительно оценить только норму „ошибки“ $Y(x_1, x^1)$ в области $|x^1| \geq |x_1|^\gamma$. Она убывает быстрее любой степени $|x_1|^{-1}$, так как (ср. с доказательством леммы 5.6) аргумент $b^{-1}x^1$ функции (5.11) ограничен снизу величиной $c|x_1|^{\gamma-\tau s}$, $c > 0$, и $\gamma - \tau s > 0$ при нашем условии на γ.

Если мы предположим (5.1) только в некотором конусе $K_1 \subset X_1$, то предел (3.4) существует на множестве функций $L_2(K_1)$. Это вытекает из замечаний в конце разделов 2 и 3.

Наша конструкция применима также к неотрицательному V, когда соответствующий оператор (1.6) вообще *не имеет* собственных значений. Предположим, например, что

$$V(x_1, x^1) = (a(x_1) - v(x^1))^{-p}, \quad p > 0,$$

в области $|x^1| \leq |x_1|^\gamma$ для некоторого $\gamma > s(p+1)(q+2)^{-1}$. Мы требуем также, что $\gamma < sq^{-1}$ с тем чтобы $a(x_1) \geq v(x^1)$. Тогда выполняются все заключения теоремы 5.7. Соответствующая функция $\psi(x_1, x^1)$ определяется опять равенством (5.13), где Ψ_0 — собственная функция оператора (5.10). Единственное отличие состоит в том, что собственное число $\lambda(x_1)$ дается формулой

$$\lambda(x_1) = a^{-p} + \tilde{\Lambda}(b)a^{-2\tau}, \quad b = a^\tau,$$

где $\tilde{\Lambda}(b)$ — собственное число оператора $\widetilde{K}(b) = K_0 + \widetilde{\mathcal{U}}(b)$. Функция $\widetilde{\mathcal{U}}(b)$ определяется формулой (5.8), но c_k, $k \geq 2$, теперь коэффициенты в разложении Тейлора функции $-(1-x)^{-p}$ в точке $x = 0$.

Разумеется, различные замечания этого раздела могут быть скомбинированы друг с другом.

Список литературы

[1] Хермандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 4, Мир, М., 1988.

[2] Yafaev D. R., *On the break-down of completeness of wave operators in potential scattering*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), 167–179.

[3] Яфаев Д. Р., *Волновые операторы для уравнения Шрёдингера*, Теор. и мат. физ. **45** (1980), № 2, 224–234.

[4] Dollard D., *Asymptotic convergence and Coulomb interaction*, J. Math. Phys. **5** (1964), 723–738.
[5] Буслаев В. С., Матвеев В. Б., *Волновые операторы для уравнения Шрёдингера с медленно убывающим потенциалом*, Теор. и мат. физ. **2** (1970), № 3, 367–376.
[6] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, т. 4, Мир, М., 1982.
[7] Yafaev D. R., *New channels in three-body long-range scattering*, Seminaire „Equations aux Dérivées Partielles. 1993–1994“, Centre Math. Ecole Polytechnique, Paris, 1994, Exposé no. 14.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанки, 27

Université Rennes-1

Поступило 13 сентября 1995 г.