Б.Г.Габдулхаев, Р.Н.Сухов

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДОВ КВАДРАТУР И КУБАТУР ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В п.5 § 2 работы [1] был предложен новый способ обоснования прямых методов решения характеристических сингулярных интегральных уравнений. Данная работа посвящена применению этого способа к полным сингулярным интегральным уравнениям. При этом существенно используются как результаты, так и обозначения работ [1, 2].

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (с.и.у.) второго рода вида

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\ t\in\gamma, \quad (1)$$

где a, b, h (по обоим аргументам) и f – известные непрерывные функции, γ – единичная окружность с центром в начале координат, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши – Лебегу.

Следуя [3], приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде интерполяционного полинома

$$\varphi_n(t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} c_k \mathcal{D}_n(s-s_k)=\sum_{k=-n}^{n} b_k t^k,\quad t=e^{is}, \quad (2)$$

где $\mathcal{D}_n(s)=\frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})s\cdot\operatorname{cosec}\frac{s}{2}$ – ядро Дирихле порядка n. Неизвестные коэффициенты $c_k=\varphi_n(t_k)$, $k=\overline{0,2n}$ будем определять из системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.)

$$a_j c_j+\frac{b_j}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\alpha_j c_k+\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} t_k h_{jk} c_k=f_j,\quad j=\overline{0,2n}, \quad (3)$$

где

$$a_j=a(t_j),\ b_j=b(t_j),\ f_j=f(t_j),\ h_{jk}=h(t_j,\tau_k),$$

$$t=e^{is},\quad t_k=e^{is_k},\quad s_k=\frac{2k\pi}{2n+1},\quad \alpha_{jk}=1-i\beta_{jk},$$

$$\beta_{jk}=tg\,\frac{s_j-s_k}{4}\quad \text{или}\quad ctg\,\frac{s_k-s_j}{4}$$

при $j-k$ четном или нечетном соответственно.

Схема (I) – (3) есть вычислительная схема метода механических квадратур (м.м.к.) решения уравнения (I). В дальнейшем с.и.у. (I) будем рассматривать как линейное операторное уравнение [4,5] вида

$$K\varphi \equiv a\varphi + bS\varphi + Th\varphi = f\ , \tag{I'}$$

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}\ ,\quad Th\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

в пространстве квадратично суммируемых функций $X = L_2 = L_2(\gamma)$ с нормой

$$\| x \|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\ x(\tau)\ |^2 d\sigma \right\}^{1/2}\ ,\quad \tau = e^{i\sigma}\ .$$

Обозначим через P_n оператор, который любой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный полином вида (2) по узлам $t_k = e^{is_k}$, $k = \overline{0\ ,\ 2n}$. Известно [6], что этот оператор неограничен в L_2, но $P_n \to E\ (n \to \infty)$ сильно[I)], и

$$\| P_n \|_{C\to L_2} = 1\ ,\quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{4}$$

Через P_n^t обозначим оператор P_n, примененный по переменной t.

Пусть $\mathbb{R}^N$, $N = 2n+1$, есть N-мерное эвклидово пространство N-периодических векторов с обычной нормой. Как и в [7], каждой функции $x \in C(\gamma)$ поставим в соответствие вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $\bar{x} = (x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_{2n}))$ с нормой $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^N} \equiv \|x(t)\|_{2,N}$, где узлы t_j определены в (3). Обозначим $X_n \subset L_2$ множество всех тригонометрических полиномов степени n вида (2) с L_2-нормой. Тогда (см. лемму I [7])

$$\| x_n \|_2^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\ x_n(t_k)|^2\ ,\quad x_n \in X_n\ ,\quad N = 2n+1\ .$$

Заметим, что пространство тригонометрических полиномов степени n с L_2-нормой и N-мерное эвклидово пространство N-периодических векторов $\mathbb{R}^N$, $N = 2n+1$, с обычной нормой линейно изометричны. Поэтому в этом случае норма $\|\cdot\|_{2,N}$ может быть заменена также на норму $\|\cdot\|_2$.

Тогда с.л.а.у. (3) эквивалентна операторному уравнению

I) Здесь E – оператор вложения из $C(\gamma)$ в $L_2(\gamma)$.

$$K_n \varphi_n \equiv P_n^t (a\varphi_n + bS\varphi_n + P_n^t T P_n^\tau (h\varphi_n)) = P_n^t f \;, \qquad (3')$$

где K_n – линейный оператор в $(2n+1)$ –мерном пространстве X_n полиномов с L_2 –нормой.

I°. Рассмотрим вначале характеристическое с.и.у.

$$K_0 \varphi \equiv a\varphi + bS\varphi = f \;. \qquad (5)$$

Приближенное решение ищем в виде (2), коэффициенты которого определяются из системы

$$a_j c_j + \frac{b_j}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \alpha_{jk} c_k = f_j \;, \quad j = \overline{0, 2n} \;, \qquad (6)$$

что эквивалентно операторному уравнению

$$K_{0n} \varphi_n \equiv P_n (a\varphi_n + bS\varphi_n) = P_n f \;. \qquad (6')$$

<u>Случай А</u>: $|b/a| < 1$. Тогда уравнения (5) и (6′) эквивалентны соответственно уравнениям

$$A\varphi \equiv \varphi + \mathcal{U}\varphi = y \quad (\varphi, y \in L_2) \;, \qquad (7)$$

$$A_n \varphi_n \equiv \varphi_n + \mathcal{U}_n \varphi_n = P_n y \quad (\varphi_n, P_n y \in X_n) \;, \qquad (8)$$

где $\mathcal{U}\varphi = \frac{b}{a} S\varphi$, $\mathcal{U}_n \varphi_n = P_n \mathcal{U}\varphi_n$, $y = \frac{f}{a}$, а A_n – линейный оператор в X_n .

Как показано в работе [I], в рассматриваемом случае точное уравнение (7) и соответствующее ему приближенное уравнение (8) при любых $n = 1, 2, \ldots$ однозначно разрешимы, причем

$$\|A^{-1}\| \le (1-q)^{-1}, \; \|A_n^{-1}\| \le (1-q)^{-1} \;, \quad n = 1, 2, \ldots \;, \qquad (9)$$

где $q = \|b/a\|_C < 1$. Решения $\varphi^*(t)$ уравнения (7) и $\varphi_n^*(t)$ уравнения (8) могут быть найдены методом последовательных приближений, т.е. как пределы итерационных последовательностей соответственно

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{j+1} = y - \frac{b}{a} S\varphi^j \;, \quad \varphi^0 = y \;, \quad j = 0, 1, \ldots \\ &\varphi_n^{j+1} = P_n y - P_n\left(\frac{b}{a} S\varphi_n^j\right), \quad \varphi_n^0 = P_n y \;, \quad j = 0, 1, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

при $j \to \infty$. При этом скорость сходимости итерационных последовательностей оценивается соотношениями соответственно

$$\|\varphi^* - \varphi^j\| \leq \frac{q^{j+1}\|y\|}{1-q} , \|\varphi_n^* - \varphi_n^j\| \leq \frac{q^{j+1}\|P_n y\|}{1-q} \qquad (II)$$

Пусть функции $a, b, f \in H_\alpha^{(r)}(r \geq 0, 0<\alpha \leq 1)$, т.е. имеют r — непрерывных производных, причем r -е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. В силу следствия I из теоремы 6 главы I монографии [8] погрешность приближенного решения $\varphi_n^*(t)$ может быть оценена следующим образом:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = \|(E - A_n^{-1} P_n \psi)(\varphi^* - P_n \varphi^*)\|_2 \leq$$

$$\leq \|\varphi^* - P_n \varphi^*\|_2 + \|A_n^{-1} P_n \psi(\varphi^* - P_n \varphi^*)\|_2 \leq$$

$$\leq 2E_n(\varphi^*)_C + \|A_n^{-1}\| \cdot \| P_n \left[\frac{b}{a} S(\varphi^* - P_n \varphi^*)\right]\|_{L_2} \leq$$

$$\leq 2E_n(\varphi^*)_C + \frac{q}{1-q}\left\{\|S(\varphi^* - T_n)\|_{2,N} + \|SP_n(\varphi^* - T_n)\|_{2,N}\right\} ,$$

где $E_n(\varphi^*)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi^*(t)$ тригонометрическими полиномами степени n , T_n — пока произвольный тригонометрический полином степени не выше n .

Так как [7] $\|SP_n x\|_{2,N} \leq \|x\|_{2,N}$, $x \in C(\gamma)$, то

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \leq 2E_n(\varphi^*)_C + \frac{q}{1-q}\left\{\|S(\varphi^* - T_n)\|_{2,N} + \right.$$

$$\left. + \|\varphi^* - T_N\|_{2,N}\right\} , \quad T_n \in X_n , \quad N = 2n+1 .$$

Выберем $T_n \equiv Q_n \varphi^*$ так, что $SQ_n \varphi^* = Q_n S \varphi^*$ и $\|\varphi^* - T_n\|_{2,N} = O\{E_n(\varphi^*)_C\}$ (о существовании такого полинома см. [9], а также [8], замечание на с.105). Тогда

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \leq 2E_n(\varphi^*)_C + \frac{q}{1-q}\left\{\|\varphi^* - Q_n \varphi^*\|_C + \right.$$

$$\left. + \|\bar{\varphi}^* + Q_n \bar{\varphi}^*\|_C\right\} , \quad \bar{\varphi}^* \equiv S\varphi^* .$$

Из того, что $a, b, f \in W^r H^\alpha$, следует, что

$$\varphi^*, S\varphi^* \in \begin{cases} W^r H^\alpha & \text{при } 0<\alpha<1, \\ W^r Z & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

где через Z обозначен класс Зигмунда [10]. Отсюда получаем следующие оценки[1] [11]:

$$\|\bar\varphi^* - Q_n\bar\varphi^*\|_C \leq \lambda \|\varphi^* - Q_n\varphi^*\|_C \leq$$
$$\leq \{d_1 N^{-r-\alpha} \text{ при } 0<\alpha<1;\ d_2 N^{-r-\alpha} \text{ при } \alpha=1\},\ r \geq 0,$$

где λ – положительная постоянная, не зависящая от n. Поэтому при $a, b, f \in H_\alpha^{(r)} \equiv W^r H^\alpha$

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O(N^{-r-\alpha}),\ r+\alpha>0. \tag{12}$$

Отметим, что если $a, b, f \in W^r H^\omega$, где $\omega(t)$ – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий при $r = 0$ дополнительному условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty,$$

то

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O\left\{\frac{1}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\right\}.$$

Из соотношений (11) и (12) получаем следующую оценку скорости сходимости квадратурно-итерационного метода (5), (6), (10):

$$\|\varphi^* - \varphi_n^j\|_2 = O\{N^{-r-\alpha} + q^{j+1}\},\ r+\alpha>0. \tag{13}$$

Параметры j и N в (13) суть произвольные натуральные числа. Выберем $j = j_0 = j_0(N)$ так, чтобы при этом правая часть (13) стала минимальной (см., например, [12]). Это будет при

$$j_0(N) = \left[\!\left[-(r+\alpha)\,\frac{\ln N}{\ln q} - 1 \right]\!\right].^{2)} \tag{14}$$

---

1) Здесь и далее $d_1, d_2, \ldots$ – вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n.

2) $[\![\rho]\!]$ – целая часть числа $\rho \geq 0$.

Тогда из (I3) и (I4) получаем оценки

$$\| \varphi^* - \varphi_n^{j_0} \|_2 = O(q^{j_0+1}) = O(N^{-r-\alpha}) .$$

Итак, доказана

Т е о р е м а I. Пусть $X = L_2$ и $q = \| b/a \|_C < 1$. Тогда уравнение (5) и с.л.а.у. (6) при любых натуральных n однозначно разрешимы, причем при $j \to \infty$ итерационная последователь - ность $\{\varphi_n^j\}$ сходится к единственному решению φ^* уравнения (5) в смысле $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_n^j = \lim\limits_{j\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^j = \varphi^*$ со скоростью (I3). При этом существует оптимальный номер итерации $j = j_0$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^{j_0} = \varphi^*$ и $\| \varphi^* - \varphi_n^{j_0} \|_2 = O(q^{j_0+1}) = O(N^{-r-\alpha})$.

Случай Б: $|a/b| < 1$. Заменой $\psi = S\varphi$, $\psi_n = S\varphi_n$ сведем этот случай к случаю А. Имеем

$$a S^{-1} \psi + b\psi = f , \tag{I5}$$

$$P_n (a S^{-1} \psi_n + b\psi_n) = P_n f . \tag{I6}$$

Уравнения (I5), (I6) эквивалентны соответственно уравнениям

$$B\psi \equiv \psi + \frac{a}{b} S\psi = y , \quad y = \frac{f}{b} ,$$

$$B_n \psi_n \equiv \psi_n + P_n \left(\frac{a}{b} S \psi_n \right) = P_n y .$$

Относительно операторов B и B_n справедливы те же утвержде - ния, что и относительно операторов A и A_n (см. [I]). Спра - ведливость их следует из того, что

$$S^{-1} \psi_n \in X_n , \quad S^2 = E , \quad \| S^{-1} \| = 1 , \quad S^{-1} : L_2 \to L_2 .$$

Таким образом, уравнения (I5) и (I6) однозначно разрешимы и их решения можно найти как пределы итерационных последовательнос- тей соответственно

$$\psi^{j+1} = y - \frac{a}{b} S \psi^j , \quad y = \frac{f}{b} , \quad j = 0, 1, \ldots ;$$

$$\psi_n^{j+1} = P_n y - P_n \left(\frac{a}{b} S \psi_n^j \right) , \quad j = 0, 1, \ldots$$

при $j \to \infty$. При этом справедлива оценка

$$\|\varphi^*-\varphi_n^j\|_2=O\left\{N^{-r-\alpha}+q^{j+1}\right\}\ ,\quad r+\alpha>0\ ,$$

где $\varphi^*(t)$ – точное решение уравнения (I5).

Обозначив снова через $\varphi^*(t)$ точное решение уравнения (5), с учетом $S^2=E$ можно теперь записать следующую оценку:

$$\|\varphi^*-\varphi_n^j\|_2=O\left\{N^{-r-\alpha}+q^{j+1}\right\}\ . \qquad (I7)$$

Сформулируем доказанную теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть $X=L_2$ и $q=\|a/b\|_C<1$. Тогда точное уравнение (5) и соответствующая ему приближенная система (6) при любых $n=1,2,\ldots$ однозначно разрешимы, и имеет место сходимость итерационной последовательности $\{\varphi_n^j\}$ при $n,j\to\infty$ к точному решению $\varphi^*(t)$ уравнения (5) со скоростью (I7).

Случай В: $|b/a|=1$. Уравнения (5) и (6) эквивалентны соответственно уравнениям

$$R\varphi\equiv\varphi+e^{i\alpha}S\varphi=y\ , \qquad (I8)$$

$$R_n\varphi_n\equiv\varphi_n+e^{i\alpha}S\varphi_n=P_ny\ , \qquad (I9)$$

где $y=f/a$, $\alpha=const\neq k\pi$.

В этом случае при однозначной разрешимости уравнения (I8) приближенное уравнение (I9), а следовательно , и с.л.а.у. (6) разрешимы для всех $n=1,2,\ldots$ и приближенные решения $\varphi_n^*=R_n^{-1}P_ny=R^{-1}P_ny$ сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*=R^{-1}y$ со скоростью

$$\|\varphi^*-\varphi_n^*\|_2\le\|R^{-1}\|_2\|y-P_ny\|_2=O\left\{E_n(y)_C\right\}\ .$$

Если $y\in H_\alpha^r(r\geq 0,0<\alpha\le 1)$, то [I0] $E_n(y)_C\le d_3n^{-r-\alpha}$, поэтому $\|\varphi^*-\varphi_n^*\|_2=O(n^{-r-\alpha})$, $r+\alpha>0$.

В заключение данного пункта сделаем следующее замечание общего характера. Может оказаться, что для коэффициентов исходного уравнения не выполняется ни один из случаев А, Б и В. Например, в отдельных точках $t\in\gamma$ функции $a(t)$ или $b(t)$ принимают нулевые значения. Но и в этом случае заменой

$$\varphi(t)=\lambda\,x(t)+\mu S(x;t)\ ,\quad t\in\gamma\ , \qquad (20)$$

где λ , μ – произвольные постоянные, задачу приближенного решения уравнения (5) можно свести к одному из рассмотренных случаев. Действительно, подставив (20) в (5), имеем уравнение относительно новой искомой функции $x(t)$:

$$K_0\varphi = (\lambda a + \mu b)x + (\mu a + \lambda b)Sx \equiv a_1 x + b_1 Sx = f ,$$

где

$$a_1(t) = \lambda a(t) + \mu b(t) ,\; b_1(t) = \mu a(t) + \lambda b(t) .$$

Выберем λ и μ такими, чтобы для функций $a_1(t)$ и $b_1(t)$ выполнялся один из случаев А, Б или В.

2^0. Теперь вернемся к полному уравнению (I). Для краткости изложения рассмотрим только случай А, т.е. $|b/a| < 1$. Тогда уравнения (I$'$) и (3$'$) эквивалентны следующим уравнениям соответственно:

$$\varphi + \frac{b}{a} S\varphi + \frac{1}{a} Tk\varphi = \frac{f}{a} = y , \tag{21}$$

$$\varphi_n + P_n\left(\frac{b}{a} S\varphi_n\right) + P_n\left\{\frac{1}{a} T P_n^{\tau}(k\varphi_n)\right\} = P_n y . \tag{22}$$

Введем обозначения:

$$A\varphi \equiv \varphi + \frac{b}{a} S\varphi ,\quad A_n\varphi_n = P_n A\varphi_n ,\quad \frac{k}{a} = g .$$

Тогда уравнения (21), (22) перепишутся соответственно так:

$$A\varphi + Tg\varphi = y \quad (\varphi, y \in L_2) , \tag{23}$$

$$A_n\varphi_n + P_n^t T P_n^{\tau}(g\varphi_n) = P_n y \,(\varphi_n, P_n y \in X_n) . \tag{24}$$

Из сказанного в п.I^0 имеем

$$\| A^{-1}y - A_n^{-1} P_n y \|_2 \to 0 ,\quad n \to \infty ,\quad y \in C(\gamma) ,$$

т.е. имеет место сильная сходимость последовательности операторов $A_n^{-1}P_n : C \to L_2$ со скоростью

$$\| A^{-1}y - A_n^{-1} P_n y \|_2 \leq \begin{cases} d_4 n^{-\tau-\alpha} H(\psi;\alpha) , & 0 < \alpha < 1 ; \\ d_5 n^{-\tau-1} Z(\psi) , & \alpha = 1 \end{cases} \tag{25}$$

для $a, b, f \in W^{\tau}H^{\alpha}$, где $H(\psi;\alpha)$ и $Z(\psi)$ – наименьшие постоянные соответственно Гёльдера и Зигмунда для $\psi = (A^{-1}y)^{(\tau)}$.

Уравнения (23), (24) эквивалентны уравнениям соответственно

$$U\varphi \equiv \varphi + A^{-1} Tg\varphi = A^{-1} y , \tag{26}$$

$$U_n\varphi_n \equiv \varphi_n + A_n^{-1} P_n^t T P_n^{\tau}(g\varphi_n) = A_n^{-1} P_n y . \tag{27}$$

Тогда для $\forall \varphi_n \in X_n$ имеем

$$\| \mathcal{U}\varphi_n - \mathcal{U}_n\varphi_n \|_2 = \| A^{-1} T g\varphi_n - A_n^{-1} P_n^t T P_n^{\tau}(g\varphi_n) \|_2 \leq$$

$$\leq \| A^{-1} T g\varphi_n - A_n^{-1} P_n T g\varphi_n \|_2 +$$

$$+ \| A_n^{-1} P_n^t T g\varphi_n - A_n^{-1} P_n^t T P_n^{\tau}(g\varphi_n) \|_2 .$$

С использованием неравенства (25) для первого слагаемого получаем оценку:

$$\| A^{-1} T g\varphi_n - A_n^{-1} P_n T g\varphi_n \|_2 \leq d_6 n^{-r-\alpha} \cdot$$

$$\cdot H\{ (A^{-1} T g\varphi_n)^{(r)}; \alpha \} \leq d_7 n^{-r-\alpha} \| \varphi_n \|_2 .$$

Нетрудно показать, что для $\varphi_n \in X_n$ справедливо тождество $A^{-1}T(g\varphi_n) = T(A^{-1}g)\varphi_n$, где оператор A^{-1} применяется к функции $g(t,\tau)$ по внешней переменной t.

Оценим второе слагаемое. С помощью соотношений (4),(9), неравенства Буняковского и результатов работ [10, 13] получим

$$\| A_n^{-1} P_n^t T g\varphi_n - A_n^{-1} P_n^t T P_n^{\tau}(g, \varphi_n) \|_2 =$$

$$= \| A_n^{-1} P_n^t T [(g - P_n^{\tau} g)\varphi_n] \|_2 \leq \| A_n^{-1} \| \cdot \| P_n^t \|_{C \to L_2} \cdot$$

$$\cdot \max_{t \in \gamma} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} | g(t,\tau) - P_n^{\tau} g(t,\tau) |^2 d\sigma \right\}^{1/2} \cdot \| \varphi_n \|_2 \leq$$

$$\leq d_8 E_n^{\tau}(g)_C \| \varphi_n \|_2 \leq d_9 n^{-r-\alpha} \| \varphi_n \|_2 , \quad \varphi_n \in X_n .$$

Таким образом,

$$\| \mathcal{U} - \mathcal{U}_n \| \leq d_{10} n^{-r-\alpha}, \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_n : X_n \to L_2 .$$

Тогда в соответствии с теоремой 7 гл. I монографии [8] при однозначной разрешимости уравнения (26) для всех n, начиная с некоторого, приближенное уравнение (27) также однозначно разрешимо. Кроме того, т.к. для правых частей уравнений (26) и (27) выполняется (25), то в силу той же теоремы имеет место средне - квадратическая сходимость приближенных решений φ_n^* к точному решению φ^* уравнения (26) со скоростью

$$\|\varphi^*-\varphi_n^*\|_2=O\left\{\|\mathcal{U}-\mathcal{U}_n\|+\|A^{-1}y-A_n^{-1}P_n y\|_2\right\}=O(n^{-r-\alpha}).$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. Пусть уравнение (I) однозначно разрешимо в пространстве L_2 при любой правой части $f\in W^r H^\alpha (r\geq 0, 0<\alpha\leq 1)$.

Тогда при достаточно больших n приближенная система (3) также однозначно разрешима и приближенные решения $\varphi_n^*(t)$ [I)] сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*(t)$ уравнения (I) со скоростью

$$\|\varphi^*-\varphi_n^*\|_2=O(n^{-r-\alpha}), \quad r+\alpha>0 .$$

3°. Обобщим теперь результаты, полученные в предыдущих пунктах, на случай полного двумерного с.и.у. вида

$$a_1(t,\tau)\varphi(t,\tau)+\frac{a_2(t,\tau)}{\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\xi,\tau)d\xi}{\xi-t}+\frac{a_3(t,\tau)}{\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\varphi(t,\eta)d\eta}{\eta-\tau}+$$

$$+\frac{a_4(t,\tau)}{\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(\xi-t)(\eta-\tau)}+\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2}h(t,\tau;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=y(t,\tau), \quad t\in\gamma_1, \quad \tau\in\gamma_2, \tag{28}$$

где $a_j(t,\tau)$, $j=\overline{1,4}$, $h(t,\tau;\xi,\eta)$ и $y(t,\tau)$ – известные непрерывные функции по всем своим аргументам, γ_j $(j=1;2)$ – единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости z_j, $\varphi(t,\tau)$ – искомая функция, а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши [14].

Следуя [2], приближенное решение уравнения (28) будем искать в виде интерполяционного полинома

$$\varphi_{nm}(t,\tau)=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2m}c_{kj}\mathcal{D}_n(\theta-\theta_k)\mathcal{D}_m(\sigma-\sigma_j), \tag{29}$$

$$t=e^{i\theta}\in\gamma_1, \quad \tau=e^{i\sigma}\in\gamma_2,$$

I) То есть $\varphi_n(t)$ из (2) при $c_k=c_k^*$, где $\{c_k^*\}$ – решение с.л.а.у. (3)

где $\mathcal{D}_\ell(s)$ – ядро Дирихле порядка ℓ :

$$\mathcal{D}_\ell(s) = \frac{1}{2} \sin(2\ell+1)\frac{s}{2} \cdot \operatorname{cosec}\frac{s}{2} \quad .$$

Неизвестные коэффициенты $c_{kj} = \varphi_{nm}(t_k, \tau_j), k = \overline{0,2n}$, $j = \overline{0,2m}$, будем определять из с.л.а.у.

$$a_{1kj} c_{kj} + \frac{a_{2kj}}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{2n} b_{k\ell} c_{\ell j} + \frac{a_{3kj}}{2m+1} \sum_{r=0}^{2m} d_{jr} c_{kr} +$$

$$+ \frac{a_{4kj}}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{r=0}^{2m} b_{k\ell} d_{jr} c_{\ell r} + \qquad (30)$$

$$+ \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{r=0}^{2m} \xi_\ell \eta_r h_{kj;\ell,r} c_{\ell r} = y_{kj} \quad ,$$

$$k = \overline{0,2n} \quad , \; j = \overline{0,2m} \quad ,$$

где

$$a_{skj} = a_s(t_k, \tau_j) \; , \; s = \overline{1,4} \quad , \; y_{kj} = y(t_k, \tau_j) \; ,$$

$$h_{kj;\ell r} = h(t_k, \tau_j; \xi_\ell, \eta_r), \; t = e^{i\theta}, \tau = e^{i\sigma}, \xi = e^{i\mu}, \eta = e^{i\nu},$$

$$t_k = e^{i\theta_k}, \; \tau_j = e^{i\sigma_j}, \; \xi_\ell = e^{i\mu_\ell} \; , \; \eta_r = e^{i\nu_r} \quad ,$$

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1} \; , \; \sigma_j = \frac{2j\pi}{2m+1} \; , \; \mu_\ell = \frac{2\ell\pi}{2n+1} \; , \; \nu_r = \frac{2r\pi}{2m+1} \; ,$$

$b_{k\ell} = 1 - i\,tg\,\dfrac{\theta_k - \mu_\ell}{4}$ или $1 - i\,ctg\,\dfrac{\mu_\ell - \theta_k}{4}$ при $k-\ell$ четном или нечетном соответственно, $d_{jr} = 1 - i\,tg\,\dfrac{\sigma_j - \nu_r}{4}$ или $1 - i\,ctg\,\dfrac{\nu_r - \sigma_j}{4}$ при $j - r$ четном или нечетном соответственно.

Таким образом, получили вычислительную схему метода механических кубатур (м.м.кб.) для уравнения (28).

Обозначив

$$S_1\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\xi,\tau)d\xi}{\xi-t},\ S_2\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\varphi(t,\eta)d\eta}{\eta-\tau},$$

$$S_{12}\varphi=\frac{1}{\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(\xi-t)(\eta-\tau)},\ T\!h\varphi=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2}h(t,\tau;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

с.и.у. (28) можно записать как линейное операторное уравнение [2] вида

$$K\varphi\equiv a_1\varphi+a_2S_1\varphi+a_3S_2\varphi+a_4S_{12}\varphi+T\!h\varphi=y \tag{28'}$$

в пространстве $X=L_2=L_2(\gamma_1\times\gamma_2)$ суммируемых с квадратом функций от двух переменных с нормой

$$\|\varphi\|_2=\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(t,\tau)|^2d\theta d\sigma\right\}^{1/2},\ t=e^{i\theta},\ \tau=e^{i\sigma}.$$

Пусть P_{nm} – оператор, ставящий в соответствие любой непрерывной функции ее двойной интерполяционный полином вида (29) по узлам $t_k=e^{i\theta_k}$, $\tau_j=e^{i\sigma_j}$ ($k=\overline{0,2n}$, $j=\overline{0,2m}$). Известно [15], что

$$\|P_{nm}\|_{C\to L_2}=1\quad(n,m=1,2,\ldots) \tag{31}$$

и $P_{nm}\to E$ сильно при $n,m\to\infty$, $E-P_{nm}:C\to L_2$.

Обозначим через $\mathbb{R}^{NM}$ $N\cdot M$-мерное эвклидово пространство векторов $\bar{x}=\{x(t_k,\tau_j)\}_{k=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,M}}$ ($t_k\in\gamma_1$, $\tau_j\in\gamma_2$) с обычной нормой, где узлы (t_k,τ_j) определены в (30). Аналогично одномерному случаю каждой функции $x(t,\tau)\in C(\gamma_1\times\gamma_2)$ поставим в соответствие вектор $\bar{x}\in\mathbb{R}^{NM}$ с нормой $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^{NM}}=\|x\|_{2,N,M}$. Обозначим через X_{nm} множество всех тригонометрических полиномов степени (n,m), $n=[\![N/2]\!]$, $m=[\![M/2]\!]$ вида (29) с L_2-нормой.

Аналогично лемме I работы [7] можно доказать, что

$$\|x_{nm}\|_2=\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|x_{nm}(t_k,\tau_j)|^2,\quad x_{nm}\in X_{nm}. \tag{32}$$

С.л.а.у. (30) эквивалентна операторному уравнению [2]

$$K_{nm}\varphi_{nm}\equiv P_{nm}(a_1\varphi_{nm}+a_2S_1\varphi_{nm}+a_3S_2\varphi_{nm}+$$

$$+a_4 S_{12}\varphi_{nm}) + P_{nm}^{t\tau} T P_{nm}^{\xi\eta}(h\varphi_{nm}) = P_{nm} y,$$

где через $P_{nm}^{t\tau}$ $(P_{nm}^{\xi\eta})$ обозначен оператор P_{nm}, примененный относительно переменных $t,\tau \in \gamma_1 \times \gamma_2$ $(\xi,\eta \in \gamma_1 \times \gamma_2)$.

Пусть вначале $h \equiv 0$. Тогда характеристическое уравнение и соответствующее ему приближенное уравнение имеют соответственно вид

$$a_1\varphi + a_2 S_1\varphi + a_3 S_2\varphi + a_4 S_{12}\varphi = y, \tag{33}$$

$$P_{nm}(a_1\varphi_{nm} + a_2 S_1\varphi_{nm} + a_3 S_2\varphi_{nm} + a_4 S_{12}\varphi_{nm}) = P_{nm} y. \tag{34}$$

Потребуем, чтобы хотя бы при одном k $(k=\overline{1,4})$ выполнялось условие

$$\sum_{\ell=1,\ell\neq k}^{4} \left\| \frac{a_\ell}{a_k} \right\|_C \leq q < 1 \quad . \tag{35}$$

Рассмотрим, например, случай $k = 1$ (другие случаи рассматриваются аналогично).

Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а 4. Пусть $X = L_2$ и выполняется соотношение (35). Тогда уравнение (33) и соответствующее ему приближенное уравнение (34) при любых натуральных n и m однозначно разрешимы в L_2, и их решения φ^* и φ^*_{nm} можно найти как пределы итерационных последовательностей соответственно

$$\varphi^{j+1} = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} S_1\varphi^j - \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi^j - \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi^j, \quad j=0,1,\ldots \tag{36}$$

$$\varphi^{j+1}_{nm} = P_{nm}\left(\frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} S_1\varphi^j_{nm} - \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi^j_{nm} - \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi^j_{nm}\right), \quad j=0,1,\ldots \tag{37}$$

При этом итерационная последовательность $\{\varphi^j_{nm}\}$ сходится к точному решению φ^* уравнения (33) в смысле

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \lim_{j\to\infty} \varphi^j_{nm} = \lim_{j\to\infty} \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \varphi^j_{nm} = \varphi^* \tag{38}$$

со скоростью, которая при a_j $(j=\overline{1,4})$, $y \in H^{(r,\ell)}_{\alpha,\beta}$ оценивается соотношением[I]

[I] Через $H^{(r,\ell)}_{\alpha,\beta}$ $(r,\ell \geq 0, 0<\alpha,\beta \leq 1)$ обозначен класс функций, имеющих r и ℓ непрерывных производных относительно первой и второй переменной соответственно, причем r-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, а ℓ-е – с показателем β.

$$\|\varphi^* - \varphi^j_{nm}\|_2 = O\left\{ n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} + q^{j+1} \right\} . \tag{39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае уравнения (33) и (34) эквивалентны уравнениям соответственно

$$A\varphi \equiv \varphi + \frac{a_2}{a_1} S_1\varphi + \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi + \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi = \frac{y}{a_1} = f , \tag{40}$$

$$\begin{aligned} A_{nm}\varphi_{nm} &\equiv \varphi_{nm} + P_{nm}\left(\frac{a_2}{a_1} S_1\varphi_{nm} + \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi_{nm} + \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi_{nm} \right) = \\ &= P_{nm}\frac{y}{a_1} = P_{nm} f . \end{aligned} \tag{41}$$

В силу требования (35) и равенства единице норм операторов S_1, S_2, S_{12} (см., например, в [15]) имеем

$$\|\psi\|_{L_2 \to L_2} \equiv \left\| \frac{a_2}{a_1} S_1 + \frac{a_3}{a_1} S_2 + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \right\| \le \sum_{\ell=2}^{4} \left\| \frac{a_\ell}{a_1} \right\|_C \le q < 1 .$$

Следовательно, уравнение (40) однозначно разрешимо, и решение φ^* может быть найдено методом последовательных приближений, причем $\|A^{-1}\| \le (1-q)^{-1}$, а итерационная последовательность (36) сходится к точному решению $\varphi^*(t,\tau)$ уравнения (40) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi^j\|_2 \le \frac{q^{j+1}\|f\|_2}{1-q} , \quad \varphi^0 = f , \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Аналогичное утверждение для уравнения (41) вытекает из следующей леммы (см., например, в [2]).

Л е м м а. Пусть $a(t,\tau) \in C(\gamma_1 \times \gamma_2)$ с нормой $\|a\|_C = \max\limits_{\substack{t\in\gamma_1 \\ \tau\in\gamma_2}} |a(t,\tau)|$. Тогда для $\forall \varphi_{nm} \in X_{nm}$ справедлива оценка

$$\|P_{nm}(aS_\ell\varphi_{nm})\|_2 \le \|a\|_C \|\varphi_{nm}\|_2 \qquad (\ell = 1, 2, 12) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для узлов $t_k = e^{i\theta_k}$, $\tau_j = e^{i\sigma_j}$, $\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $\sigma_j = \frac{2j\pi}{2m+1}$ из (32) с учетом того, что $S_\ell\varphi_{nm} \in X_{nm}$ и $\|S_\ell\| = 1 (\ell = 1, 2, 12)$, имеем

$$\|P_{nm}(aS_\ell\varphi_{nm})\|_2^2 = \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} |(aS_\ell\varphi_{nm})(t_k, \tau_j)|^2 \le$$

$$\leq \|a\|_C^2 \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} |S_\ell(\varphi_{nm};\, t_k, \tau_j)|^2 =$$

$$= \|a\|_C^2 \cdot \|S_\ell \varphi_{nm}\|_{2,N,M}^2 = \|a\|_C^2 \cdot \|S_\ell \varphi_{nm}\|_2^2 \leq \|a\|_C^2 \|\varphi_{nm}\|_2^2 .$$

Лемма доказана.

Далее, для $\forall \varphi_{nm} \in X_{nm}$ имеем

$$\|\psi_{nm}\varphi_{nm}\|_2 = \|P_{nm}\, \psi \varphi_{nm}\|_2 \leq \left\|P_{nm}\left(\frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi_{nm}\right)\right\|_2 +$$

$$+\left\|P_{nm}\left(\frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi_{nm}\right)\right\|_2 + \left\|P_{nm}\left(\frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi_{nm}\right)\right\|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=2}^{4} \left\|\frac{a_j}{a_1}\right\|_C \cdot \|\varphi_{nm}\|_2 \leq q \|\varphi_{nm}\|_2 < \|\varphi_{nm}\|_2 .$$

Поэтому уравнение (4I) также однозначно разрешимо, причем

$$\|A_{nm}^{-1}\| \leq (1-q)^{-1}, \quad n, m = 1, 2, \ldots , \tag{42}$$

и его решение $\varphi_{nm}^*(t,\tau)$ может быть определено как предел итерационной последовательности (37), которая сходится в L_2 к своему пределу со скоростью

$$\|\varphi_{nm}^* - \varphi_{nm}^j\|_2 \leq \frac{q^{j+1}\|P_{nm} f\|}{1-q}, \varphi_{nm}^0 = P_{nm} f, \; j = 0,1,\ldots \tag{43}$$

Тогда в силу упомянутого выше следствия из монографии [8] приближенные решения $\varphi_{nm}^*(t,\tau)$ сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*(t,\tau)$ уравнения (40) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_{nm}^*\|_2 = \|(E - A_{nm}^{-1} P_{nm} \psi)(\varphi^* - P_{nm}\varphi^*)\|_2 .$$

С использованием операторов Бернштейна – Рогозинского и Фавара, исследованных в работе [9], путем рассуждений, аналогичных рассуждениям в одномерном случае, можно получить следующую оценку погрешности приближенного решения:

$$\|\varphi^* - \varphi_{nm}^*\|_2 = O\left\{n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}\right\} . \tag{44}$$

Из соотношений (43) и (44) следует оценка (39), а из нее – соотношение (38).

Т е о р е м а 5. Если в условиях теоремы 4

$$j_0 = j_{опт} = \left[\!\left[\frac{1}{\ln q} \ln (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) - 1 \right]\!\right] , \tag{45}$$

то итерационный процесс (37) сходится к единственному решению φ^* уравнения (33) в том смысле, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \varphi_{nm}^{j_0} = \varphi^* , \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \varphi_{nm}^{j} \neq \varphi^* , \; j \neq j_0 , \tag{46}$$

причем

$$\| \varphi^* - \varphi_{nm}^{j_0} \|_2 = O\left\{ n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} \right\} = O(q^{j_0+1}) , \tag{47}$$

и оценки (47) будут неулучшаемыми в смысле

$$\| \varphi^* - \varphi_{nm}^{j_0} \|_2 \leq \| \varphi^* - \varphi_{nm}^{j} \| \quad (n, m = 1, 2, \ldots) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правая часть формулы (39) будет минимальной, если

$$n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} = q^{j+1} . \tag{48}$$

Обозначая через j_0 целую неотрицательную часть (относительно j) решения уравнения (48), получим соотношение (45), откуда и из (39) имеем оценки (47), которые с учетом (39) приводят к (46).

Вернемся к полному уравнению (22). Снова потребуем, чтобы

$$\left\| \frac{a_2}{a_1} \right\|_C + \left\| \frac{a_3}{a_1} \right\|_C + \left\| \frac{a_4}{a_1} \right\|_C \leq q < 1 .$$

Тогда уравнение (28) (или (28$'$)) и с.л.а.у. (30) эквивалентны уравнениям соответственно

$$\varphi + \frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi + \frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi + \frac{1}{a_1} T h \varphi = \frac{y}{a_1} = f , \tag{49}$$

$$\begin{gathered} \varphi_{nm} + P_{nm} \left(\frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi_{nm} + \frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi_{nm} + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi_{nm} \right) + \\ + P_{nm} \left\{ \frac{1}{a_1} T P_{nm}^{\xi \eta} (h \varphi_{nm}) \right\} = P_{nm} f . \end{gathered} \tag{50}$$

Введем обозначения:

$$A\varphi \equiv \varphi + \mathscr{U}\varphi , \; \mathscr{U}\varphi \equiv \frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi + \frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi ,$$

$$A_{nm}\varphi_{nm} \equiv P_{nm} A\varphi_{nm} = \varphi_{nm} + P_{nm} \mathcal{U}\varphi_{nm}, \; k/a_1 = g.$$

Тогда уравнения (49), (50) перепишутся соответственно так:

$$A\varphi + Tg\varphi = f \qquad (\varphi, f \in L_2), \tag{51}$$

$$A_{nm}\varphi_{nm} + P_{nm}^{t\tau} T P_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) = P_{nm} f. \tag{52}$$

Из сказанного выше в этом пункте

$$A_{nm}^{-1} P_{nm} f \to A^{-1} f, \; n\to\infty, m\to\infty, f\in C(\gamma_1 \times \gamma_2)$$

в $L_2 = L_2(\gamma_1 \times \gamma_2)$, т.е. имеет место сильная сходимость последовательности $A_{nm}^{-1} P_{nm}: C \to L_2$ со скоростью

$$\| A^{-1} f - A_{nm}^{-1} P_{nm} f \|_2 \le d_{11} M\cdot(n^{-2-\alpha} + m^{-\ell-\beta}), \tag{53}$$

где $a_\ell\ (\ell=\overline{1,4})$, $y \in H_{\alpha,\beta}^{(r,\ell)}$ $(r,\ell \geq 0, \; 0<\alpha,\beta \le 1)$,

$M = H_t(\psi_{t^r}^{(r)};\alpha) + H_\tau(\psi_{\tau^\ell}^{(\ell)};\beta)$ при $\alpha<1, \beta<1$;

$M = Z_t(\psi_{t^r}^{(r)}) + Z_\tau(\psi_{\tau^\ell}^{(\ell)})$ при $\alpha=1, \beta=1$;

$M = H_t(\psi_{t^r}^{(r)};\alpha) + Z_\tau(\psi_{\tau^\ell}^{(\ell)})$ при $\alpha<1, \beta=1$;

$M = Z(\psi_{t^r}^{(r)}) + H_\tau(\psi_{\tau^\ell}^{(\ell)};\beta)$ при $\alpha=1, \beta<1$.

Уравнения (51), (52) можно записать в следующем эквивалентном виде соответственно:

$$\mathcal{U}\varphi \equiv \varphi + A^{-1} Tg\varphi = A^{-1} f,$$

$$\mathcal{U}_{nm}\varphi_{nm} \equiv \varphi_{nm} + A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} T P_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) = A_{nm}^{-1} P_{nm} f.$$

Для любого $\varphi_{nm} \in X_{nm}$ оценим норму разности $\mathcal{U}\varphi_{nm} - \mathcal{U}_{nm}\varphi_{nm}$:

$$\| \mathcal{U}\varphi_{nm} - \mathcal{U}_{nm}\varphi_{nm} \|_2 = \| A^{-1} Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} T P_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) \|_2 \le$$

$$\le \| A^{-1} Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} Tg\varphi_{nm} \|_2 +$$

$$+ \| A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} T P_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) \|_2 .$$

Первое слагаемое с учетом (53) дает нам оценку

$$\| A^{-1} T g \varphi_{nm} - A^{-1}_{nm} P^{t\tau}_{nm} T g \varphi_{nm} \|_2 \le d_{12} M \cdot$$
$$\cdot (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \le d_{13} (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \cdot \| \varphi_{nm} \|_2 \quad .$$

Оценку для второго слагаемого получим с учетом (31), (42) и с помощью результатов работ [10, 13]:

$$\| A^{-1}_{nm} P^{t\tau}_{nm} T g \varphi_{nm} - A^{-1}_{nm} P^{t\tau}_{nm} T P^{\xi\eta}_{nm} (g \varphi_{nm}) \|_2 =$$
$$= \| A^{-1}_{nm} P^{t\tau}_{nm} T (g - P^{\xi\eta}_{nm} g) \varphi_{nm} \|_2 \le$$
$$\le \| A^{-1}_{nm} \| \cdot \| P_{nm} \|_{C_{2\pi} \to L_{2\pi 2}} \cdot \| T \|_{L_2 \to C} \cdot \| \varphi_{nm} \|_2 \cdot$$
$$\cdot \max_{t,\tau} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} | g(t,\tau;\xi,\eta) - P^{\xi\eta}_{nm} g(t,\tau;\xi,\eta) |^2 d\xi d\eta \right\}^{1/2} \le$$
$$\le d_{14} (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \cdot \| \varphi_{nm} \|_2 \quad , \varphi_{nm} \in X_{nm} \quad .$$

Тогда $\| u - u_{nm} \| = O(n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta})$, $u - u_{nm} : X_{nm} \to X$.

Теперь, используя теорему 7 гл.I монографии [8], можно показать, что имеет место[I]

Т е о р е м а 6. Пусть уравнение (28) однозначно разрешимо в пространстве L_2 при любой правой части $y \in L_2$ и выполнено условие (35). Тогда при достаточно больших n и m с.л.а.у. (30) также однозначно разрешима и приближенные решения $\varphi^*_{nm}(t,\tau)$ сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*(t,\tau)$ уравнения (28) со скоростью

$$\| \varphi^* - \varphi^*_{nm} \|_2 = O(n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \quad .$$

Л и т е р а т у р а

I. Г а б д у л х а е в Б. Г. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I // Изв. вузов. Матем.- 1971.- № 11.- С.33 - 44.

[I] Здесь, как и выше, $a_j(\cdot,\cdot) (j = \overline{1,4})$, $f(\cdot,\cdot)$ и $h(t,\tau;\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot;\xi,\eta) \in H^{(r,\ell)}_{\alpha,\beta}$ $(r \ge 0, \ell \ge 0, 0 < \alpha \le 1, 0 < \beta \le 1)$.

2. Г а б д у л х а е в Б. Г. Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений, I // Изв. вузов. Матем. – I975. – № 7. – С.30 – 4I; П, I976. – № I. – С.30 – 4I.

3. Г а б д у л х а е в Б. Г. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // ДАН СССР. – I968. – Т.I79. – № 2. – С.260 – 263.

4. М и х л и н С. Г. Сингулярные интегральные уравнения // УМН. – I948. – Т.3. – Вып. 3. – С.29 – II2.

5. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, I968. – 5I2 с.

6. Г а б д у л х а е в Б. Г., Д у ш к о в П. Н. Метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – I974. – № I2. – С.3 – I4.

7. Г а б д у л х а е в Б. Г. Квадратурно-итерационный метод решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений// Изв. вузов. Матем. – I974. – № II. – С.3 – I5.

8. Г а б д у л х а е в Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во КГУ, I980. – 232 с.

9. К и р о в Г. Х. Върху апроксимацията на функции и сингулярни интеграли с обобщени суми: Дис. ... канд.физ.-мат.наук.- София, I975. – II0 с.

I0. Н а т а н с о н И. Н. Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, I949. – 688 с.

II. С т е ч к и н С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР, сер. матем. – I95I. – Т.I5.

I2. Г а б д у л х а е в Б. Г. Решение операторных уравнений методом уточняющих итераций // Изв. вузов. Матем. – I974. – № 5. – С.66 – 80.

I3. Г а б д у л х а е в Б. Г., Д у ш к о в П. Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Матем. – I973. – № 7. – С.I2 – 24.

I4. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, I977. – 640 с.

I5. Г а б д у л х а е в Б. Г. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов, I // Изв. Матем. ин-т при Българск. АН. – София, I970. – Т.2. – С.I8I – I96.