Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка,
Алгебра и анализ, 2000, том 12, выпуск 6, 98–139

https://www.mathnet.ru/aa1131

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 6

О ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Г. И. Бижанова, В. А. Солонников

§1. Введение

Данная работа является продолжением статьи [10] и посвящена исследованию локальной по времени разрешимости двух классических задач со свободными границами для параболических уравнений: двухфазных задач Стефана и Маскета–Веригина. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — ограниченная область с границей S, разделенная поверхностью Γ на две подобласти Ω_1 и Ω_2 так, что $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup S$ и $\partial\Omega_2 = \Gamma$, причем $\Gamma \cap S = \varnothing$. Пусть $n_0(x)$ — единичная нормаль к Γ, направленная в Ω_1. Двухфазная задача Стефана состоит в определении однопараметрического семейства поверхностей $\gamma(t)$, таких, что $\gamma(t) \to \Gamma$ при $t \to 0$ и функций $u_i(x,t)$, $x \in \Omega_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих следующим соотношениям

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_i}{\partial t} - a_i \Delta u_i = 0 \text{ в } Q_T^{(i)} = \{(x,t) \mid x \in \Omega_i(t), 0 < t < T\}, \quad i = 1, 2, \\
u_i\big|_{t=0} = u_{0i}(x), \;\; x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \qquad \gamma(t)\big|_{t=0} = \Gamma, \\
u_1\big|_{S_T} = b(x,t), \qquad u_1 = u_2 = 0, \quad x \in \gamma(t), \\
V_n = -c_0\left(\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \equiv -c_0\left[\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\right], \quad x \in \gamma(t), \;\; 0 < t < T.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ — области, ограниченные соответственно поверхностями $\gamma(t) \cup S$ и $\gamma(t)$, a_1, a_2, λ_1, λ_2, c_0 — положительные постоянные, n — единичная нормаль к $\gamma(t)$, направленная в сторону $\Omega_1(t)$, $S_T = S \times (0,T)$ и V_n — скорость

Работа была выполнена при частичной поддержке гранта INTAS 94-2187, а также гранта В. А. Солонникова PRAXIS XXI/2/21 MST/125/94 и гранта Г. И. Бижановой NATO Scientific Programme, 1999.

эволюции $\gamma(t)$ в направлении n. В задаче Маскета–Веригина требуется найти $\gamma(t)$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ по условиям

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial t} - a_i \Delta u_i = 0 \text{ в } Q_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \\ u_i\big|_{t=0} = u_{0i}(x), \ x \in \Omega_i, \quad i = 1,2, \qquad \gamma(t)\big|_{t=0} = \Gamma, \\ u_1\big|_{S_T} = b(x,t), \quad [u]\big|_{\gamma(t)} = u_1 - u_2\big|_{\gamma(t)} = 0, \\ \left[\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\right]\bigg|_{\gamma(t)} = 0, \ V_n = -c_0 \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_{\gamma(t)}, \quad 0 < t < T.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Целью работы является дать полное доказательство классической разрешимости этих задач, которые мы назовем задачами I и II для областей Ω_i с $C^{2+\alpha}$-гладкими границами S и Γ произвольной формы с минимальным порядком согласования начальных данных $u_{0i}(x)$ с краевыми условиями. Решения, которые мы получаем, обладают максимальной гладкостью, т.е. они являются по меньшей мере столь же гладкими в любой момент времени $t > 0$, что и в начальный момент $t = 0$. Это достигается внесением значительных изменений технического характера в метод Е. Ханзавы [12] (который теперь является общепринятым при исследовании задач со свободными границами) и привлечением весовых пространств Гельдера, введенных В. С. Белоносовым и Т. И. Зеленяком [3].

Дадим определение этих пространств [3, 21].

Пусть ℓ — положительное нецелое число, $s \leqslant \ell$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Через $C_s^\ell(Q_T)$ будем обозначать пространство функций, определенных в Q_T и имеющих конечную норму

$$\begin{aligned}|u|_{s,Q_T}^{(\ell)} &= \sum_{s<2k+|j|<\ell} \sup_{t<T} t^{\frac{2k+|j|-s}{2}} |\mathcal{D}_t^k \mathcal{D}_x^j u(x,t)|_{Q_t'} \\ &\quad + \sup_{t<T} t^{\frac{\ell-s}{2}} [u]_{Q_t'}^{(\ell)} + \begin{cases} |u|_{Q_T}^{(s)}, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

где $Q_t' = \Omega \times (\frac{t}{2}, t)$,

$$|u|_{Q_T}^{(s)} = \sum_{0 \leqslant 2k+|j| \leqslant s} |\mathcal{D}_t^k \mathcal{D}_x^j u(x,t)|_{Q_T} + \begin{cases} [u]_{Q_T}^{(s)}, & \text{если } s \text{ — нецелое число}, \\ 0, & \text{если } s \text{ — целое число}, \end{cases}$$

$$|v|_{Q_T} = \sup_{\overline{Q}_T} |v(x,t)|,$$

$$\begin{aligned}[u]_{Q_T}^{(s)} &= \sum_{|j|=[s]} \sup_{(x,t),(y,t) \in \overline{Q}_T} \big|\mathcal{D}_x^j u(x,t) - \mathcal{D}_y^j u(y,t)\big| |x-y|^{[s]-s} \\ &\quad + \sup_{(x,t),(x,t_1) \in \overline{Q}_T} \big|\mathcal{D}_t^{[\frac{s}{2}]} u(x,t) - \mathcal{D}_{t_1}^{[\frac{s}{2}]} u(x,t_1)\big| |t-t_1|^{[\frac{s}{2}]-\frac{s}{2}}.\end{aligned}$$

Отметим, что имеется много других эквивалентных норм в анизотропных пространствах Гёльдера $C^{s,s/2}(\overline{Q_T})$ [13].

При $s = \ell$ пространство $C^{\ell,\ell/2}(Q_T)$ совпадает с обычным пространством Гёльдера $C^{\ell,\ell/2}(\overline{Q}_T)$. Стандартным способом (с помощью разбиения единицы и локальных отображений) определяются пространства $C^{\ell}_{s}(\Gamma_T)$ на $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$ и в нецилиндрических областях.

$\mathring{C}^{\ell}_{s}(Q_T)$, $s \geqslant 0$, определяется как пространство функций из $C^{\ell}_{s}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\mathcal{D}^k_t u\big|_{t=0} = 0$, $k \leqslant [s]$, при $s < 0$ полагается $\mathring{C}^{\ell}_{s}(Q_T) = C^{\ell}_{s}(Q_T)$. В этом пространстве норме $|u|^{(\ell)}_{s,Q_T}$ эквивалентна норма

$$\|u\|^{(\ell)}_{s,Q_T} = \sup_{t<T} t^{(\ell-s)/2}[u]^{(\ell)}_{Q'_t} + \sup_{Q_T} t^{-s/2}|u(x,t)|. \tag{1.3}$$

Под условиями согласования нулевого и первого порядков понимаются следующие условия

$$u_{0i}(x)\big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1,2, \qquad u_{01}(x)\big|_{S} = b(x,0), \tag{1.4}$$

$$\left(a\Delta u_{0i} - c_0 \frac{\partial u_{0i}}{\partial n_0}\left[\lambda \frac{\partial u_0}{\partial n_0}\right]\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1,2, \tag{1.5}$$

$$b_t(x,0) - a_1\Delta u_{01}(x)\big|_{S} = 0$$

в задаче I и

$$[u_0(x)]\big|_{\Gamma} = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial u_0}{\partial n_0}\right]\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad u_{01}(x,0)\big|_{S} = b(x,0), \tag{1.6}$$

$$\left([a\Delta u_0] - c_0\lambda_1 \frac{\partial u_{01}}{\partial n_0}\left[\frac{\partial u_0}{\partial n_0}\right]\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{1.7}$$

$$b_t(x,0) - a_1\Delta u_{01}(x)\big|_{S} = 0,$$

в задаче II. Уравнения (1.5) получаются в результате дифференцирования условий $u_i\big|_{\gamma(t)} = 0$ по t:

$$0 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla u_i \frac{\partial x}{\partial t}\right)\Big|_{\gamma(t)} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + V_n \frac{\partial u_i}{\partial n}\right)\Big|_{\gamma(t)} = \left(a_i\Delta u_i - c_0 \frac{\partial u_i}{\partial n}\left[\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\right]\right)\Big|_{\gamma(t)}.$$

Условие (1.7) выводится аналогично после дифференцирования $[u]|_{\gamma(t)} = 0$. Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1.1. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $s \in (1, 2+\alpha]$, $S, \Gamma \in C^{2+\alpha}$. *Тогда при любых* $b \in C_s^{2+\alpha}(S_T)$, $u_{0i} \in C^s(\Omega_i)$, $i = 1,2$, *удовлетворяющих условиям согласования порядка* $[s/2]$ *и условию*

$$\left.\frac{\partial u_{0i}}{\partial n}\right|_{\Gamma} \geqslant d_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{1.8}$$

задача I имеет единственное решение $(\gamma(t),\ u_i(x,t),\ x \in \Omega_i(t),\ i = 1,2)$, *определенное на некотором конечном интервале времени* $(0, T_0)$ *и обладающее следующими свойствами: свободная граница* $\gamma(t)$ *задается уравнением*

$$x = \xi + \rho(\xi, t) N(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \tag{1.9}$$

где $N \in C^\infty(\Gamma)$, $N \cdot n \geqslant d_1 = \mathrm{const} > 0$, $\rho \in C_s^{2+\alpha}(\Gamma_{T_0})$, $\rho_t \in C_{s-1}^{1+\alpha}(\Gamma_{T_0})$, $u_i \in C_s^{2+\alpha}(Q_{T_0}^{(i)})$, $i = 1,2$; *функции* u_i *и* ρ *удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2} |u_i|_{s,Q_t^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{s,\Gamma_t}^{(2+\alpha)} + |\rho_t|_{s-1,\Gamma_t}^{(1+\alpha)} \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{2} |u_{0i}|_{\Omega_i}^{(s)} + |b|_{s,S_t}^{(2+\alpha)} \right), \quad t \leqslant T_0. \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $s \in (1, 2+\alpha]$, $S, \Gamma \in C^{2+\alpha}$. *Тогда при любых* $b \in C_s^{2+\alpha}(S_T)$, $u_{0i} \in C^s(\Omega_i)$, $i = 1,2$, *удовлетворяющих условиям согласования порядка* $[\frac{s}{2}]$ *и условиям*

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial n} - \frac{\partial u_{02}}{\partial n} \geqslant d_2 = \mathrm{const} > 0, \tag{1.11}$$

$$|\lambda_1 - \lambda_2||\nabla_\Gamma u_{01}| \leqslant \theta d_2 \ (\textit{или}\ |[\lambda \nabla u_0]| \leqslant \theta d_2) \tag{1.12}$$

с достаточно малым $\theta > 0$, *существует единственное решение* $(\gamma(t),\ u_i(x,t),\ x \in \Omega_i(t),\ i = 1,2)$ *задачи* II, *определенное на некотором конечном интервале времени* $(0, T_0)$ *и обладающее следующими свойствами: свободная граница* $\gamma(t)$ *задается уравнением* (1.9) *с* $\rho \in C_s^{2+\alpha}(\Gamma_{T_0})$, $\rho_t \in C_{s-1}^{1+\alpha}(\Gamma_{T_0})$, $u_i \in C_s^{2+\alpha}(Q_{T_0}^{(i)})$, $i = 1,2$, *и функции* $u_i \rho$ *удовлетворяют неравенству* (1.10).

В частности, в случае $s = 2 + \alpha$ теоремы 1.1 и 1.2 гарантируют разрешимость задач I и II в обычных анизотропных пространствах Гёльдера: $\rho \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Gamma_{T_0})$, $\rho_t \in C^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\Gamma_{T_0})$, $u_i \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_{T_0}^{(i)})$, $i = 1,2$.

Бóльшая часть теорем существования для многомерных параболических задач со свободными границами имеет локальный по времени характер (за исключением хорошо известных результатов Л. Каффарелли, Д. Киндерлерера и Л. Ниренберга по однофазной задаче Стефана и работы [11]). Первое доказательство классической разрешимости двухфазной задачи Стефана на конечном интервале времени принадлежит А. М. Мейрманову [14, 15]. Новые подходы к задаче Стефана и ее обобщениям были предложены в работах Е. Ханзавы [12], Б. В. Базалия [1], Б. В. Базалия и С. П. Дегтярева [2]. В этих работах почти всегда (за исключением [1]) имеется зазор между гладкостью решения в начальный и последующий моменты времени, или же накладываются ограничения на форму свободной границы. Г. И. Бижанова [6, 8] рассмотрела задачи Стефана и Флорина в обычных и весовых гёльдеровских пространствах и получила результаты, оптимальные в отношении регулярности решения для случая звездной Ω_2.

Задача Маскета–Веригина была предложена М. Маскетом [16] и Н. Н. Веригиным [23] для описания процесса вытеснения нефти водой в пористых средах. В многомерном случае она была рассмотрена Е. В. Радкевичем [17] в рамках его общей теории параболических задач со свободными границами, сводящихся к псевдодифференциальному уравнению на границе с символом $s + \phi(\xi, s)$, где ϕ — функция, удовлетворяющая условиям, приведенным ниже в §3. В частности, Е. В. Радкевич нашел условия (1.11), (1.12), являющиеся достаточными для разрешимости задачи Маскета–Веригина. Однако его доказательство теоремы существования, в частности, анализ упомянутого выше псевдодифференциального уравнения, не было свободно от погрешностей. Позже был предложен другой метод оценки решения этого уравнения, основанный на теореме о мультипликаторах в интегралах Фурье [22]. Этот подход был использован в [18].

По нашему мнению, все еще не существует четкого доказательства разрешимости задачи Маскета–Веригина, поэтому мы уделяем этой проблеме основное внимание. Хотя мы не приводим подробного доказательства двухфазной задачи Стефана, ясно, что наши рассуждения к ней полностью применимы и позволяют избавиться от ограничений на форму свободной границы, наложенных в [6, 8] и в других работах.

Работа написана по следующему плану. В §2 мы сводим задачи I и II к нелинейным задачам в фиксированных областях, пользуясь идеями А. М. Мейрманова и Е. Ханзавы. При этом мы удаляем из метода Е. Ханзавы такие источники потери гладкости решения как задание свободной границы уравнением (1.9) с $N = n$ и основное преобразование неизвестных функций, которое в нашем случае имело бы вид $W_i = V_i - (n \cdot J_0^{-T} \nabla U_{0i}) r^*$ (см. §2). §3 посвящен модельной задаче в полупространстве, которая имеет более общую форму, чем это необходимо для изучения задач I и II. Мы ставили себе целью получить оценки решения вышеупомянутого псевдодифференциального уравнения при максимально общих предположениях о функции ϕ, и полученные результаты приложимы к весьма широкому кругу задач, сводящихся к этому уравнению. Постоянные в наших оценках решений модельных задач не зависят от величины интервала времени, на котором ведется рассмотрение. Это может быть важным при изучении задач, зависящих от параметра, как, например, в [19]. В §4 рассматриваются линеаризованные задачи I и II, что позволяет доказать разрешимость нелинейных задач в §5 с помощью принципа сжатых отображений.

Мы используем следующие обозначения векторных полей и матриц. Векторы-строки и векторы-столбцы не различаются, скалярное произведение двух векторов обозначается точкой: $f \cdot g = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k$ (в основном мы имеем дело с вещественными векторными полями). Если $A = (a_{km})_{k,m=1,\ldots,n}$, то, как обычно, $Af = (\sum_{m=1}^{n} a_{km} f_m)_{k=1,\ldots,n}$. Под AB понимается произведение двух матриц, под A^T — транспонированная матрица, $A^{-T} = (A^{-1})^T$. Матрица, элементы которой являются производными компонент некоторого векторного поля (например, $N(x)$), обозначается через $\nabla \otimes N$:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \nabla \otimes N = \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_k}\right)_{k,m=1,\ldots,n}.$$

§2. Сведение задач I и II к задачам в цилиндрических областях

2.1. Преобразование координат. Сведем задачи I и II к задачам, в фиксированных областях, следуя идеям Е. Ханзавы [2].

Пусть $N(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, — гладкое единичное векторное поле, заданное на Γ и удовлетворяющее условию

$$N(\xi) \cdot n_0(\xi) \geqslant d > 0, \quad \xi \in \Gamma. \tag{2.1}$$

В качестве $N(\xi)$ можно, например, взять

$$N(\xi) = \sum_k \frac{n_0(\xi_k)\zeta_k(\xi)}{\left|\sum_j n_0(\xi_j)\zeta_j(\xi)\right|},$$

где $\{\zeta_k(x)\}$ — „разбиение единицы“, подчиненное покрытию Γ шарами $\gamma_k = \{|\xi - \xi_k| < \delta\}$, $\xi_k \in \Gamma$, с достаточно малым $\delta > 0$.

Покажем, что множество

$$\mathcal{N} = \{\xi + N(\xi)\lambda, \ |\lambda| < \lambda_0, \ \xi \in \Gamma\} \tag{2.2}$$

содержит некоторую двухстороннюю окрестность Γ. В окрестности $B_d(\xi_0) = \{\xi \in \Gamma_0 : |\xi - \xi_0| < d_0\}$, где ξ_0 — произвольная фиксированная точка на Γ и $d_0 > 0$ — достаточно мало, можно ввести локальные координаты $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = \omega$, например, декартовы координаты на касательной плоскости к Γ в точке ξ_0, и задать Γ параметрически: $\xi = \xi(\omega)$, где $\xi \in C^{2+\alpha}(K_{d_0})$, $K_{d_0} := \{|\omega| < d_0\}$. Будем предполагать, что $\xi(0) = \xi_0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\xi(\omega) + N(\xi(\omega))\lambda = x, \tag{2.3}$$

где x — точка, близкая к ξ_0. Очевидно, система (2.3) удовлетворяется при $\omega = 0$, $\lambda = 0$. Матрица Якоби

$$\frac{\partial x}{\partial(\omega,\lambda)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial N_1}{\partial \omega_1}\lambda & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \omega_{n-1}} + \frac{\partial N_1}{\partial \omega_{n-1}}\lambda & N_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial \omega_1} + \frac{\partial N_n}{\partial \omega_1}\lambda & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \omega_{n-1}} + \frac{\partial N_n}{\partial \omega_{n-1}}\lambda & N_n \end{pmatrix}$$

обратима при $\lambda = 0$, т.к. вектора $\{\frac{\partial \xi}{\partial \omega_j}\}_{j=1,\dots,n-1}$ линейно независимы и лежат в касательной плоскости к Γ в точке $\xi(\omega)$, а N имеет положительную нормальную компоненту. Следовательно, существуют функции $\omega_j(x)$, $j = 1,\dots,n-1$, и $\lambda(x)$ класса $C^{2+\alpha}$, определенные в окрестности $|\xi_0 - x| < \lambda_0$ точки ξ_0, причем λ_0 не зависит от ξ_0, и удовлетворяющие (2.3). Функции $\xi(x) = \xi(\omega(x)) \in C^{2+\alpha}(\mathcal{N})$ независимы от выбора локальных координат (имеет место

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \xi}{\partial \omega'_j}\frac{\partial \omega'_j}{\partial x_i} = \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial \xi}{\partial \omega'_j}\frac{\partial f}{\partial \omega_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \xi}{\partial \omega_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i},$$

если $(\omega'_1,\dots,\omega'_{n-1}) = \omega' = f(\omega)$ другие локальные координаты, $\omega'(x) = f(\omega(x))$ и $\xi'(x) = \xi(\omega'(x))$). Всякую функцию $v(x)$, $x \in \mathcal{N}$, можно рассматривать как функцию ξ и λ.

Можно ожидать, что при достаточно малых t поверхность $\gamma(t)$ будет содержаться в $\mathfrak{N}$, и она может быть задана уравнением $\lambda = \rho(\xi,t)$, или, что то же самое,

$$\gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \xi + N(\xi)\rho(\xi,t),\ \xi \in \Gamma\}. \tag{2.4}$$

Определим для всякой функции $r \in C_s^{2+\alpha}(\Gamma_T)$ ее продолжение $r^* = Pr$ в Ω такое, что

$$r^* \in C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T), \quad r^*\big|_\Gamma = r, \quad r^*\big|_S = 0, \quad \frac{\partial r^*}{\partial n_0}\Big|_\Gamma = 0$$

и

$$|r^*|_{C_s^{2+\alpha}(\Omega_T)} \leqslant c|r|_{C_s^{2+\alpha}(\Gamma_T)},$$

где $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

Это можно сделать следующим образом: сначала построить r^* в $\Omega_1 \times (0,T)$, а затем продолжить ее в $\Omega_2 \times (0,T)$ с сохранением класса. Обе эти операции являются стандартными в теории функций (о продолжении функций из весовых классов Гёльдера [8, 21]).

Продолжим N с Γ в область $\mathfrak{N}$ по формуле $N(x) = N(\xi(x))$ и затем в Ω_1 и Ω_2 произвольным образом с сохранением класса, т.е. так, что $N \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Определим теперь преобразование координат $e_\rho : \Omega_i \to \Omega_i(t)$ по формуле

$$x = e_\rho(y,t) \equiv y + N(y)\rho^*(y,t), \quad y \in \Omega, \tag{2.5}$$

где $\rho^* = P\rho$, $\rho(y,t)$ — та же самая функция, что в (2.4). Если ρ^* и $\nabla\rho^*$ малы, то это обратимое преобразование, отображающее Γ в $\gamma(t)$ и Ω_i в $\Omega_i(t)$, $i = 1,2$. Элементы его матрицы Якоби $J = \{J_{km}\}_{1\leqslant k,m\leqslant n}$ имеют вид

$$J_{km} = \delta_{km} + \frac{\partial}{\partial y_m} N_k \rho^* = \delta_{km} + N_k \frac{\partial \rho^*}{\partial y_m} + \frac{\partial N_k}{\partial y_m}\rho^*, \tag{2.6}$$

через J^{km} обозначим элементы обратной матрицы J^{-1}. Преобразование (2.5) переводит градиент $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ в $J^{-T}\nabla_y = (\sum_{k=1}^n J^{km}\frac{\partial}{\partial y_k})_{m=1,\ldots,n}$, а нормаль $n_0(y)$ к Γ и нормаль $n(x,t)$ к $\gamma(t)$ связаны соотношением

$$n = \frac{J^{-T} n_0}{|J^{-T} n_0|}. \tag{2.7}$$

Введем в задачах (1.1), (1.2) новые переменные $y \in \Omega$ по формуле (2.5) и положим

$$U_i(y,t) = u_i(e_\rho(y,t),t), \quad i = 1,2.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\nabla u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_t^* N \cdot J^{-T}\nabla U_i, \tag{2.8}$$

и (1.1), (1.2) могут быть записаны как задачи нахождения функций U_1, U_2,

ρ по условиям

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\rho^{(i)} U_i = 0, \quad (y,t) \in \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2,\\ &U_i\big|_{t=0} = u_{0i}(y), \quad i = 1,2, \qquad \rho\big|_{t=0} = 0\\ &U_1\big|_S = b(y,t), \quad U_i\big|_\Gamma = 0, \quad i = 1,2,\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\rho_t(N \cdot J^{-T} n_0) + c_0 n_0 \cdot \left(\lambda_1 \mathcal{A} \nabla U_1 - \lambda_2 \mathcal{A} \nabla U_2\right)\big|_\Gamma = 0, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\rho^{(i)} U_i = 0, \quad (y,t) \in \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2,\\ &U_i\big|_{t=0} = u_{0i}(y), \quad i = 1,2, \qquad \rho\big|_{t=0} = 0\\ &U_1\big|_S = b(y,t), \quad [U]\big|_\Gamma = 0, \quad \lambda_1 \mathcal{A} \nabla U_1 - \lambda_2 \mathcal{A} \nabla U_2\big|_\Gamma = 0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\rho_t(N \cdot J^{-T} n_0) + c_0 \lambda_1 n_0 \cdot \mathcal{A} \nabla U_1\big|_\Gamma = 0, \tag{2.12}$$

где $\Omega_T^{(i)} = \Omega_i \times (0,T)$, $\mathcal{A} = J^{-1} J^{-T}$ — матрица с элементами

$$A_{mp} = \sum_{k=1}^n J^{mk} J^{pk}, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{L}_\rho^{(i)} U_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} - (N \cdot J^{-T} \nabla U_i)\rho_t^* - a_i \left(\sum_{m,p=1}^n A_{mp} \frac{\partial^2 U_i}{\partial y_m \partial y_p} + \sum_{k,m,p=1}^n J^{mk} \frac{\partial J^{pk}}{\partial y_m} \frac{\partial U_i}{\partial y_p} \right).$$

Здесь мы использовали формулы (2.7), (2.8) и

$$V_n = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot n\big|_{\gamma(t)} = \rho_t (N \cdot J^{-T} n_0)/|J^{-T} n_0|.$$

Заметим, что условия (2.10), (2.12) могут быть записаны в виде

$$\rho_t + c_0 S_\rho \left[\lambda \frac{\partial U}{\partial n_0} \right]\bigg|_\Gamma = 0 \tag{2.14}$$

и

$$\rho_t + c_0 \lambda_1 \frac{\mathcal{A} n_0 \cdot \nabla U_1}{N \cdot J^T n_0}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{2.15}$$

где

$$S_\rho = (N \cdot J^{-T} n_0)^{-1} (n_0 \cdot \mathcal{A} n_0).$$

2.2. Вспомогательные функции ρ_0, U_0. Для каждой из задач I и II построим функции $\rho_0(y,t)$, удовлетворяющие тем же начальным условиям, что и функция $\rho(y,t)$, а именно

$$\begin{aligned} &\rho_0(y,0)=0,\\ &\rho_{0t}(y,t)\big|_{t=0}=-c_0(N\cdot n_0)^{-1}\left[\lambda\frac{\partial u_0}{\partial n_0}\right]\bigg|_{\Gamma} \quad \text{в задаче I},\\ &\rho_{0t}(y,t)\big|_{t=0}=-c_0\lambda_1(N\cdot n_0)^{-1}\frac{\partial u_{10}}{\partial n_0}\bigg|_{\Gamma} \quad \text{в задаче II}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Предположим, что $\rho_0(y,t)$ и $\nabla\rho_0(y,t)$ настолько малы, что $\det J$ и $N\cdot J^{-T}n_0$ строго положительны (что имеет место при малых t) и определим функции U_{01}, U_{02} как решение задач

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{(1)}_{\rho_0}U_{01}=0, \quad (y,t)\in\Omega^{(1)}_T,\\ &U_{01}\big|_{t=0}=u_{01}(y), \quad U_{01}\big|_S=b(y,t), \quad U_{01}\big|_\Gamma=0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{(2)}_{\rho_0}U_{02}=0, \quad (y,t)\in\Omega^{(2)}_T,\\ &U_{02}\big|_{t=0}=u_{02}(y), \quad U_{02}\big|_\Gamma=0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

или

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0}U_{0i}=0, \quad (y,t)\in\Omega^{(i)}_T, \quad i=1,2,\\ &U_{0i}\big|_{t=0}=u_{0i}(y), \quad U_{01}\big|_S=b(y,t),\\ &[U_0]\big|_\Gamma=0, \quad n_0\cdot\left(\lambda_1\mathcal{A}^{(0)}\nabla U_{01}-\lambda_2\mathcal{A}^{(0)}\nabla U_{02}\right)\big|_\Gamma=0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

соответственно, причем $\mathcal{A}^{(0)}=J_0^{-1}J_0^{-T}$, $J_0=J\big|_{\rho=\rho_0}$.

Существование функции ρ_0 с нужными свойствами обеспечивается следующим предложением.

Предложение 2.1. *Пусть $s\in(1,2+\alpha]$. Для любой функции $f_0\in C^{s-1}(\Gamma)$ существует функция $\rho_0\in C^{2+\alpha}_s(\Gamma_T)$ такая, что $\rho_{0t}\big|_\Gamma\in C^{1+\alpha}_{s-1}(\Gamma_T)$, $\rho_0(y,0)=0$, $\rho_{0t}(y,t)\big|_{t=0}=f_0(y)$, и*

$$|\rho_0|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_T}+|\rho_{0t}|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_T}\leqslant c|f_0|^{(s-1)}_\Gamma. \tag{2.20}$$

Доказательство. Продолжим функцию f_0 во все пространство $\mathbb{R}^n$ так, чтобы продолженная функция f_0^* принадлежала классу $C^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, имела компактный носитель и удовлетворяла неравенству

$$|f_0^*|^{(s-1)}_{\mathbb{R}^n}\leqslant c|f_0|^{(s-1)}_\Gamma. \tag{2.21}$$

Теперь определим ρ_1 как решение задачи Коши

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 \rho_1 = 0, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \equiv \mathbb{R}^n_T, \tag{2.22}$$
$$\rho_1\big|_{t=0} = 0, \quad \rho_{1t}\big|_{t=0} = f_0^*(y).$$

Она выражается в виде потенциала

$$\rho_1(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0^*(\eta)\Gamma_1(y-\eta,t)\,d\eta,$$

где $\Gamma_1(y,t)$ — фундаментальное решение уравнения (2.22) и, как показано в [4], подчиняется неравенству

$$|\rho_1|^{(3+\alpha)}_{s+1,\mathbb{R}^n_T} \leqslant c|f_0^*|^{(s-1)}_{\mathbb{R}^n}. \tag{2.23}$$

Очевидно, $\rho_0(y,t) = \rho_1(y,t)\big|_\Gamma$ обладает всеми нужными свойствами. Оценка (2.20) вытекает из (2.23) и (2.21). •

Что касается функций U_{0i}, то они определяются однозначно, причем

$$\sum_{i=1}^2 |U_{0i}|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_T} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^2 |u_{0i}|^{(s)}_{\Omega_i} + |b|^{(2+\alpha)}_{s,S_T}\right). \tag{2.24}$$

Это следует из результатов работ [5, 21].

В задачах (2.9), (2.14) и (2.11), (2.15) произведем замену неизвестных функций

$$V_i = u_i - U_{0i}, \quad i = 1,2, \quad r = \rho - \rho_0.$$

Учитывая (2.17)-(2.19), получим

$$\mathcal{L}^{(i)}_\rho V_i + (\mathcal{L}^{(i)}_\rho - \mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0})U_{0i} = 0 \quad \text{в } \Omega^{(i)}_T, \quad i = 1,2,$$
$$V_i\big|_{t=0} = 0, \quad r\big|_{t=0} = 0,$$
$$V_1\big|_S = 0, \quad V_i\big|_\Gamma = 0, \quad i = 1,2,$$
$$r_t + c_0 S_\rho\left[\lambda\frac{\partial V}{\partial n_0}\right] + c_0(S_\rho - S_{\rho_0})\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial n_0}\right]\bigg|_\Gamma = -\rho_{0t} - c_0 S_{\rho_0}\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial n_0}\right]\bigg|_\Gamma$$

и

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_\rho^{(i)} V_i + (\mathcal{L}_\rho^{(i)} - \mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)}) U_{0i} = 0 \quad \text{в } \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \\
V_i\big|_{t=0} = 0, \quad r\big|_{t=0} = 0, \\
V_1\big|_S = 0, \quad [V]\big|_\Gamma = 0, \\
\sum_{m,p=1}^{n} \left(A_{mp} \left[\lambda \frac{\partial V}{\partial y_p} \right] n_{0m} + (A_{mp} - A_{mp}^{(0)}) \left[\lambda \frac{\partial U_0}{\partial y_p} \right] n_{0m} \right) \bigg|_\Gamma = 0, \\
r_t + c_0 \lambda_1 \frac{n_0 \cdot \mathcal{A} \nabla V_1}{N \cdot J^{-T} n_0} \\
+ c_0 \lambda_1 \left(\frac{n_0 \cdot \mathcal{A}}{N \cdot J^{-T} n_0} - \frac{n_0 \cdot \mathcal{A}^{(0)}}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \right) \nabla U_{01} \\
= -\rho_{0t} - c_0 \lambda_1 \frac{n_0 \cdot \mathcal{A}^{(0)} \nabla U_{01}}{N \cdot J_0^{-T} n_0}, \quad y \in \Gamma,
\end{gathered}$$

где n_{0m} — m-я компонента вектора n_0.

2.3 Выделение линейной части.

Продолжим преобразование задач I и II, введя „вариации“ функций и операторов, зависящих от ρ, по формулам

$$\delta S_{\rho_0} = \frac{d}{d\tau} S_{\rho_0 + \tau r} \bigg|_{\tau=0}, \quad \delta \mathcal{L}_{\rho_0} = \frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_{\rho_0 + \tau r} \bigg|_{\tau=0},$$

и т.д. Ясно, что δS_{ρ_0}, $\delta \mathcal{L}_{\rho_0}$ — это линейные части $S_\rho - S_{\rho_0}$, $\mathcal{L}_\rho - \mathcal{L}_{\rho_0}$ относительно $r = \rho - \rho_0$. Теперь задачи I и II могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)} V_i + \delta \mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)} U_{0i} = \mathcal{F}_i(r, V_i), \ (y,t) \in \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \\
V_i\big|_{t=0} = 0, \ r\big|_{t=0} = 0, \ V_1\big|_S = 0, \ V_i\big|_\Gamma = 0, \quad i = 1,2, \\
r_t + c_0 \left(S_{\rho_0} \left[\lambda \frac{\partial V}{\partial n_0} \right] + \delta S_{\rho_0} \left[\lambda \frac{\partial U_0}{\partial n_0} \right] \right) \bigg|_\Gamma = \mathcal{G}(r, V) + \varphi(y,t)
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)} V_i + \delta \mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)} U_{0i} = \mathcal{F}_i(r, V_i), \ (y,t) \in \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \\
V_i\big|_{t=0} = 0, \ r\big|_{t=0} = 0, \ V_1\big|_S = 0, \ [V]\big|_\Gamma = 0, \\
\sum_{m,p=1}^{n} \left(A_{mp}^{(0)} \left[\lambda \frac{\partial V}{\partial y_p} \right] n_{0m} + \delta A_{mp}^{(0)} \left[\lambda \frac{\partial U_0}{\partial y_p} \right] n_{0m} \right) \bigg|_\Gamma = \mathcal{H}(r, V), \\
r_t + c_0 \lambda_1 \left(\frac{n_0 \cdot \mathcal{A}^{(0)} \nabla V_1}{N \cdot J_0^{-T} n_0} + n_0 \cdot \delta \left(\frac{\mathcal{A}^{(0)}}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \right) \nabla U_{01} \right) \bigg|_\Gamma = \mathcal{K}(r, V) + \psi(y,t),
\end{gathered}$$

где $V=(V_1,V_2)$,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_i=-(\mathcal{L}_\rho^{(i)}-\mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)}-\delta\mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)})U_{0i}-(\mathcal{L}_\rho^{(i)}-\mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)})V_i,\\
&\mathcal{G}=-c_0(S_\rho-S_{\rho_0}-\delta S_{\rho_0})\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial n_0}\right]-c_0(S_\rho-S_{\rho_0})\left[\lambda\frac{\partial V}{\partial n_0}\right]\Big|_\Gamma,\\
&\mathcal{H}=-\sum_{m,p=1}^{n}(A_{mp}-A_{mp}^{(0)}-\delta A_{mp})\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial y_p}\right]n_{0m}-\sum_{m,p=1}^{n}(A_{mp}-A_{mp}^{(0)})\left[\lambda\frac{\partial V}{\partial y_p}\right]n_{0m}\Big|_\Gamma,\\
&\mathcal{K}=-c_0\lambda_1 n_0\cdot\left(\frac{\mathcal{A}}{N\cdot J^{-T}n_0}-\frac{\mathcal{A}^{(0)}}{N\cdot J_0^{-T}n_0}-\delta\frac{\mathcal{A}^{(0)}}{N\cdot J_0^{-T}n_0}\right)\nabla U_{01}\Big|_\Gamma\\
&\qquad-c_0\lambda_1\left(\frac{n_0\cdot\mathcal{A}}{N\cdot J^{-T}n_0}-\frac{n_0\cdot\mathcal{A}^{(0)}}{N\cdot J_0^{-T}n_0}\right)\nabla V_1\Big|_\Gamma,\\
&\varphi=-\rho_{0t}-c_0S_{\rho_0}\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial n_0}\right]\Big|_\Gamma,\\
&\psi=-\rho_{0t}-c_0\lambda_1\frac{n_0\cdot\mathcal{A}^{(0)}}{N\cdot J_0^{-T}n_0}\nabla U_{01}\Big|_\Gamma.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Из определения $\mathcal{L}_\rho^{(i)}$, S_ρ, $\mathcal{A}$ ясно, что вычисление $\delta\mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)}$, δS_{ρ_0}, $\delta A_{mp}^{(0)}$ сводится к вычислению δJ^{-1}. Из равенства $JJ^{-1}=I$ следует $(\delta J_0)J_0^{-1}+J_0\delta J_0^{-1}=0$, т.е.

$$\delta J_0^{-1}=-J_0^{-1}(\delta J_0)J_0^{-1}=-J_0^{-1}(\nabla\otimes Nr^*)^TJ_0^{-1},$$

или

$$\delta J_0^{km}=-\sum_{j,q=1}^{n}J_0^{kj}\frac{\partial N_jr^*}{\partial y_q}J_0^{qm},$$

где $r^*=Pr$.

Аналогичная формула имеет место для $\frac{\partial J^{km}}{\partial y_i}$:

$$\frac{\partial J^{km}}{\partial y_i}=-\sum_{j,q=1}^{n}J^{kj}\frac{\partial^2N_j\rho^*}{\partial y_q\partial y_i}J^{qm},$$

следовательно,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho^{(i)}w&=w_t-a_i\sum_{k,j=1}^{n}A_{kj}\frac{\partial^2w}{\partial y_k\partial y_j}-\rho_t^*(N\cdot J^{-T}\nabla w)\\
&\quad-a_i\sum_{j,k,m,p,q=1}^{n}J^{km}J^{pj}J^{qm}\frac{\partial^2N_j\rho^*}{\partial y_q\partial y_k}\frac{\partial w}{\partial y_p}\\
&=L_\rho^{(i)}w-(N\cdot J^{-T}\nabla w)L_\rho^{(i)}\rho^*+a_i\ell_\rho\cdot\nabla w,
\end{aligned}
$$

где

$$L_\rho^{(i)} w = w_t - a_i \sum_{j,k=1}^n A_{kj} \frac{\partial^2 w}{\partial y_k \partial y_j}$$

— главная часть $\mathcal{L}_\rho^{(i)} w$ и ℓ_q — вектор с компонентами

$$\ell_{\rho p} = - \sum_{j,k,m,q=1}^n J^{pj} J^{km} J^{qm} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y_q} \frac{\partial \rho^*}{\partial y_k} + \frac{\partial N_j}{\partial y_k} \frac{\partial \rho^*}{\partial y_q} + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y_q \partial y_k} \rho^* \right),$$

которые являются алгебраическими функциями ρ^* и $\frac{\partial \rho^*}{\partial y_m}$.

Далее, в силу (2.13) и (2.6) имеем

$$\delta A_{kj}^{(0)} = - \sum_{i,s=1}^n \left(A_{ki}^{(0)} \frac{\partial N_s r^*}{\partial y_i} J_0^{js} + J_0^{ks} \frac{\partial N_s r^*}{\partial y_i} A_{ij}^{(0)} \right),$$

$$\delta(N \cdot J^{-T} n_0) = - \sum_{j,k,m,q=1}^n J_0^{kj} n_{0k} \frac{\partial N_j r^*}{\partial y_q} J_0^{qm} N_m,$$

так что

$$\begin{aligned}
\delta \frac{\mathcal{A}^{(0)} n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} &= \frac{\delta \mathcal{A}^{(0)} n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} - \mathcal{A}^{(0)} n_0 \frac{\delta(N \cdot J_0^{-T} n_0)}{(N \cdot J_0^{-T} n_0)^2} \\
&= \frac{1}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \Big(-\mathcal{A}^{(0)} (\nabla \otimes N r^*) J_0^{-T} n_0 - J_0^{-1} (\nabla \otimes N r^*)^T \mathcal{A}^{(0)} n_0 \\
&\qquad + \frac{\mathcal{A}^{(0)} n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} J_0^{-T} n_0 \cdot (\nabla \otimes N r^*)^T J_0^{-1} N \Big) \\
&= -\mathcal{A}^{(0)} \nabla r^* - J_0^{-1} N \frac{\mathcal{A}^{(0)} n_0 \cdot \nabla r^*}{N \cdot J_0^{-T} n_0} + \mathcal{A}^{(0)} n_0 \frac{J_0^{-1} N \cdot \nabla r^*}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \\
&\quad + \frac{r^*}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \Big(-\mathcal{A}^{(0)} (\nabla \otimes N) J_0^{-T} n_0 - J_0^{-1} (\nabla \otimes N)^T \mathcal{A}^{(0)} n_0 \\
&\qquad + \frac{\mathcal{A}^{(0)} n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \big(J_0^{-T} n_0 \cdot (\nabla \otimes N)^T J_0^{-1} N \big) \Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_\rho &= \delta \frac{\mathcal{A}^{(0)} n_0 \cdot n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \\
&= -2 \mathcal{A}^{(0)} n_0 \cdot \nabla r^* - (\mathcal{A}^{(0)} n_0 \cdot n_0) \frac{N \cdot J_0^{-T} \nabla r^*}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \\
&\quad + \frac{r^*}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \Big(-\mathcal{A}^{(0)} n_0 \cdot (\nabla \otimes N)^T J_0^{-T} n_0 - J_0^{-1} n_0 \cdot (\nabla \otimes N)^T \mathcal{A}^{(0)} n_0 \\
&\qquad + \frac{\mathcal{A}^{(0)} n_0 \cdot n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} J_0^{-T} n_0 \cdot (\nabla \otimes N)^T J_0^{-1} N \Big).
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\delta\mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0}U_{0i} = \delta L^{(i)}_{\rho_0}U_{0i} - (N\cdot\delta J_0^{-T}\nabla U_{0i})L^{(i)}_{\rho_0}\rho_0^* \\ - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_{0i})(L^{(i)}_{\rho_0}r^* + \delta L^{(i)}_{\rho_0}\rho_0^*) + a_i\delta\ell_{\rho_0}\cdot\nabla U_{0i},$$

и так как $\delta L^{(i)}_{\rho_0}\rho_0^*$, $\delta L^{(i)}_{\rho_0}U_0$ и $\delta\ell_{\rho_0}\cdot\nabla U_{0i}$ зависят только от r^* и ∇r^* (но не от вторых производных r^*), то

$$\mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0}V + \delta\mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0}U_{0i} = L^{(i)}_{\rho_0}V - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_{0i})L^{(i)}_{\rho_0}r^* + m^{(i)}(r^*,V),$$

где $m^{(i)}$ — дифференциальные операторы первого порядка

$$m^{(i)} = -(N\cdot J_0^{-T}\nabla V)L^{(i)}_{\rho_0}\rho_0^* + a_i\ell_{\rho_0}\cdot\nabla V \\ - a_i\sum_{k,m=1}^{n}\delta A^{(0)}_{km}\left(\frac{\partial^2 U_{0i}}{\partial y_k\partial y_m} - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_{0i})\frac{\partial^2\rho_0^*}{\partial y_k\partial y_m}\right) \\ - (N\cdot\delta J_0^{-T}\nabla U_{0i})L^{(i)}_{\rho_0}\rho_0^* + a_i\delta\ell_{\rho_0}\cdot\nabla U_{0i}.$$

Таким образом, мы можем записать задачи I и II в следующей окончательной форме:

$$\begin{gathered} L^{(i)}_{\rho_0}V_i - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_{0i})L^{(i)}_{\rho_0}r^* + m_i(r^*,V_i) = \mathcal{F}_i(r,V_i), \quad (y,t)\in\Omega^{(i)}_T, \quad i=1,2, \\ V_i\big|_{t=0} = 0, \quad V_1\big|_S = 0, \quad V_i\big|_\Gamma = 0, \quad i=1,2, \quad r\big|_{t=0} = 0, \\ r_t + c_0S_{\rho_0}\left[\lambda\frac{\partial V}{\partial n_0}\right] + h\cdot\nabla_\Gamma r + h_1r\big|_\Gamma = \mathcal{G}(r,V) + \varphi(y,t) \end{gathered} \tag{2.26}$$

и

$$\begin{gathered} L^{(i)}_{\rho_0}V_i - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_{0i})L^{(i)}_{\rho_0}r^* + m_i(r^*,V_i) = \mathcal{F}_i(r,V_i), \quad (y,t)\in\Omega^{(i)}_T, \quad i=1,2, \\ V_i\big|_{t=0} = 0, \quad V_1\big|_S = 0, \quad [V]\big|_\Gamma = 0, \quad r\big|_{t=0} = 0, \\ n_0\cdot\mathcal{A}^{(0)}[\lambda(\nabla V - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_0)\nabla_\Gamma r)] - (N\cdot J_0^{-T}n_0)(\mathcal{A}^{(0)}\nabla_\Gamma r\cdot[\lambda\nabla U_0]) + g_0r\big|_\Gamma \\ = \mathcal{H}(r,V), \\ r_t + c_0\lambda_1\left(\frac{\mathcal{A}^{(0)}n_0}{N\cdot J_0^{-T}n_0}\cdot(\nabla V_1 - (N\cdot J_0^{-T}\nabla U_{01})\nabla_\Gamma r) - \nabla_\Gamma r\cdot\mathcal{A}^{(0)}\nabla U_{01}\right. \\ \left. + \frac{n_0\cdot\mathcal{A}^{(0)}\nabla U_{01}}{N\cdot J_0^{-T}n_0}(N\cdot J_0^{-T}\nabla_\Gamma r)\right) + h_2r\Big|_\Gamma \\ = \mathcal{K}(r,V) + \psi(y,t), \end{gathered} \tag{2.27}$$

где

$$h = -c_0\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial n_0}\right]\Big(2\mathcal{A}^0 n_0 + \frac{n_0\cdot\mathcal{A}^{(0)}n_0}{N\cdot J_0^{-T}n_0}J_0^{-1}N\Big),$$

$$h_1 = -\frac{c_0}{N\cdot J^{-1}n_0}\left[\lambda\frac{\partial U_0}{\partial n_0}\right]\Big(\mathcal{A}^{(0)}n_0\cdot(\nabla\otimes N)J_0^{-T}n_0 + J^{-T}n_0\cdot(\nabla\otimes N)^T\mathcal{A}^{(0)}n_0 - \frac{n_0\cdot\mathcal{A}^{(0)}n_0}{N\cdot J_0^{-T}n_0}\,J^{-T}n_0\cdot(\nabla\otimes N)^T J_0^{-1}N\Big),$$

$$g_0 = n_0\cdot\big(\mathcal{A}^{(0)}(\nabla\otimes N)J_0^{-T} + J_0(\nabla\otimes N)^T\mathcal{A}^{(0)}\big)[\lambda\nabla U_0],$$

$$h_2 = -c_0\lambda_1(N\cdot J^{-T}n_0)^{-1}\nabla U_{01}\cdot\Big(\mathcal{A}^0(\nabla\otimes N)J_0^{-T}n_0 + J_0^{-1}(\nabla\otimes N)^T\mathcal{A}^{(0)}n_0 - \frac{\mathcal{A}^{(0)}n_0}{N\cdot J_0^{-T}n_0}\big(J_0^{-1}n_0\cdot(\nabla\otimes N)^T J_0^{-1}N\big)\Big).$$

§3. Модельные задачи

3.1. Вспомогательные оценки. Рассмотрим интегральный оператор

$$u(x',t) = G*f = \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x'-y',t-\tau)f(y',\tau)dy', \tag{3.1}$$

с ядром $G(x',t)$, преобразование Фурье по x' и Лапласа по t которого имеет вид

$$\widetilde{G}(\xi,p)\equiv FL[G] = \frac{1}{s+\phi(\xi,p)},\quad \xi\in\mathbb{R}^{n-1},\ p\in\mathbb{C}.$$

Относительно функции $\phi(\xi,p)$ предположим то же самое, что и в работе [1], а именно:

1) $\phi(\xi,p)$ является аналитической функцией по переменным p и $\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$, $j=1,\dots,n-1$, в области

$$\operatorname{Re}p > -\delta|\xi|^2 - \varkappa|\operatorname{Im}p|,\quad |\eta|\leqslant\delta_1(|\xi|^2+|p|)^{1/2}, \tag{3.2}$$

где δ, $\varkappa$, δ_1 — достаточно малые положительные числа.

2) $\phi(\zeta,p)$ однородная функция:

$$\phi(\lambda\zeta,\lambda^2p) = \lambda\phi(\zeta,p),\quad \lambda>0.$$

3) В области (3.2) выполняется неравенство

$$c_1(|p|+|\xi|^2)^{1/2}\leqslant\operatorname{Re}\phi(\zeta,p)\leqslant|\phi(\zeta,p)|\leqslant c_2(|p|+|\xi|^2)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Оценим ядро G и его производные, пользуясь тем же приемом, который был применен в [4, 9] к некоторым конкретным ядрам. Представим $\widetilde{G}$ в виде

$$\widetilde{G}(\xi,p)=\int\limits_0^\infty e^{-(p+\phi(\xi,p))\lambda}d\lambda,$$

что приводит к

$$G(x',t)=\int\limits_0^t K(x',\lambda,t-\lambda)d\lambda, \tag{3.4}$$

где

$$K(x',x_n,t)=(FL)^{-1}e^{-\phi(\xi,p)x_n}=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{ix'\xi}d\xi\int\limits_0^\infty e^{pt-\phi(\xi,p)x_n}dp.$$

Предложение 3.1. *Функция $K(x,t)$, $x=(x',x_n)$, удовлетворяет неравенствам*

$$|\mathcal{D}_x^j\mathcal{D}_t^k K(x,t)|\leqslant c_3 t^{-\frac{n+1+|j|}{2}-k}e^{-b\frac{x^2}{t}},\quad b>0, \tag{3.5}$$

более того, при $j_n=0$

$$|\mathcal{D}_{x'}^{j'}\mathcal{D}_t^k K(x,t)|\leqslant c_4 x_n t^{-\frac{n+2+|j'|}{2}-k}e^{-b\frac{x^2}{t}}; \tag{3.6}$$

если же $t<0$, то $K=0$. Постоянные c_3, c_4 от t не зависят.

Оценки (3.5), (3.6) доказываются так же, как аналогичные неравенства для фундаментальных решений параболических уравнений и „ядер Пуассона“ параболических начально-краевых задач [21]. Доказательство оценок (3.5), (3.6) приведено в приложении.

Предложение 3.2. *При всех $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $t>0$,*

$$|\mathcal{D}_{x'}^j G(x',t)|\leqslant c_5\Big[(|x'|^2+t^2)^{-\frac{n+|j|-1}{2}}+t^{-\frac{n+|j|}{2}}e^{-b\frac{|x'|^2}{t}}\Big] \tag{3.7}$$

с постоянной c_5, не зависящей от t.

Доказательство. Из (3.4) и (3.5) имеем

$$|\mathcal{D}_{x'}^j G(x',t)|$$
$$\leqslant c\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{n+1+|j|}{2}}\int\limits_0^{t/2}e^{-\frac{b(|x'|^2+\lambda^2)}{t}}d\lambda+c\int\limits_{t/2}^t(t-\lambda)^{-\frac{n+1+|j|}{2}}e^{-\frac{b(|x'|^2+t^2/4)}{t-\lambda}}d\lambda$$
$$\leqslant c\big(t^{-\frac{n+|j|}{2}}e^{-\frac{b|x'|^2}{t}}+(|x'|^2+t^2)^{-\frac{n+|j|-1}{2}}\big).\quad\bullet$$

Предложение 3.3. *Если* $n > 2$ *или* $n = 2$, $|j| > 0$, *а* $\beta \in [0,1)$, *то*

$$\int_0^t |\mathcal{D}^j_{x'} G(x', t-\tau)| \frac{d\tau}{\tau^\beta} \leqslant \frac{c_6}{t^\beta |x'|^{n-2+|j|}}. \tag{3.8}$$

Кроме того, при любом $a > 0$

$$I \equiv \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \left| \int_{|x'-y'|\leqslant a} \mathcal{D}_{x_i} G(x'-y', t-\tau) dy' \right| \leqslant \frac{c_7}{t^\beta}. \tag{3.9}$$

Постоянные в неравенствах (3.8), (3.9) *не зависят от* t *и* a.

Доказательство. Пользуясь оценкой (3.7), получим

$$\int_0^t |\mathcal{D}^j_{x'} G(x', t-\tau)| \frac{d\tau}{\tau^\beta}$$

$$\leqslant \sup_{\tau\in(0,t/2)} |\mathcal{D}^j_{x'} G(x', t-\tau)| \int_0^{t/2} \frac{d\tau}{\tau^\beta} + \left(\frac{2}{t}\right)^\beta \int_{t/2}^t |\mathcal{D}^j_{x'} G(x', t-\tau)| d\tau$$

$$\leqslant \frac{c}{t^\beta} \left(\frac{t}{(t+|x'|^2)^{\frac{n+|j|}{2}}} + \frac{t}{(|x'|^2+t^2)^{\frac{n+|j|-1}{2}}} + \int_0^\infty |\mathcal{D}^j_{x'} G(x', \xi)| d\xi \right)$$

$$\leqslant \frac{c}{t^\beta |x'|^{n-2+|j|}}.$$

Неравенство (3.9) при $n > 2$ следует из (3.8):

$$I \leqslant c \int_0^t \left(\frac{a^{n-2}}{(a^2+(t-\tau)^2)^{(n-1)/2}} + \frac{a^{n-2}}{(t-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{ba^2}{t-\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^\beta} \leqslant \frac{c}{t^\beta}.$$

Если же $n = 2$, то

$$\int_{|x_1-y_1|\leqslant a} \mathcal{D}_{x_1} G(x_1-y_1, t-\tau) dy_1 = G(-a, t-\tau) - G(a, t-\tau).$$

Определим функцию $\mathcal{G}(x_1, x_2, t)$ по формуле

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, t) = \int_0^t K(x_1, x_2+\lambda, t-\lambda) d\lambda, \qquad x_2 \geqslant 0.$$

Точно так же, как в предложении 3.2, доказывается оценка

$$|\nabla_x \mathcal{G}(x,t)| \leqslant c\Big[(x_1^2+x_2^2+t^2)^{-1} + t^{-\frac{3}{2}} e^{-b\frac{(x_1^2+x_2^2)}{t}}\Big].$$

Пусть $S_+(a)$ — полуокружность радиуса a в полуплоскости $x_2>0$, соединяющая точки $(a,0)$ и $(-a,0)$. Тогда для доказательства (3.9) достаточно указать, что

$$G(a,t-\tau)-G(-a,t-\tau) = \int\limits_{S_+(a)} \nabla\mathcal{G}(x_1,x_2,t-\tau)\cdot dl_x,$$

$$\int\limits_0^t |G(a,t-\tau)-G(-a,t-\tau)|\frac{d\tau}{\tau^\beta} \leqslant c\int\limits_0^t \Big(\frac{a}{a^2+(t-\tau)^2}+\frac{a}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{ba^2}{t-\tau}}\Big)\frac{d\tau}{\tau^\beta} \leqslant \frac{c}{t^\beta}, \quad \bullet$$

Предложение 3.4 (доказательство см. в приложении). *При любом* $t>0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{D}_t^k G(x',t)|dx' \leqslant c_8 t^{-\frac{1}{2}-k}, \quad k=0,1,2. \tag{3.10}$$

3.2. Оценки потенциала (3.1) в весовых гельдеровских нормах. Докажем следующее предложение.

Предложение 3.5. *Если* $f\in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha}_{s-1}(R_T)$, $s\in(\alpha,2+\alpha]$, *то* $u\in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha}_s(R_T)$ *и*

$$\|u\|^{(2+\alpha)}_{s,R_T} \leqslant c\|f\|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}, \tag{3.11}$$

где $R_T=\mathbb{R}^{n-1}\times(0,T)$, $T\in(0,\infty)$, $\|\cdot\|$*-норма* (1.3).

Доказательство. Заметим, что

$$|u(x,t)| \leqslant \sup_{\tau<t}\tau^{\frac{1-s}{2}}|f(x',\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^t \tau^{\frac{s-1}{2}}d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |G(y',t-\tau)|dy'$$

$$\leqslant \sup_{\tau<t}\tau^{\frac{1-s}{2}}|f(x',\tau)|_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^t \tau^{\frac{s-1}{2}}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \leqslant ct^{s/2}\sup_{\tau<t}\tau^{\frac{1-s}{2}}|f|_{\mathbb{R}^{n-1}}. \tag{3.12}$$

Для оценки постоянной Гёльдера вторых производных $\mathcal{D}^2_{x_i x_j} u$, $i, j = 1, \dots, n-1$, воспользуемся формулой

$$\frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f(y', \tau)}{\partial y_j} \frac{\partial G(x' - y', t - \tau)}{\partial x_i} dy'$$

и сформируем разность

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(z', t)}{\partial z_i \partial z_j} \\
&= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} \frac{\partial G(x' - y', t - \tau)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f(y', \tau)}{\partial y_j} - \frac{\partial f(x', \tau)}{\partial x_j}\right] dy' \\
&\quad - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} \frac{\partial G(z' - y', t - \tau)}{\partial z_j} \left[\frac{\partial f(y, \tau)}{\partial y_j} - \frac{\partial f(z', \tau)}{\partial z_j}\right] dy' \\
&\quad - \int\limits_0^t \left[\frac{\partial f(x', \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(z', \tau)}{\partial z_j}\right] d\tau \int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} \frac{\partial G(x' - y', t - \tau)}{\partial x_j} dy' \\
&\quad + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x'-y'|\geqslant 2\rho} \left[\frac{\partial G(x' - y', t - \tau)}{\partial x_j} - \frac{\partial G(z' - y', t - \tau)}{\partial z_j}\right] \left[\frac{\partial f(y', \tau)}{\partial y_j} - \frac{\partial f(z', t)}{\partial z_j}\right] dy',
\end{aligned}$$

где $\rho = |x' - y'|$. Оценим ее, используя (3.8), (3.9).

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial z_j \partial z_i}\right| \\
&\leqslant c \sup_{\tau < t} \tau^\beta [\nabla f(\cdot, \tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \\
&\quad \times \Bigg(\int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} |x' - y'|^\alpha dy' \int\limits_0^t \left|\frac{\partial G(x' - y', t - \tau)}{\partial x_i}\right| \frac{d\tau}{\tau^\beta} \\
&\quad + \int\limits_{|z'-y'|\leqslant 2\rho} |z' - y'|^\alpha dy' \int\limits_0^t \left|\frac{\partial G(z' - y', t - \tau)}{\partial z_i}\right| \frac{d\tau}{\tau^\beta} \\
&\quad + \rho^\alpha \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^\beta} \left| \int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} \frac{\partial G(x' - y', t - \tau)}{\partial x_j} dy' \right| \\
&\quad + \rho \int\limits_{|x'-y'|\geqslant 2\rho} |z' - y'|^\alpha dy' \int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_0^t \left|\nabla \frac{\partial G(z' + \lambda(x' - z') - y', t - \tau)}{\partial x_j}\right| \frac{d\tau}{\tau^\beta} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\leqslant c \sup_{\tau<t} \tau^{\beta}[\nabla f(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^{n-1}} t^{-\beta}$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{|x'-y'|\leqslant 2\rho} |x'-y'|^{\alpha-n+1}dy' + \int\limits_{|z'-y'|\leqslant 3\rho} |z'-y'|^{\alpha-n+1}dy'$$
$$+ \rho^{\alpha} + \rho \int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_{|x'-y'|\geqslant 2\rho} \frac{|z'-y'|^{\alpha}dy'}{|z'-y'+\lambda(x'-z')|^n} \Bigg)$$
$$\leqslant ct^{-\beta}\rho^{\alpha} \sup_{\tau<t}[\nabla f(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^{n-1}} \tau^{\beta}, \tag{3.13}$$

где $\beta = (2+\alpha-s)/2 \in [0,1)$.

Далее, предположив, что $h \in (0,t/4)$ и $f(y',\tau) = 0$ при $\tau < 0$, рассмотрим разность

$$u_t(x',t) - u_t(x',t-h)$$
$$= \int\limits_{t-2h}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_t(x'-y',t-\tau)\big[f(y',\tau)-f(y',t)\big]dy'$$
$$- \int\limits_{t-2h}^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_t(x'-y',t-\tau-h)\big[f(y',\tau)-f(y',t-h)\big]dy'$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G(x'-y',h)\big[f(y',t)-f(y',t-h)\big]dy'$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{t-2h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big[G_t(x'-y',t-\tau)-G_t(x'-y',t-h-\tau)\big]\big[f(y',\tau)-f(y',t)\big]dy'$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{4} I_i. \tag{3.14}$$

Представим I_4 в виде $I_4 = I_{41} + I_{42} + I_{43}$, где

$$I_{41} = \int\limits_0^h d\xi \int\limits_{t/2}^{t-2h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2 G(x'-y',t-\xi-\tau)}{\partial t^2}[f(y',\tau)-f(y',t)]dy',$$
$$I_{42} = \int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^{t/2} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2 G(x'-y',t-\xi-\tau)}{\partial t^2}[f(y',\tau)-f(y',t)]dy',$$
$$I_{43} = -\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2 G(x'-y',t-\xi-\tau)}{\partial t^2} f(y',t)dy'.$$

В силу (3.10),

$$|I_{41}| \leqslant ch \sup_{\mathbb{R}^{n-1}} \sup_{\xi\in(t/2,t)} \xi^\beta |t-\xi|^{-(1+\alpha)/2} |f(y',t)-f(y',\xi)| \int\limits_{t/2}^{t-2h} (t-\tau)^{-2+\alpha/2}\tau^{-\beta}\,d\tau$$
$$\leqslant ch^{\alpha/2}t^{-\beta}\|f\|^{(1+\alpha)}_{s-1,\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)},$$
$$|I_{42}|+|I_{43}|$$
$$\leqslant ch\left(t^{(s-4)/2}\sup_{\mathbb{R}^{n-1}}\sup_{\xi\in(0,t)}\xi^{(1-s)/2}|f(y',\xi)| + \sup_{\mathbb{R}^{n-1}}|f(y',t)|\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}\right)$$
$$\leqslant ch^{\alpha/2}t^{-\beta}\|f\|^{(1+\alpha)}_{s-1,\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)}.$$

Остальные члены также оцениваются с помощью (3.10):

$$|I_1|+|I_2|+|I_3| \leqslant ch^{\alpha/2}\sup_{\mathbb{R}^{n-1}}[f(y,\cdot)]^{((1+\alpha)/2)}_{(t-2h,t)} \leqslant ct^{-\beta}h^{\alpha/2}\|f\|^{(1+\alpha)}_{s-1,\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)}.$$

Таким образом,

$$|u_t(x',t)-u_t(x',t-h)| \leqslant ch^{\alpha/2}t^{-\beta}\|f\|^{(1+\alpha)}_{s-1,\mathbb{R}^{n-1}\times(0,t)}.$$

Из этого неравенства, а также из (3.12) и (3.13) вытекает (3.11). •

3.3. Оценки решений модельных задач. Пусть $\mathbb{R}^{(1)}_T = \mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$, $\mathbb{R}^{(2)}_T = \mathbb{R}^n_- \times (0,T)$, $R_T = \mathbb{R}^{n-1}\times(0,T)$.

Рассмотрим следующие задачи, возникающие при исследовании линеаризованных задач I и II.

$$\begin{gathered}
L^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w_1(x,t) = f_1(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{(1)}_T,\\
L^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w_2(x,t) = f_2(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{(2)}_T,\\
w_i(x',0,t) - d_i\rho(x',t) = 0, \quad (x',t)\in R_T, \quad i=1,2,\\
\rho_t + \left(b^{(1)}\cdot\nabla w_1 - b^{(2)}\cdot\nabla w_2\right)\Big|_{x_n=0} + h'\cdot\nabla'\rho = \psi(x',t), \quad (x',t)\in R_T,\\
w_i\big|_{t=0} = 0, \quad i=1,2, \quad \rho\big|_{t=0} = 0,
\end{gathered} \tag{3.15}$$

и

$$
\begin{gathered}
L^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w_1(x,t)=f_1(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}_T^{(1)},\\
L^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w_2(x,t)=f_2(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}_T^{(2)},\\
(w_1-w_2)\big|_{x_n=0}-d\rho(x',t)=0,\\
\left(b^{(1)}\cdot\nabla w_1-b^{(2)}\cdot\nabla w_2\right)\big|_{x_n=0}+g'\cdot\nabla'\rho=\varphi(x',t),\\
\rho_t+kb^{(1)}\cdot\nabla w_1\big|_{x_n=0}+h'\cdot\nabla'\rho=\psi(x',t),\quad (x',t)\in R_T,\\
w_i\big|_{t=0}=0,\quad i=1,2,\quad \rho\big|_{t=0}=0.
\end{gathered}\tag{3.16}
$$

Здесь k, d_1, d_2 — положительные постоянные, $b^{(i)}=(b_1^{(i)},\dots,b_n^{(i)})$, $h'=(h_1,\dots,h_{n-1})$, $g'=(g_1,\dots,g_{n-1})$ — постоянные векторы, $L^{(i)}=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{k,m=1}^n A_{km}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_m}$, $A_{km}^{(i)}=\mathrm{const}$. Матрицы $\mathcal{A}^{(i)}=\{A_{km}^{(i)}\}_{1\leqslant k,m\leqslant n}$ положительно определенные и $A_{km}^{(i)}=A_{mk}^{(i)}$, $i=1,2$.

Задачи (3.15), (3.16) были рассмотрены в гёльдеровских классах функций [10], а задача (3.15) — также в весовых гёльдеровских классах [7].

Пусть

$$
R_j(\xi,p)=(-1)^{j-1}\frac{1}{A_{nn}^{(j)}}\sum_{\mu=1}^{n-1}A_{\mu n}^{(j)}i\xi_\mu+\sqrt{\frac{p}{A_{nn}^{(j)}}+\sigma^{(j)}(\xi)},\quad j=1,2,
$$

$$
\sigma^{(j)}(\xi)=\frac{1}{A_{nn}^{(j)}}\sum_{\gamma,\beta=1}^{n-1}A_{\gamma\beta}^{(j)}\xi_\gamma\xi_\beta-\left(\frac{1}{A_{nn}^{(j)}}\sum_{\gamma=1}^{n-1}A_{\gamma n}^{(j)}\xi_\gamma\right)^2.
$$

Так как матрицы $\mathcal{A}^{(i)}$ симметрические и положительно определенные, то $\sigma^{(j)}(\xi)\geqslant c|\xi|^2$, $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$. Ясно также, что $R_j(\xi,p)$ удовлетворяют условиям 1)–3) п. 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть $b_n^{(i)}$ и d_i таковы, что*

$$
\phi_1(\xi,p)=-b_n^{(1)}d_1R_1(\xi,p)-b_n^{(2)}d_2R_2(\xi,p)\tag{3.17}
$$

подчиняется условиям 1)–3), п. 3.1.

Тогда при любых $f_i\in\mathring{C}_{s-2}^{\alpha}(\mathbb{R}_T^{(i)})$, $i=1,2$, $\psi\in\mathring{C}_{s-1}^{1+\alpha}(R_T)$, $s\in(\alpha,2+\alpha]$, задача (3.15) имеет единственное решение $w_i\in\mathring{C}_s^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T^{(i)})$, $i=1,2$, $\rho\in\mathring{C}_s^{2+\alpha}(R_T)$, такое, что $\rho_t\in\mathring{C}_{s-1}^{1+\alpha}(R_T)$, и выполняется неравенство

$$
\sum_{i=1}^2|w_i|_{s,\mathbb{R}_T^{(i)}}^{(2+\alpha)}+|\rho|_{s,R_T}^{(2+\alpha)}+|\rho_t|_{s-1,R_T}^{(1+\alpha)}\leqslant c\left(\sum_{i=1}^2|f_i|_{s-2,\mathbb{R}_T^{(i)}}^{(\alpha)}+|\psi|_{s-1,R_T}^{(1+\alpha)}\right).\tag{3.18}
$$

Теорема 3.2. *Пусть* $b^{(i)}$, g' *таковы, что функции* $B_m = -b_n^{(m)} R_m + i b^{(m)\prime}\xi$, $m = 1, 2$,

$$\phi_2(\xi, p) = kd \frac{B_1(B_2 - i\xi \cdot g'/d)}{B_1 + B_2} \tag{3.19}$$

удовлетворяют условиям 1)–3), *п.* 3.1. *Тогда при любых* $f_i \in \mathring{C}^{\alpha}_{s-2}(\mathbb{R}_T^{(i)})$, $i = 1, 2$, $\varphi, \psi \in \mathring{C}^{1+\alpha}_{s-1}(R_T)$ *задача* (3.16) *имеет единственное решение* $w_i \in \mathring{C}^{2+\alpha}_s(\mathbb{R}_T^{(i)})$, $i = 1, 2$, $\rho \in \mathring{C}^{2+\alpha}_s(R_T)$, *такое, что* $\rho_t \in \mathring{C}^{1+\alpha}_{s-1}(R_T)$, *и выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2} |w_i|^{(2+\alpha)}_{s,\mathbb{R}_T^{(i)}} + |\rho|^{(2+\alpha)}_{s,R_T} + |\rho_t|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}$$
$$\leqslant c\Bigl(\sum_{i=1}^{2} |f_i|^{(\alpha)}_{s-2,\mathbb{R}_T^{(i)}} + |\varphi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T} + |\psi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}\Bigr). \tag{3.20}$$

Замечание 3.1. Функция ϕ_1 удовлетворяет условиям 1)–3) (в частности, неравенству (3.3)), если $b_n^{(i)} d_i < 0$, $i = 1, 2$. Функция

$$\phi_2 = kd \frac{B_1|B_2|^2 + B_2|B_1|^2 - (B_1\overline{B}_2 + |B_1|^2) i\xi \cdot g'/d}{|B_1 + B_2|^2}$$

удовлетворяет условиям 1)–3), если $k > 0$, $d < 0$, если этим условиям удовлетворяют B_i (т.е. $b_n^{(i)} > 0$) и если $|g'/d| \leqslant \theta$, где θ — достаточно малая положительная величина, поскольку при этих условиях

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\bigl(B_1|B_2|^2 + B_2|B_1|^2 - \bigl(|B_1|^2 + B_1\overline{B}_2\bigr) i g'\xi/d\bigr)\\
&\quad = -\operatorname{Re} B_1|B_2|^2 - \operatorname{Re} B_2|B_1|^2 + g'\xi/d\,\bigl(\operatorname{Re} B_2 \operatorname{Im} B_1 - \operatorname{Im} B_2 \operatorname{Re} B_1\bigr)\\
&\quad \geqslant c_1\bigl(c_2 - \theta\bigr)\bigl(|p| + \xi^2\bigr)^{3/2} = c_3\bigl(|p| + \xi^2\bigr)^{3/2}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.2. Будем искать решение задачи (3.16) в виде $w_i = u_i + W_i$, $i = 1, 2$, где u_i — решение вспомогательной задачи

$$\begin{gathered}
L^{(i)} u_i = f_i(x, t), \ \ (x, t) \in \mathbb{R}_T^{(i)}, \quad i = 1, 2,\\
u_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2,\\
u_1 - u_2\big|_{x_n=0} = 0, \quad b^{(1)} \cdot \nabla u_1 - b^{(2)} \cdot \nabla u_2\big|_{x_n=0} = \varphi(x', t).
\end{gathered}$$

Из результатов работы [5] следует, что эта задача однозначно разрешима и

$$\sum_{i=1}^{2} |u_i|^{(2+\alpha)}_{s,\mathbb{R}_T^{(i)}} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^{2} |f_i|^{(\alpha)}_{s-2,\mathbb{R}_T^{(i)}} + |\varphi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}\right). \tag{3.21}$$

Для W_i получаем задачу

$$L^{(i)}W_i = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{3.22}$$

$$W_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = 1,2, \tag{3.23}$$

$$W_1 - W_2\big|_{x_n=0} - d\rho = 0, \quad b^{(1)} \cdot \nabla W_1 - b^{(2)} \cdot \nabla W_2 + g' \cdot \nabla'\rho\big|_{x_n=0} = 0, \tag{3.24}$$

$$\rho_t + kb^{(1)} \cdot \nabla w_1 + h' \cdot \nabla'\rho\big|_{x_n=0} = \psi - kb^{(1)} \cdot \nabla u_1\big|_{x_n=0} \equiv \psi_1(x',t), \quad \rho|_{t=0} = 0. \tag{3.25}$$

В работе [10] было показано, что эта задача однозначно разрешима и ρ выражается в виде

$$\rho(x',t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi_1(y',\tau)G(x'-y',t-\tau)dy',$$

где G — ядро, преобразование Фурье–Лапласа которого определяется формулой

$$\widetilde{G}(\xi,p) = \frac{1}{p + \phi_2(\xi,p) + h' \cdot i\xi}, \quad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1}).$$

Ясно, что при наших предположениях функция $\phi_3(\xi,s) = \phi_2 + ih'\xi$ удовлетворяет условиям 1)–3). На основании предложения 3.5

$$\begin{aligned} |\rho|^{(2+\alpha)}_{s,R_T} &\leqslant c|\psi_1|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T} \\ &\leqslant c\big(|\psi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T} + |\nabla u_1|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}\big) \\ &\leqslant c\left(\sum_{i=1}^{2} |f_i|^{(\alpha)}_{s-2,\mathbb{R}_T^{(i)}} + |\psi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T} + |\varphi|^{(1+\alpha)}_{s-1,R_T}\right). \end{aligned}$$

Задача (3.22)–(3.24) с заданной функцией ρ является задачей сопряжения, изученной в [5], она однозначно разрешима и ее решение подчиняется оценке вида (3.21) с нормой ρ в правой части. Отсюда следует теорема 3.2 и оценка (3.20). •

Теорема 3.1 может быть доказана аналогичными рассуждениями, причем задача (3.15) может быть также сведена к задаче для двух параболических уравнений в $\mathbb{R}_T^{(1)}$ и $\mathbb{R}_T^{(2)}$ с условиями сопряжения на плоскости $x_n = 0$:

$$\theta_1 - \theta_2 = 0, \quad \mathcal{D}_t\theta_1 + b\nabla\theta_1 - c\nabla\theta_2 = \varphi(x',t).$$

Эта задача была изучена в работе [7].

§4. Линейные задачи

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 основано на анализе двух линейных задач в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$ с заданной поверхностью $\Gamma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ такой, что $\Gamma \cap S = \varnothing$. Мы положим $\Omega_T^{(i)} = \Omega_i \times (0,T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$.

Требуется найти функции $V_i(y,t)$, $i = 1,2$, и $r(y,t)$, $y \in \Gamma$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered}
L^{(i)}\left(y,t,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right)V_i - q_i(y,t)L^{(i)}\left(y,t,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right)r^* + M_i(r^*,V_i) = f_i(y,t) \quad \text{в } \Omega_T^{(i)}, \\
i = 1,2, \\
V_1\big|_S = 0, \quad V_i\big|_\Gamma = 0, \quad i = 1,2, \\
r_t + b_1\frac{\partial V_1}{\partial n} - b_2\frac{\partial V_2}{\partial n} + h\cdot\nabla_\Gamma r + h_0 r\big|_\Gamma = \psi(y,t), \\
V_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = 1,2, \quad r\big|_{t=0} = 0
\end{gathered} \tag{4.1}$$

и

$$L^{(i)}V_i - q_iL^{(i)}r^* + M_i(r^*,V_i) = f_i(y,t) \quad \text{в } \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{4.2}$$

$$V_1\big|_S = 0, \quad V_1 - V_2\big|_\Gamma = 0, \tag{4.3}$$

$$b^{(1)}\cdot(\nabla V_1 - q_1\nabla_\Gamma r) - b^{(2)}\cdot(\nabla V_2 - q_2\nabla_\Gamma r) + g\cdot\nabla_\Gamma r + g_0 r\big|_\Gamma = \varphi(y,t), \tag{4.4}$$

$$r_t + k(y,t)b^{(1)}\cdot(\nabla V_1 - q_1\nabla_\Gamma r) + h\cdot\nabla_\Gamma r + h_0 r\big|_\Gamma = \psi(y,t), \tag{4.5}$$

$$V_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = 1,2, \quad r\big|_{t=0} = 0. \tag{4.6}$$

Здесь r^* — продолжение функции r в Ω: $r^* = Pr$, введенное в §2,

$$L^{(i)}\left(y,t,\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right)V_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} - \sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(y,t)\frac{\partial^2 V_i}{\partial y_k \partial y_m},$$

$$M_i(r^*,V_i) = \lambda^{(i)}(y,t)\cdot\nabla V_i + \lambda_0^{(i)}(y,t)V_i + \mu^{(i)}(y,t)\cdot\nabla r^* + \mu_0^{(i)}(y,t)r^*.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

а) $\Gamma, S \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$;

б) $a_{km}^{(i)}, q_i \in C_\kappa^\alpha(\Omega_T^{(i)})$, $q_i \in C_\kappa^{1+\alpha}(\Gamma_T)$, $\kappa \in [0,\alpha]$;

в) $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)} \in C_{\kappa-1}^\alpha(\Omega_T^{(i)})$, $\lambda_0^{(i)}, \mu_0^{(i)} \in C_{\kappa-2}^\alpha(\Omega_T^{(i)})$;

г) матрицы $\{a_{km}^{(i)}\}_{1\leqslant k,m\leqslant n}$, $i = 1,2$, положительно-определенные и симметрические.

Результаты этого параграфа содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* а)–г), $b_1, b_2 \in C_\kappa^{1+\alpha}(\Gamma_T)$, $h_0 \in C_{\kappa-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $h \in C_\kappa^{1+\alpha}(\Gamma_T)$, *и пусть функция* $\phi_1(\xi, p)$ (3.17) *с* $b_n^{(i)} = b^{(i)}(y,t) \cdot n(y)$, $d_i = -q_i(y,t)$, $A_{pq}^{(i)} = \sum_{k,m=1}^n c_{pk}(y) a_{km}^{(i)}(y,t) c_{qm}(y)$ *удовлетворяет условиям* 1)–3) §2 *для любых* $(y,t) \in \Gamma_T$ *и любой ортогональной матрицы* $C(y) = \{c_{km}\}_{1 \leqslant k,m \leqslant n}$ *такой, что*

$$c_{nm}(y) = n_m(y), \quad m = 1, \dots, n. \tag{4.7}$$

Тогда при всех $f_i \in \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{\alpha}(\Omega_T^{(i)})$, $i = 1, 2$, $s \in (\alpha, 2+\alpha]$ *и* $\psi \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ *задача* (4.1) *имеет единственное решение* $V_i \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+\alpha}(\Omega_T^{(i)})$, $i = 1, 2$, $r \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+\alpha}(\Gamma_T)$ *с* $r_t \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, *и оно удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^2 |V_i|_{s,\Omega_T^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |r|_{s,\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + |r_t|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+\alpha)} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^2 |f_i|_{s-2,\Omega_T^{(i)}}^{(\alpha)} + |\psi|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+\alpha)}\right). \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* а)–г), $b^{(1)}, b^{(2)}, g, h \in C_\kappa^{1+\alpha}(\Gamma_T)$, $h_0 \in C_{\kappa-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $k \in C_\kappa^{1+\alpha}(\Gamma_T)$, $k(y,t) \geqslant k_0 > 0$, *и пусть функция* $\phi_2(\xi, p)$ (3.19) *с* $d = q_2(y,t) - q_1(y,t)$, $k = k(y,t)$, $b^{(i)} = C(y) b^{(i)}(y,t)$, $g = C(y)(g(y,t) - n(y)(n \cdot g(y,t)))$ $A_{pq}^{(i)} = \sum_{k,m=1}^n c_{pk}(y) a_{km}^{(i)}(y,t) c_{qm}(y)$, *удовлетворяет условиям* 1)–3) *для любых* $(y,t) \in \Gamma_T$ *и любой ортогональной матрицы* $C(y) = \{c_{km}(y)\}_{1 \leqslant k,m \leqslant n}$, *обладающей свойством* (4.7). *Тогда при всех* $f_i \in \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{\alpha}(\Omega_T^{(i)})$, $i = 1, 2$, $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $s \in (\alpha, 2+\alpha]$, *задача* (4.2)–(4.6) *имеет единственное решение* $V_i \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+\alpha}(\Omega_T^{(i)})$, $i = 1, 2$, $r \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, $r_t \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, *и*

$$\sum_{i=1}^2 |V_i|_{s,\Omega_T^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |r|_{s,\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + |r_t|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+\alpha)} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^2 |f_i|_{s-2,\Omega_T^{(i)}}^{(\alpha)} + |\varphi|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + |\psi|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+\alpha)}\right). \tag{4.9}$$

Мы уделяем основное внимание второй задаче и приводим полное доказательство теоремы 4.2. Теорема 4.1 доказывается так же; для звездных областей она была доказана в [8].

Доказательство теоремы 4.2. Сначала установим оценку (4.9) методом Шаудера. Оценим решение в окрестности произвольной фиксированной точки $y_0 \in \Gamma$ для $t \in (0, \tau)$, $\tau \ll 1$. Не умаляя общности, можно положить, что $y_0 = 0$ и нормаль $n(y_0)$ направлена по оси y_n (это достигается ортогональным преобразованием координат $z = C(y_0)(y - y_0)$).

Пусть $y_n = F(y')$, $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in K_{d_0}$, — уравнение поверхности Γ в окрестности точки $y_0 = 0$, где $K_{d_0} = \{|y'| \leqslant d, y_n = 0\}$. Очевидно, $F \in C^{2+\alpha}(\overline{K}_d)$ и

$$F(0) = 0, \quad \nabla' F(0) = \left(F_{y_1}(0), \dots, F_{y_{n-1}}(0)\right) = 0. \tag{4.10}$$

Запишем уравнение (4.2) в виде

$$L^{(i)}W_i = \big(q_i(y,t) - q_i(0,0)\big)L^{(i)}r^* - M_i\big(r^*, W_i + q_i(0,0)r^*\big) + f_i, \tag{4.11}$$

где $W_i(y,t) = V_i(y,t) - q_i(0,0)r^*(y,t)$, и сделаем преобразование координат $z' = y'$, $z_n = y_n - F(y')$. Тогда уравнение (4.11) преобразуется в следующее:

$$\widetilde{L}^{(i)}W_i = \big(q_i - q_i(0,0)\big)\widetilde{L}^{(i)}r^* - \widetilde{M}_i\big(r^*, W_i + q_i(0,0)r^*\big) + f_i \equiv Q_i + f_i, \tag{4.12}$$

где

$$\widetilde{L}^{(i)}\left(z,t,\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}\right)W_i = \frac{\partial W_i}{\partial t} - \sum_{k,m=1}^{n} \widetilde{a}_{km}(z,t)\frac{\partial^2 W_i}{\partial z_k \partial z_m},$$

$$\widetilde{a}_{km} = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial y_p}\, a_{pq}\frac{\partial z_m}{\partial y_q},$$

а $\widetilde{M}_i$ — дифференциальные операторы того же типа, что и M_i. (Мы сохранили первоначальное обозначение преобразованных функций). Далее, умножим уравнение (4.12) на гладкую функцию $\eta_\delta(z)$, $\delta < d$ такую, что $\eta_\delta(z) = 1$ при $|z| < \delta/2$, $\eta_\delta(z) = 0$ при $|z| > \delta$, $0 \leqslant \eta_\delta(z) \leqslant 1$, $|\mathcal{D}^j\eta_\delta| \leqslant c_j\delta^{-|j|}$ и положим $w_i(z,t) = W_i(z,t)\eta_\delta(z)$. Так как в силу (4.10) $\widetilde{a}_{km}(0,t) = a_{km}(0,t)$, то мы получаем уравнение

$$L_0^{(i)}w_i = P_i + f_i\eta_\delta,$$

где

$$L_0^{(i)}w_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} - \sum_{k,m=1}^{n} a_{km}(0,0)\frac{\partial^2 w_i}{\partial z_k \partial z_m},$$

$$P_i = \sum_{k,m=1}^{n}\left(\big(\widetilde{a}_{km}(z,t) - \widetilde{a}_{km}(0,0)\big)\frac{\partial^2 w_i}{\partial z_k \partial z_m} - \widetilde{a}_{km}\left(2\frac{\partial W_i}{\partial z_k}\frac{\partial \eta_\delta}{\partial z_m} + W_i\frac{\partial^2 \eta_\delta}{\partial z_k \partial z_m}\right)\right)$$
$$+ Q_i\eta_\delta.$$

Краевое условие (4.4) после введения новых координат принимает форму

$$\widetilde{b}^{(1)}\cdot\nabla W_1 - \widetilde{b}^{(2)}\cdot\nabla W_2 + \gamma\cdot\nabla r^* + g_0 r\big|_{z_n=0} = \varphi,$$

где

$$\widetilde{b}^{(i)} = \Big(b_1^{(i)}, \dots, b_{n-1}^{(i)}, b_n^{(i)} - \sum_{j=1}^{n-1} F_{z_j} b_j^{(i)}\Big),$$

$$\gamma = \widetilde{g} + \big(q_1(0,0) - q_1(z,t)\big)\widetilde{b}_1 - \big(q_2(0,0) - q_2(z,t)\big)\widetilde{b}_2,$$

$$\widetilde{g} = \Big(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n - \sum_{j=1}^{n-1} F_{z_j} g_j\Big),$$

или, что то же самое,

$$\widetilde{b}^{(1)} \cdot \nabla W_1 - \widetilde{b}^{(2)} \cdot \nabla W_2 + \widehat{g}' \cdot \nabla' r + g_0 r\big|_{z_n=0} = \varphi, \tag{4.13}$$

где $\widehat{g}' = (\gamma_1 + \gamma_n F_{z_1}, \dots, \gamma_{n-1} + \gamma_n F_{z_{n-1}})$, поскольку $r^*_{z_n} = \sum_{j=1}^{n-1} F_{z_j} r^*_{z_j}$. Ясно, что $\widehat{g}'(0,0) = \gamma'(0,0) = g'(0,0)$, $\widetilde{b}^{(i)}(0,0) = b^{(i)}(0,0)$.

Умножая (4.13) на η_δ и полагая $\rho = r\eta_\delta$, получаем

$$b^{(1)}(0,0) \cdot \nabla w_1 - b^{(2)}(0,0) \cdot \nabla w_2 + g'(0,0) \cdot \nabla' \rho\big|_{z_n=0} = \Phi + \varphi\eta_\delta,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \big(\widetilde{b}^{(1)}(0,0) - \widetilde{b}^{(1)}(z,t)\big) \cdot \nabla w_1 - \big(\widetilde{b}^{(2)}(0,0) - \widetilde{b}^{(1)}(z,t)\big) \cdot \nabla w_2 \\ & + \big(\widehat{g}'(0,0) - \widehat{g}'(z,t)\big) \cdot \nabla' \rho + W_1 \widetilde{b}^{(1)} \cdot \nabla \eta_\delta - W_2 \widetilde{b}^{(2)} \cdot \nabla \eta_\delta + r\widehat{g}' \cdot \nabla' \eta_\delta - g_0 \rho.\end{aligned}$$

Аналогично преобразуется условие (4.5); оно принимает форму

$$\rho_t + k(0,0) b^{(1)}(0,0) \cdot \nabla w_1 + h'(0,0) \cdot \nabla' \rho\big|_{z_n=0} = \Psi(z', t) + \psi\eta_\delta,$$

где

$$\begin{aligned}\Psi = {} & \big(k(0,0)\widetilde{b}^{(1)}(0,0) - k(z,t)\widetilde{b}^{(1)}(z,t)\big) \cdot \nabla w_1 + \big(\widehat{h}'(0,0) - \widehat{h}'(z,t)\big) \cdot \nabla' \rho \\ & + W_1 k \widetilde{b}^{(1)} \cdot \nabla \eta_\delta + r\widehat{h}' \cdot \nabla' \eta_\delta - h_0 \rho\ \big|_{z_n=0},\end{aligned}$$

$$\widehat{h}' = \big(\chi_1 + \chi_n F_{z_1}, \dots, \chi_{n-1} + \chi_n F_{z_{n-1}}\big),$$

$$\chi = \widetilde{h} + \big(q_1(0,0) - q_1(z,t)\big)\widetilde{b}^1,$$

$$\widetilde{h} = \Big(h_1, \dots, h_{n-1}, h_n - \sum_{j=1}^{n-1} h_j F_{z_j}\Big).$$

Продолжим функции w_1, w_2, ρ нулем в область $|z| > \delta$ и рассмотрим их как решение задачи вида (3.16)

$$\begin{gathered}
L_0^{(i)} w_i(z,t) = P_i + f_i\eta_\delta \quad \text{в } \mathbb{R}_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \\
w_1 - w_2\big|_{z_n=0} + (q_1(0,0) - q_2(0,0)\rho = 0, \\
b^{(1)}(0,0)\cdot\nabla w_1 - b^{(2)}(0,0)\cdot\nabla w_2 + g'(0,0)\cdot\nabla'\rho\big|_{z_n=0} = \Phi + \varphi\eta_\delta, \\
\rho_t + k(0,0)b^{(1)}(0,0)\cdot\nabla w_1 + h'(0,0)\cdot\nabla'\rho\big|_{z_n=0} = \Psi + \psi\eta_\delta, \\
w_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = 1,2, \quad \rho\big|_{t=0} = 0.
\end{gathered}$$

Так как условия теоремы 3.2 выполнены, то можно воспользоваться оценкой (3.20)

$$\begin{aligned}
X(\tau) &\equiv \sum_{i=1}^{2} |w_i|_{s,\mathbb{R}_\tau^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{s,R_\tau}^{(2+\alpha)} + |\rho_t|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)} \\
&\leqslant c\left(\sum_{i=1}^{2} |P_i + f_i\eta_\delta|_{s-2,\mathbb{R}_\tau^{(i)}}^{(\alpha)} + |\Phi + \varphi\eta_\delta|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)} + |\Psi + \psi\eta_\delta|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)}\right),
\end{aligned}$$

где $R_\tau = \{z \mid z' \in \mathbb{R}^{n-1}, z_n = 0, t \in (0,\tau)\}$.

Функции P_i, Φ, Ψ содержат старшие производные w_i, r с коэффициентами, обращающимися в нуль при $z = 0$, $t = 0$, а также младшие производные функций w_i, r, умноженные на производные η_δ. Стандартные выкладки приводят к оценке

$$\sum_{i=1}^{2} |P_i|_{s-2,\mathbb{R}_T^{(i)}}^{(\alpha)} + |\Phi|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)} + |\Psi|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)} \leqslant c\Big((\tau^{\kappa/2} + \delta^\kappa)X(\tau) + \frac{1}{\delta^\alpha}\tau^{\alpha/2}Y(\tau)\Big), \quad (4.14)$$

где $Y(\tau)$ – левая часть неравенства (4.9) с $T = \tau$. Отношение $\frac{\tau^{1/2}}{\delta}$, а также τ и δ мы будем считать малыми величинами, и тогда из полученных оценок вытекает

$$X(\tau) \leqslant c\left(\frac{\tau^{1/2}}{\delta}\right)^\alpha Y(\tau) + c\left(\sum_{i=1}^{2} |f_i\eta_\delta|_{s-2,\mathbb{R}_\tau^{(i)}}^{(\alpha)} + |\varphi\eta_\delta|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)} + |\psi\eta_\delta|_{s-1,R_\tau}^{(1+\alpha)}\right).$$

Так как точка $y_0 \in \Gamma$ произвольная, то эта оценка влечет за собой

$$|r|_{s,\Gamma_\tau}^{(2+\alpha)} + |r_t|_{s-1,\Gamma_\tau}^{(1+\alpha)} \leqslant c\left(\frac{\tau^{1/2}}{\delta}\right)^\alpha Y(\tau) + c(\delta)\mathcal{N}(\tau),$$

где через $\mathcal{N}(\tau)$ обозначена сумма норм в правой части неравенства (4.9) с $T = \tau$. Теперь мы можем оценить V_i через r как решение параболической задачи (4.2)–(4.4), (4.6) и придти к

$$Y(\tau) \leqslant c(|r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} + \mathcal{N}(\tau)) \leqslant c\left(\frac{\tau^{1/2}}{\delta}\right)^2 Y(\tau) + c(\delta)\mathcal{N}(\tau),$$

что доказывает оценку (4.9) при $T = \tau$, если $\frac{\tau^{1/2}}{\delta}$ достаточно мало.

Разрешимость задачи (4.2)–(4.6) достаточно установить при достаточно гладких $q_i(y,t)$, а затем аппроксимировать q_i гладкими функциями и, используя оценку (4.9), получить решение при $q_i \in C^{\alpha,\alpha/2}_\kappa(\Omega^{(i)}_T)$ предельным переходом. Предположим, что $q_i \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega^{(i)}_T)$. Тогда (4.2)–(4.6) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
L^{(i)}W_i + M'_i(r^*, W_i + q_i r^*) = f_i, \quad y \in \Omega_i, \quad t \in (0,\tau), \quad i = 1,2, \\
W_i\big|_{t=0} = 0, \quad r\big|_{t=0} = 0, \quad W_1\big|_S = 0, \\
W_1 - W_2 + (q_1 - q_2)r\big|_\Gamma = 0, \\
b^{(1)} \cdot \nabla W_1 - b^{(2)} \cdot \nabla W_2 + g \cdot \nabla_\Gamma r + g'_0 r\big|_\Gamma = \varphi, \\
r_t + kb^{(1)} \cdot \nabla W_1 + h \cdot \nabla_\Gamma r + h'_0 r\big|_\Gamma = \psi,
\end{gathered} \tag{4.15}$$

где $W_i = V_i - q_i r^*$, а M'_i — оператор того же типа, что и M_i. В случае $M'_i = 0$ разрешимость этой задачи можно доказать точно так же, как это сделано в [7] для задач с производной по времени в граничном условии.

Так как

$$\left|M'_i(r^*, W_i + q_i r^*)\right|^{(\alpha)}_{s-2,\Omega^{(i)}_T} \leqslant c\tau^{1/2}\left(|r^*|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau} + |W_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau}\right)$$

и

$$|r^*|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau} \leqslant c|r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} \leqslant c|W_1 - W_2|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau},$$

то

$$\sum_{i=1}^2 \left|M'_i(r^*, W_i + q_i r^*)\right|^{(\alpha)}_{s-2,\Gamma_\tau} \leqslant c\tau^{1/2} \sum_{i=1}^2 |W_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau},$$

и разрешимость задачи (4.15) следует из принципа сжатых отображений.

Итак, теорема 4.2 доказана при малых $T = \tau$. Чтобы продолжить решение на больший промежуток времени, положим

$$V_i^{(1)}(y,t) = V_i(y,t), \quad r^{(1)}(y,t) = r(y,t), \quad t \in (0,\tau),$$

$$V_i^{(1)}(y,t)$$
$$= 40V_i\left(y, \tau - \frac{t-\tau}{2}\right) - 135V_i\left(y, \tau - \frac{t-\tau}{3}\right) + 96V_i\left(y, \tau - \frac{t-\tau}{4}\right), \quad t \in (\tau, 2\tau)$$

$$r^{(1)}(y,t)$$
$$= 40r\left(y, \tau - \frac{t-\tau}{2}\right) - 135r\left(y, \tau - \frac{t-\tau}{3}\right) + 96r\left(y, \tau - \frac{t-\tau}{4}\right), \quad t \in (\tau, 2\tau)$$

Легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned}
&\tau^{-s/2} \sup_{t\in(\tau,2\tau)} |V_i^{(1)}|_{\Omega_i} + \tau^{\frac{2+\alpha-s}{2}} [V_i^{(1)}]^{(2+\alpha)}_{\Omega_i\times(\tau,2\tau)} \\
&\leqslant c\left(\tau^{-s/2} \sup_{t\in(\tau/2,\tau)} |V_i|_{\Omega_i} + \tau^{\frac{2+\alpha-s}{2}} [V_i]^{(2+\alpha)}_{\Omega_i\times(\tau/2,\tau)}\right) \\
&\leqslant c|V_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega_\tau^{(i)}}.
\end{aligned}$$

Аналогичное неравенство справедливо для $r^{(1)}$, кроме того,

$$\begin{aligned}
&\tau^{-\frac{s-1}{2}} \sup_{t\in(\tau,2\tau)} |r_t^{(1)}|_\Gamma + \tau^{\frac{2+\alpha-s}{2}} [r_t^{(1)}]^{(1+\alpha)}_{\Gamma\times(\tau,2\tau)} \\
&\leqslant c\tau^{-\frac{s-1}{2}} \sup_{t\in(\tau/2,\tau)} |r_t|_\Gamma + \tau^{\frac{2+\alpha-s}{2}} [r_t]^{(1+\alpha)}_{\Gamma\times(\tau/2,\tau)} \\
&\leqslant c|r_t|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau}.
\end{aligned}$$

Будем искать решение задачи (4.2)–(4.6) при $t > \tau$ в виде $V_i = V_i^{(1)} + V_i^{(2)}$,

$r = r^{(1)} + r^{(2)}$, $i = 1, 2$, где функции $V_i^{(2)}$, $r^{(2)}$ удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{gathered}
L^{(i)} V_i^{(2)} - q_i L^{(i)} r^{(2)*} + M_i(r_i^{(2)*}, V_i^{(2)}) \\
= f - L^{(i)} V_i^{(1)} + q_i L^{(i)} r^{(1)*} - M_i(r^{(1)*}, V_i^{(1)}) \equiv f_{i1}, \quad y \in \Omega_i, \ t > \tau, \quad i = 1, 2, \\
V_i^{(2)}\big|_{t=\tau} = 0, \quad r^{(2)}\big|_{t=\tau} = 0, \\
V_1^{(2)}\big|_S = 0, \quad V_1^{(2)} - V_2^{(2)}\big|_\Gamma = 0, \\
b^{(1)} \cdot (\nabla V_1^{(2)} - q_1 \nabla r^{(2)*}) - b^{(2)} \cdot (\nabla V_2^{(2)} - q_2 \nabla r^{(2)*}) + g \cdot \nabla_\Gamma r^{(2)} + g_0 r^{(2)}\big|_\Gamma \\
= \varphi - b^{(1)} \cdot (\nabla V_1^{(1)} - q_1 \nabla r^{(1)*}) + b^{(2)} \cdot (\nabla V_2^{(1)} - q_1 \nabla r^{(1)*}) - g \cdot \nabla_\Gamma r^{(1)} + g_0 r^{(1)}\big|_\Gamma \\
\equiv \varphi_1, \\
r_t^{(2)} + k b^{(1)} \cdot (\nabla V_1^{(2)} - q_1 \nabla r^{(2)*}) + h \cdot \nabla_\Gamma r^{(2)} + h_0 r^{(2)}\big|_\Gamma \\
= \psi - r_t^{(1)} - k b^{(1)} \cdot (\nabla V_1^{(1)} - q_1 \nabla r^{(1)*}) - h \cdot \nabla_\Gamma r^{(1)} - h_0 r^{(1)}\big|_\Gamma \\
\equiv \psi_1.
\end{gathered}
$$

Так как $\varphi_1\big|_{t=\tau} = \psi_1\big|_{t=\tau} = 0$, $f_{i1}\big|_{t=\tau} = 0$, то эта задача имеет единственное решение $V_i^{(2)} \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha}_{2+\alpha}(\Omega_i \times (\tau, 2\tau))$, $r^{(2)} \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha}_{2+\alpha}(\Gamma \times (\tau, 2\tau))$, которое оценивается через функции $f_{i1}, \varphi_1, \psi_1$ по неравенству (4.9). Следовательно, решение задачи (4.2)-(4.6) продолжено на интервал $t \in (\tau, 2\tau)$ и оценка (4.9) справедлива при $T = 2\tau$. Рассуждая также дальше, мы исчерпаем весь интервал $(0, T)$ за конечное число шагов. •

§5. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Теоремы 1.1 и 1.2 сводятся к доказательству разрешимости задач (2.26) и (2.27) на малом интервале времени, которое проводится с помощью метода сжатых отображений. Рассмотрим задачу (2.27). Прежде всего оценим функции $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$, пользуясь формулами

$$
(\mathcal{L}_\rho^{(i)} - \mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)}) V_i = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0 + \lambda r} V_i \, d\lambda,
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\rho^{(i)} - \mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)} - \delta \mathcal{L}_{\rho_0}^{(i)}) U_{0i} &= \int_0^1 \left[\frac{d}{d\lambda} \mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0 + \lambda r} U_{0i} - \frac{d}{d\mu} \mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0 + \mu r} U_{0i} \Big|_{\mu=0} \right] d\lambda \\
&= \int_0^1 (1 - \mu) \frac{d^2}{d\mu^2} \mathcal{L}^{(i)}_{\rho_0 + \mu r} U_{0i} \, d\mu
\end{aligned}
$$

и аналогичными формулами для $S_\rho - S_{\rho_0}$, $S_\rho - S_{\rho_0} - \delta S_{\rho_0}$, $A_{mp} - A^{(0)}_{mp}$, $A_{mp} - A^{(0)}_{mp} - \delta A^{(0)}_{mp}$. Для любой функции $f(\rho, \nabla\rho)$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda} f(\rho_0 + \lambda r, \nabla\rho_0 + \lambda\nabla r)\\
&\qquad = f'_\rho(\rho_0 + \lambda r, \nabla\rho_0 + \lambda\nabla r) r + \sum_{j=1}^{n} f'_{\rho_{y_j}}(\rho_0 + \lambda r, \nabla\rho_0 + \lambda\nabla r) r_{y_j},\\
&\frac{d^2}{d\mu^2} f(\rho_0 + \mu r, \nabla\rho_0 + \mu\nabla r)\\
&\qquad = f''_{\rho\rho}(\rho_0 + \lambda r, \nabla\rho_0 + \mu\nabla r) r^2\\
&\qquad\quad + 2\sum_{j=1}^{n} f''_{\rho\rho_{y_j}}(\rho_0 + \mu r, \nabla\rho_0 + \mu\nabla r) r r_{y_j}\\
&\qquad\quad + \sum_{j,m=1}^{n} f''_{\rho_{y_j},\rho_{y_m}}(\rho_0 + \mu r, \nabla\rho_0 + \mu\nabla r) r_{y_j} r_{y_m}.
\end{aligned}$$

Пользуясь этим правилом и оценками гёльдеровских норм произведений двух функций [6], получим

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{H}(r,V)|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau} + |\mathcal{K}(r,V)|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau}\\
&\qquad \leqslant c\tau^{\frac{s-1}{2}} |r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau}\big(|r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} + |\nabla V_1|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau} + |\nabla V_2|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau}\big), \qquad (5.1)\\
&|\mathcal{F}_i|^{(\alpha)}_{s-2,\Omega^{(i)}_\tau} \leqslant c\tau^{\frac{s-1}{2}} |r^*|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau}\big(|r^*|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau} + |V_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau}\big)\\
&\qquad \leqslant c\tau^{\frac{s-1}{2}} |r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau}\big(|r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} + |V_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau}\big), \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

если $\max|r^*(y,t)|$ и $\max|\nabla r^*(y,t)|$ настолько малы, что $\det J$ и $N\cdot J^{-T} n_0$ строго положительны. Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\big|\mathcal{H}(r,V) - \mathcal{H}(r',V')\big|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau}\\
&\quad + \big|\mathcal{K}(r,V) - \mathcal{K}(r',V')\big|^{(1+\alpha)}_{s-1,\Gamma_\tau} + \sum_{i=1}^{2}\big|\mathcal{F}_i(r,V_i) - \mathcal{F}_i(r',V'_i)\big|^{(\alpha)}_{s-2,\Omega^{(i)}_\tau}\\
&\quad \leqslant c\tau^{\frac{s-1}{2}}\Big(|r - r'|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} + \sum_{i=1}^{2}|V_i - V'_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau}\Big)\\
&\qquad \times \Big(|r|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} + |r'|^{(2+\alpha)}_{s,\Gamma_\tau} + \sum_{i=1}^{2}|V_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau} + \sum_{i=1}^{2}|V'_i|^{(2+\alpha)}_{s,\Omega^{(i)}_\tau}\Big), \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

где $V = (V_1, V_2)$.

Наконец, отметим, что в силу (2.16)

$$\psi = -\rho_{0t} - c_0\lambda_1 \frac{n_0 \cdot \mathcal{A}^{(0)}\nabla U_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T).$$

Рассмотрим линеаризованную задачу

$$\begin{gathered}
L_{\rho_0}^{(i)} V_i - (N \cdot J_0^{-T} \nabla U_{0i}) L_{\rho_0}^{(i)} r^* + m_i(r^*, V_i) = f_i(y,t) \quad \text{в } \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1,2, \\
V_i\big|_{t=0} = 0, \quad V_1\big|_S = 0, \quad [V]\big|_\Gamma = 0, \\
n_0 \cdot \mathcal{A}^{(0)}\big[\lambda\big(\nabla V - (N \cdot J_0^{-T}\nabla U_0)\nabla_\Gamma r\big)\big] \\
- (N \cdot J_0^{-T} n_0)\big([\lambda \nabla U_0]\mathcal{A}^{(0)}\nabla_\Gamma r\big)\big|_\Gamma + g_0 r = \varphi(y,t), \\
r_t + c_0\lambda_1\bigg(\frac{n_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0} \cdot \mathcal{A}^{(0)}\big(\nabla V_1 - (N \cdot J_0^{-T}\nabla U_0)\nabla r\big) - \mathcal{A}^{(0)}\nabla U_1 \cdot \nabla_\Gamma r \\
+ \frac{n_0 \cdot \mathcal{A}^{(0)}\nabla U_0}{N \cdot J_0^{-T} n_0}(J^{-1}N \cdot \nabla_\Gamma r)\bigg) + h_2 r\bigg|_\Gamma \\
= \omega(y,t).
\end{gathered} \tag{5.4}$$

В силу теоремы 4.2 она однозначно разрешима. Действительно, условия б), в) §4 выполнены с $\varkappa = s-1$, а неравенства (1.11), (1.12) гарантируют выполнение условий теоремы 4.2 относительно функции ϕ_2 (1.13) (см. замечание 3.1). Поэтому задача (2.27) может быть рассмотрена как задача об определении неподвижной точки некоторого нелинейного оператора в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, элементами которого являются функции $v = (V_1, V_2, r)$, $V_i \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T^{(i)})$, $r \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_T)$, $r_t \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ с нормой

$$|v|_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{2} |V_i|_{s,\Omega_T^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |r|_{s,\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + |r_t|_{s-1,\Gamma_T}^{(1+\alpha)}.$$

Пусть $v' = (V_1', V_2', r') \in \mathcal{X}$ — решение задачи (5.4) с $f_i = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = \psi$ (ψ задана в (2.25)) и пусть $\mathcal{O}(\widetilde{v})$ — нелинейный оператор, сопоставляющий элементу $\tilde{v} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{r}) \in \mathcal{X}$ решение задачи (5.4) с $f_i = \mathcal{F}_i(\widetilde{r}, \widetilde{V}_i)$, $\varphi = \mathcal{H}(\widetilde{r}, \widetilde{V})$, $\omega = \mathcal{K}(\widetilde{r}, \widetilde{V})$. Ясно, что задача (2.27) эквивалентна уравнению

$$v = v' + \mathcal{O}(v) \equiv Q(v).$$

Покажем, что это уравнение при достаточно малом τ разрешимо в шаре $\mathcal{B}_R = \{\|v\|_{\mathcal{X}} \leqslant 2\|v'\|_{\mathcal{X}} \equiv R\}$ пространства $\mathcal{X}$.

Так как для любого $v \in B_R$

$$\max_\Gamma |r(y,t)| + \max_\Gamma |\nabla r(y,t)| \leqslant c\tau^{\frac{s-1}{2}} \|v\|_{\mathcal{X}} \leqslant c\tau^{\frac{s-1}{2}} R,$$

то можно выбрать τ таким малым, чтобы $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ были определены при $t \in (0,\tau)$ для $v \in \mathcal{B}_R$. В силу (5.1), (5.2)

$$|\mathcal{Q}(v)|_{\mathcal{X}} \leqslant |v'|_{\mathcal{X}} + c_1\tau^{\frac{s-1}{2}} |v|^2_{\mathcal{X}},$$

и если $c_1\tau^{\frac{s-1}{2}} R \leqslant \frac{1}{2}$, то оператор $\mathcal{D}(v)$ переводит шар $\mathcal{B}_R$ в себя, кроме того, в силу (5.3) он является оператором сжатия в этом шаре при малом τ. Таким образом, однозначная разрешимость уравнения (5.5) в $\mathcal{B}_R$ и оценка решения следуют из принципа сжатых отображений. •

Теорема 1.1 и оценка (1.10) доказываются точно так же (см. также [6, 8]).

Приложение. Доказательство предложений 3.1 и 3.4

П.1. Доказательство предложения 3.1. Предложение 3.1 вытекает из следующей более общей теоремы.

Теорема А.1. *Предположим, что функция $V(\zeta, s, x_n)$ удовлетворяет следующим условиям.*

1) *Она аналитична по p и $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ в области* (3.2).

2) *Она однородна, т.е.*

$$V(\lambda\zeta, \lambda^2 p, x_n) = \lambda^d V(\zeta, p, \lambda x_n), \quad \lambda > 0, \ x_n > 0. \tag{П.1}$$

3) *Она подчиняется неравенству*

$$|V(\zeta, p, x_n)| \leqslant ce^{-bx_n}, \quad b > 0, \tag{П.2}$$

при любых ζ, p из области (3.2), *удовлетворяющих условию $|p| + \xi^2 = 1$.*

Тогда для ядра

$$K(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi} d\xi \int\limits_{-i\infty+a}^{i\infty+a} e^{pt} V(\xi, p, x_n) dp, \quad a > 0, \tag{П.3}$$

справедлива оценка

$$|K(x,t)| \leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}} e^{-\frac{bx^2}{t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \ t > 0, \tag{П.4}$$

а при $t < 0$ *имеем* $K(x,t) = 0$.

Кроме того, если $V(\xi,p,0)$ *аналитична по* p *на всей комплексной плоскости, и* $V(\xi,p,x_n)$ *имеет производную* $\partial V/\partial x_n$*, удовлетворяющую неравенству* (П.2), *то*

$$|K(x,t)| \leqslant c x_n t^{-\frac{n+2+d}{2}} e^{-\frac{bx^2}{t}}.$$

Доказательство. Отметим, что из условий (П.1), (П.2) следует оценка

$$|V(\zeta,p,x_n)| \leqslant c(|p|+\xi^2)^{d/2} e^{-b(|p|+\xi^2)^{1/2} x_n}. \tag{П.5}$$

В (П.3) произведем замену $p' = p+\delta\xi^2$ и заменим новый контур интегрирования по p' на первоначальный (это возможно в силу аналитичности функции V и ее быстрого убывания при больших $|p|$). Обозначив снова переменные интегрирования через ξ, p, мы получим

$$K(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi-\delta\xi^2 t} d\xi \int\limits_{-i\infty+a}^{i\infty+a} e^{pt} V'(\xi,p,x_n)dp,$$

где функция $V'(\xi,p,x_n) = V(\xi,p-\delta\xi^2,x_n)$ также удовлетворяет условию (П.5). Далее, введем новые переменные $\xi' = \xi\sqrt{t}$, $p' = pt$ и, пользуясь еще раз теоремой Коши, заменим контур интегрирования по p', $\operatorname{Re} p' = a$ контуром $\ell(a) = \{\operatorname{Re} p' + \kappa|\operatorname{Im} p'| = a\}$. На основании условия (П.1) будем иметь

$$K(x,t) = t^{-\frac{n+1+d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{iy'\cdot\xi-\delta\xi^2} d\xi \int\limits_{\ell(a)} e^{p} V'(\xi,p,y_n)dp, \tag{П.6}$$

где $y' = x'/\sqrt{t}$, $y_n = x_n/\sqrt{t}$. Так как число $a > 0$ произвольное, положим $a \leqslant 1$. Воспользовавшись неравенством (П.5), получим

$$|K(x,t)| \leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\delta\xi^2} d\xi \int\limits_0^\infty e^{a-\kappa r}(r+a+|\xi|^2)^{\frac{d}{2}} dr \leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}}.$$

Из этой оценки вытекает (П.4) при $|y| \leqslant 1$ (т.е. при $|x| \leqslant \sqrt{t}$), потому что в этом случае $e^{-\frac{b|x|^2}{t}} \geqslant c_1$. Предположим, что $|y| \geqslant 1$, и рассмотрим два случая: $y_n \geqslant |y'|$ и $|y'| \geqslant y_n$ (при этом $y_n \geqslant 1/\sqrt{2}$ и $|y'| \geqslant 1/\sqrt{2}$ соответственно). В первом случае произведем в (П.6) замену переменных $\xi' = \frac{\xi}{y_n}$, $p' = \frac{p}{y_n^2}$. Это дает

$$K(x,t) = t^{-\frac{n+1+d}{2}} y_n^{n+1+d} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{iy'\cdot\xi' y_n - \delta\xi'^2 y_n^2} d\xi' \int\limits_{\ell(a)} e^{py_n^2} V'(\xi', p', y_n^2) dp$$

и

$$|K(x,t)| \leqslant c\left(\frac{y_n^2}{t}\right)^{\frac{n+1+d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\delta\xi^2 y_n^2} d\xi$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{(a-\kappa r)y_n^2}\, e^{-b/2\sqrt{a}y_n^2 - c(r+\xi^2)^{1/2}y_n^2}\, (a+r+\xi^2)^{d/2} dr.$$

Если постоянная a достаточно мала, то $a - \frac{b}{2}\sqrt{a} \leqslant -\frac{b}{4}\sqrt{a}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} |K(x,t)| &\leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}} y_n^{n+1+d} e^{-\frac{b}{4}\sqrt{a}y_n^2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\delta\xi^2 y_n^2} d\xi \int\limits_0^\infty e^{-ary_n^2}(a+r+\xi^2)^{d/2} dr \\ &\leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}} e^{-\frac{b}{4}\sqrt{a}y_n^2}(1+a^{1/2}y_n)^{\max(d,0)} \\ &\leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}} e^{-\frac{b}{16}\sqrt{a}y^2}, \end{aligned}$$

т.е. оценка (П.4) доказана для случая $|y_n| \geqslant |y'|$.

В случае $y_n \leqslant |y'|$ мы произведем замену переменных $\xi' = \xi/|y'|$, $p' = p/|y'|^2$ в (П.6), что приводит к

$$K(x,t) = t^{-\frac{n+1+d}{2}} |y'|^{n+1+d} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{iy'\cdot\xi|y'| - \delta\xi^2|y'|^2} d\xi \int\limits_{\ell(a)} e^{p|y'|^2} V'(\xi, p, y_n|y'|) dp.$$

Теперь мы воспользуемся аналитичностью функции V' по ζ и перенесем каждый контур интегрирования по ζ_j (т.е. действительную ось комплексной плоскости ζ_j) параллельно самому себе на постоянную величину ρ_j, такую, что

$$|\rho| = \sqrt{\rho_1^2 + \cdots + \rho_{n-1}^2} = \frac{\delta_1 a^{1/2}}{(1+\kappa^2)^{1/4}}$$

(тогда необходимое условие $|\eta| \leqslant \delta_1 |p|^{1/2}$ будет выполнено). В результате получим

$$K(x,t) = t^{-\frac{n+1+d}{2}} |y'|^{n+1+d} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{iy'\cdot(\xi+i\rho)|y'| - \delta\sum_{j=1}^{n-1}(\xi_j + i\rho_j)^2 |y'|^2} d\xi$$

$$\times \int\limits_{\ell(a)} e^{p|y'|^2} V'(\xi + i\rho, p, y_n|y'|) ds.$$

Вектор ρ мы выбираем параллельным y', т.е. $y' \cdot \rho = |y'||\rho| = |y'|\frac{\delta_1 a^{1/2}}{(1+x^2)^{1/4}}$, заметим также, что при достаточно малом a

$$e^{-|y'|^2|\rho|-\delta\rho^2|y'|^2+a|y'|^2} \leqslant e^{-\frac{1}{2}|y'|^2|\rho|} = e^{-\frac{\delta_1 a^{1/2}}{2(1+\kappa^2)^{1/4}}|y'|^2}$$

и, следовательно,

$$|K(x,t)| \leqslant ct^{-\frac{n+1+d}{2}}|y'|^{n+1+d}e^{-\frac{1}{2}|y'|^2|\rho|}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\delta\xi^2|y'|^2d\xi}$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-\kappa r|y'|^2}(a+r+\xi^2)^{d/2}dr$$

$$\leqslant c\ t^{-\frac{n+1+d}{2}}\ e^{-\frac{1}{2}|y'|^2|\rho|}(1+a^{1/2}|y'|)^{\max(d,0)},$$

т.е. оценка (П.4) также справедлива и для случая $y_n \leqslant |y'|$.

При $t<0$ мы имеем

$$\int\limits_{-i\infty+a}^{i\infty+a} e^{pt}V(\xi,p,x_n)dp = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_R(a)} e^{pt}Vdp = 0,$$

где $L_R(a) = \{|p| = R, \mathrm{Re}\, p > a\}$, и $K(x,t) = 0$.

И наконец, если $V(\xi,p,0)$ является аналитической функцией по p на всей комплексной плоскости, то

$$K(x,t)\Big|_{x_n=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi-\delta\xi^2t}d\xi\int\limits_{\ell(a)} e^{pt}V'(\xi,p,0)dp = 0$$

и ядро $K(x,t)$ может быть представлено в виде

$$K(x,t) = K(x_0,t) + \int\limits_{\lambda(x_0,x)}\nabla K(z,t)d\ell_z = \int\limits_{\lambda(x_0,x)}\nabla K(z,t)d\ell_z,$$

где $x_0 = (x',0)\frac{|x|}{|x'|}$ (если $|x'| = 0$, то x_0 — произвольная точка на плоскости $x_n = 0$ такая, что $|x_0| = |x|$), а $\lambda(x_0,x)$ — наикратчайшая дуга на сфере $|z| = |x|$ с концами в точках x_0 и x. Ясно, что $|\lambda(x_0,x)| \leqslant cx_n$, поэтому

$$|K(x,t)| \leqslant cx_n\sup_{\lambda(x_0,x)}|\nabla K(z,t)| \leqslant cx_nt^{-\frac{n+2+d}{2}}e^{-\frac{b|x|^2}{t}},$$

так как ∇K удовлетворяет неравенству (П.4) с $d+1$ вместо d.

Теорема доказана полностью, и предложение 3.1 является следствием теоремы, так как $V(\xi,p,x_n) = e^{-\phi(\xi,p)x_n}$ удовлетворяет условиям 1)–3) с $d=0$, а дифференцирование ядра K приводит к умножению функции V на p^k, $(i\xi)^j$, ϕ^{j_n}. •

П.2. Доказательство предложения 3.4. На основании (3.4), (3.5) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{D}_t^k G(x',t)|dx' \leqslant c\int\limits_0^t e^{-\frac{b\lambda^2}{t-\lambda}}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{1+k}}.$$

Запишем интеграл справа в виде суммы двух интегралов по промежуткам $(0,t/2)$ и $(t/2,t)$ соответственно и оценим каждый из них. Имеем

$$\int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{b\lambda^2}{t-\lambda}}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{1+k}} \leqslant \left(\frac{2}{t}\right)^{1+k}\int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{b\lambda^2}{t}}d\lambda \leqslant \frac{c}{t^{1/2+k}}, \tag{П.7}$$

$$\int\limits_{t/2}^{t} e^{-\frac{b\lambda^2}{t-\lambda}}\frac{d\lambda}{t-\lambda} \leqslant t^{1/2}\int\limits_{t/2}^{t} e^{-\frac{b\lambda^2}{t-\lambda}}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}} \leqslant t^{1/2}\int\limits_0^t e^{-\frac{bt^2}{4\xi}}\frac{d\xi}{\xi^{3/2}} \leqslant \frac{c}{t^{1/2}}, \tag{П.8}$$

что доказывает (3.12) при $k=0$, и

$$\int\limits_{t/2}^{t} e^{-\frac{b\lambda^2}{t-\lambda}}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{1+k}} \leqslant \int\limits_{t/2}^{t} e^{-\frac{bt^2}{4(t-\lambda)}}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{1+k}} \leqslant \frac{c}{t^{2k}}, \tag{П.9}$$

если $k=1$ или $k=2$. Другая оценка может быть получена при помощи формул

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x',t)}{\partial t} &= \int\limits_0^t \left(-\frac{\partial K(x',\lambda,t-\lambda)}{\partial\lambda} + \left.\frac{\partial K(x',x_n,t-\lambda)}{\partial x_n}\right|_{x_n=\lambda}\right)d\lambda\\ &= K(x',0,t) + \int\limits_0^t \left.\frac{\partial K(x,t-\lambda)}{\partial x_n}\right|_{x_n=\lambda} d\lambda,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 G(x',t)}{\partial t^2} = \frac{\partial K(x',0,t)}{\partial t} + \left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} + \int\limits_0^t \left.\frac{\partial^2 K(x,t-\lambda)}{\partial x_n^2}\right|_{x_n=\lambda} d\lambda,$$

которые влекут за собой

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\frac{\partial G(x',t)}{\partial t}\right| dx' \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{b|x'|^2}{t}} \frac{dx'}{t^{\frac{n+1}{2}}} + \int_0^t \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{\frac{n+2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{b(|x'|^2+\lambda^2)}{t-\lambda}} dx' \right)$$
$$\leqslant c\left(\frac{1}{t} + \int_0^t e^{-\frac{b\lambda^2}{t-\lambda}} \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}}\right)$$
$$\leqslant \frac{c}{t}, \tag{П.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\frac{\partial^2 G(x',t)}{\partial t^2}\right| dx' \leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{b|x'|^2}{t}} \frac{dx'}{t^{\frac{n+3}{2}}} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{b|x'|^2}{t}} \frac{dx'}{t^{\frac{n+2}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{t^2} \int_0^{t/2} e^{-\frac{2b\lambda^2}{t}} d\lambda + \int_{t/2}^t e^{-\frac{bt^2}{4(t-\lambda)}} \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^2} \right)$$
$$\leqslant c\left(\frac{1}{t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}\right). \tag{П.11}$$

Пользуясь неравенствами (П.7), (П.9), (П.10) при $t \leqslant 1$ и (П.7), (П.8) при $t \geqslant 1$, получим (3.12) также при $k = 1, 2$. •

Список литературы

[1] Базалий Б. В., *Задача Стефана*, Докл. АН УССР. Сер. А **1986**, №11, 3–7.

[2] Базалий Б. В., Дегтярев С. П., *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости*, Мат. сб. **132** (1987), №1, 3–19.

[3] Белоносов В. С., Зеленяк Т. И., *Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений*, НГУ, Новосибирск, 1975.

[4] Бижанова Г. И., *Решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в гёльдеровском пространстве функций*, Изв. АН Казах. ССР. Сер. физ.-мат. **1991**, 21–27.

[5] Бижанова Г. И., *Оценки решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гёльдеровских нормах.* I, II, Изв. АН Респуб. Казахстан. Сер. физ.-мат. **1992**, 7–13; **1993**, №1, 11–17.

[6] Бижанова Г. И., *Исследование разрешимости в весовом гёльдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **213** (1994), 14–47.

[7] Бижанова Г. И., *Решение в весовом пространстве Гёльдера начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в условии сопряжения*, Алгебра и анализ **6** (1994), 64–94.

[8] Бижанова Г. И., *Решение в весовом гёльдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области*, Алгебра и анализ **7** (1995), 46–76.

[9] Бижанова Г. И., Солонников В. А., *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гёльдеровском пространстве функций*, Алгебра и анализ **5** (1993), 109–142.

[10] Бижанова Г. И., Солонников В. А., *О некоторых модельных задачах для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевых условиях*, Алгебра и анализ **6** (1994), 30–50.

[11] Бородин М. А., *Существование классического решения в многомерной задаче Стефана на конечном промежутке времени*, Укр. мат. ж. **44** (1992), №12, 1652–1657.

[12] Hanzawa Ei-ichi, *Classical solutions of the Stefan problem*, Tôhoku Math. J. (2) **33** (1981), no. 3, 297–335.

[13] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[14] Мейрманов А. М., *О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений*, Мат. сб. **112** (1980), 170–192.

[15] Мейрманов А. М., *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана*, Докл. АН СССР **249** (1979), 1309–1312.

[16] Muskat M., *The flow of homogeneous fluids through porous media*, Michigan, 1937.

[17] Радкевич Е. В., *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей*, Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики, АН СССР, СО, Ин-т математики, Новосибирск, 1986, сс. 85–111.

[18] Радкевич Е. В., *Об условиях существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса–Томсона)*, Мат. сб. **183** (1992), 77–101.

[19] Rodrigues J. F., Solonnikov V. A., Yi. F., *On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems*, Math. Ann. **315** (1999), 61–95.

[20] Солонников В. А., *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **83** (1965), 3–162.

[21] Солонников В. А., *Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи*, Препринт ЛОМИ №Р-2-77, ЛОМИ, Л., 1977.

[22] Солонников В. А., *Оценки решений некоторых некоэрцитивных начально-краевых задач с помощью теоремы о мультипликаторах в интегралах Фурье–Лапласа*, Функциональные и численные методы математической физики, Наук. думка, Киев, 1988, сс. 220–228.

[23] Веригин Н. Н., *Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости основания гидротехнических сооружений*, Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук **1952**, 674–687.

Алматинский
государственный университет им. Абая
Казахстан,
480100, г. Алматы, пр. Достык, 13

Поступило 24 февраля 2000 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия