

В.М. АДАМЯН, Н.С. ПУШЕК

**ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА
С СИНГУЛЯРНЫМ ПРИТЯГИВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 26 VI 1979)

1. Пусть $\omega(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в интервале $(0, \infty)$, удовлетворяющая условиям:

а) $\omega(x) > 0$ при $x > 0$ и в некотором интервале $(0, a_0)$, $0 < a_0 < \infty$, не возрастает;

б) для любого $a > 0$

$$(1) \quad \int_a^{\infty} \sqrt{\omega(x)} dx + \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}} \left| \frac{\omega''(x)}{\omega(x)} - \frac{5}{4} \frac{[\omega'(x)]^2}{\omega^2(x)} \right| dx < \infty;$$

в) для некоторого $\epsilon > 0$

$$(2) \quad \lim_{a \rightarrow 0} a^\epsilon \int_a^{\infty} \sqrt{\omega(x)} dx = \infty.$$

Пример: $\omega(x) = Ax^{-\nu}$, $A > 0$, $\nu > 2$.

Пусть $q(x)$, $0 \leq x < \infty$, — непрерывная действительная функция такая, что для любого $a > 0$

$$(3) \quad \int_a^{\infty} (1+x^2)|q(x)| dx + \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}} |q(x) + \omega(x)| dx < \infty.$$

Целью настоящей заметки является уточнение некоторых положений спектральной теории и теории рассеяния для самосопряженных расширений в $L_2(0, \infty)$ дифференциального оператора Шредингера

$$(4) \quad (H_0 f)(x) = -f''(x) + q(x)f(x),$$

определенного на множестве гладких функций, обращающихся в нуль вне интервала $[\alpha, \beta] \in (0, \infty)$ (своего для каждой функции f).

В силу условий (1)–(3) оператор H_0 и все его самосопряженные расширения не ограничены снизу. Так как неограниченность снизу оператора H_0 обусловлена сингулярностью потенциала $q(x)$ лишь в одной точке — в нуле, — то основные результаты спектрального анализа и теории рассеяния, давно установленные и подробно описанные ⁽¹⁾ для операторов Шредингера с несингулярными достаточно быстро убывающими потенциалами, переносятся и на рассматриваемый случай. Для того чтобы получить соответствующее обобщение, как и в случае, когда потенциал сингулярен в нуле, но является отталкивающим ^(2, 3), требуется преодолеть лишь некоторые технические трудности. Тем не менее, при изучении операторов Шредингера с потенциалами, сингулярность которых в нуле настолько сильна, что имеет место ситуация "падения на центр" ⁽⁴⁾, возникают и специфические вопросы. Их выяснению в основном и посвящена эта работа.

2. В силу свойств потенциала $q(x)$ из формул приближения Лиувилля Грина ⁽⁵⁾ следует, что при каждом значении параметра λ уравнение

$$(5) \quad -y'' + q(x)y = \lambda y$$

имеет дважды непрерывно дифференцируемые решения $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ такие, что

$$(6) \quad \varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\omega(x)}} \sin \delta(x) + O(\epsilon(x, \lambda)),$$

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sqrt[4]{\omega(x)} [\cos \delta(x) + O(\epsilon(x, \lambda))],$$

$$\theta(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{\omega(x)}} \cos \delta(x) + O(\epsilon(x, \lambda)),$$

$$\theta'(x, \lambda) = \sqrt[4]{\omega(x)} [\sin \delta(x) + O(\epsilon(x, \lambda))],$$

$$\delta(x) = \int_x^{\infty} \sqrt{\omega(x)} dx, \quad \epsilon(x, \lambda) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}} \left| q(x) + \omega(x) - \lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{16} \frac{[\omega'(x)]^2}{\omega^2(x)} + \frac{1}{4} \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} \right| dx.$$

При фиксированных значениях переменной x эти решения являются целыми функциями параметра λ . Для общего решения неоднородного уравнения

$$(7) \quad -y'' + q(x)y - \lambda y = g(x)$$

с локально интегрируемой правой частью $g(x)$ определены "граничные" функционалы

$$A(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[y'(x) \frac{1}{\sqrt[4]{\omega(x)}} \sin \delta(x) + \sqrt[4]{\omega(x)} \cos \delta(x) y(x) \right],$$

$$B(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-y'(x) \frac{1}{\sqrt[4]{\omega(x)}} \cos \delta(x) + \sqrt[4]{\omega(x)} \sin \delta(x) y(x) \right].$$

Отметим, что $A(\varphi) = 0$, $B(\varphi) = 1$, $A(\theta) = 1$, $B(\theta) = 0$.

Область определения $D(H^*)$ оператора H^* , сопряженного введенному оператору H , состоит из абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций пространства $L_2(0, \infty)$, для которых функции, определяемые выражением в правой части (4), также входят в $L_2(0, \infty)$. Из последнего утверждения непосредственно вытекает, что линейал $D(H^*)$ принадлежит областям определения функционалов A и B . При этом область определения замыкания \bar{H} оператора H составляют те и только те функции $f \in D(H^*)$, для которых $A(f) = B(f) = 0$. Оператор H_0 является эрмитовым с индексом дефекта $(1, 1)$. Формулы фон Неймана теории самосопряженных расширений эрмитовых операторов совместно с приведенными результатами относительно решений уравнения (7) приводят к следующему предложению.

Каждое самосопряженное расширение оператора H без выхода из пространства $L_2(0, \infty)$ определяется действительным числом h , $-\infty < h \leq \infty$, а каждое действительное число $h (\leq \infty)$ порождает такое расширение согласно правилу: область определения расширения $H(h)$ есть совокупность всех функций $f \in D(H^*)$, удовлетворяющих граничному условию

$$(8) \quad B(f) = hA(f) \quad (A(f) = 0 \text{ при } h = \infty).$$

3. Пусть $f(x, \sqrt{\lambda})$, $\text{Im} \sqrt{\lambda} \leq 0$, — решение уравнения (5), удовлетворяющее условию

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \sqrt{\lambda}) e^{ix \sqrt{\lambda}} = 1.$$

В силу свойств потенциала $q(x)$ такое решение существует и при фиксированных $x > 0$ по переменной $\xi = \sqrt{\lambda}$ является ограниченной голоморфной функцией в нижней полуплоскости и непрерывно дифференцируемо на оси $\text{Im} \xi = 0$. С помощью решения уравнения (5)

$$\psi_h(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + h\varphi(x, \lambda),$$

удовлетворяющего, очевидно, условию (8), для самосопряженного расширения H_h введем функцию

$$(10) \quad f_h(\sqrt{\lambda}) = \psi_h'(x, \lambda) f(x, \sqrt{\lambda}) - \psi_h(x, \lambda) f'(x, \sqrt{\lambda}), \quad \text{Im} \sqrt{\lambda} \leq 0.$$

Из приведенных свойств решений $\varphi(x, \lambda)$, $\theta(x, \lambda)$ и $f(x, \sqrt{\lambda})$ вытекает, что функция $f_h(\sqrt{\lambda})$, не зависящая от x как вронскиан двух решений уравнения (5), по переменной $\xi = \sqrt{\lambda}$ голоморфна в нижней полуплоскости и имеет непрерывно дифференцируемое граничное значение на оси $\text{Im} \xi = 0$, не равное нулю всюду за исключением, быть может, точки $\xi = 0$. Резольвента R_λ^h расширения H_h в каждой регулярной точке λ , как обычно, оказывается ограниченным интегральным оператором с ядром

$$(11) \quad R_\lambda^h(x, s) = \begin{cases} \psi_h(x, \lambda) f(s, \sqrt{\lambda}) / f_h(\sqrt{\lambda}), & x < s, \\ f(x, \sqrt{\lambda}) \psi_h(s, \lambda) / f_h(\sqrt{\lambda}), & x > s. \end{cases}$$

Ввиду голоморфности функций $\psi_h(x, \lambda)$, $f(x, \sqrt{\lambda})$ и $f_h(\sqrt{\lambda})$ и оператор-функции R_λ^h в регулярных точках оператора R_λ^h из (11) следует, что спектр оператора H_h на полуоси $(-\infty, 0)$ состоит из изолированных простых собственных значений, совпадающих с нулями функции $f_h(\sqrt{\lambda})$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $N_h(\lambda)$ — число собственных значений самосопряженного расширения H_h оператора \bar{H} , попадающих в интервал $(E, 0)$, $E < 0$.

Тогда (1) существует число $\kappa(h)$, зависящее от выбора расширения, такое, что $N(E) = 0$ в интервале $(-\kappa(h), 0)$; 2) для любого самосопряженного расширения H_h

$$(12) \quad \lim_{E \rightarrow -\infty} N_h(E) \cdot \pi \left\{ \int_{\omega(x) < |E|} \sqrt{\omega(x)} dx + \int_{\omega(x) > |E|} [\sqrt{\omega(x)} - \sqrt{\omega(x) + E}] dx \right\}^{-1} = 1.$$

Из второго предложения теоремы вытекает

Следствие. Если $\omega(x) = \frac{A}{x^\nu} [1 + o(1)]$, $A > 0$, $\nu > 2$, то

$$N_h(E) \underset{E \rightarrow -\infty}{=} \frac{A^{1/\nu} |E|^{1/2 - 1/\nu}}{\pi} \left\{ \frac{\nu - 2}{2} + \int_0^1 \frac{ds}{s^{\nu/2}} (1 - \sqrt{1 - s^\nu}) \right\} [1 + o(1)];$$

если $\omega(x) = A e^{\gamma/x^\nu} [1 + o(1)]$, $A > 0$, $\gamma > 0$, $\nu > 0$, то

$$N_h(E) \underset{E \rightarrow -\infty}{=} \gamma^{1/\nu} |E|^{1/2} [\ln |E|]^{-1 - 1/\nu} [1 + o(1)].$$

Из соотношения (12) следует также

Лемма. Пусть E_t^n , $-\infty < t < \infty$, — спектральная функция оператора H_n . Тогда для любой его регулярной точки λ оператор $R_\lambda^n E_0^n$ является ядерным.

С помощью этой леммы доказывается

Теорема 2. В каждой комплексной точке λ разность резольвент любого самосопряженного расширения оператора \bar{H} и любого самосопряженного расширения симметрического оператора $H^0 = -d^2/dx^2$ в $L_2(0, \infty)$ является ядерным оператором.

В силу теоремы 2 для пар самосопряженных операторов, составленных из любых самосопряженных расширений в $L_2(0, \infty)$ симметрических операторов H^0 и H , существуют полные волновые операторы и оператор рассеяния, унитарный либо на всем $L_2(0, \infty)$, либо на подпространстве единичной коразмерности (6).

4. В дальнейшем предполагается, что $\lambda = k^2 \geq 0$. Решения $f(x, k)$ и $f(x, -k)$ уравнения (5), удовлетворяющие при соответствующем выборе знака k условию (9), линейно независимы и

$$f(x, k) f'(x, -k) - f'(x, k) f(x, -k) = 2ik.$$

Из свойств потенциала $q(x)$ следует, в частности, что

$$f(x, \pm k) = f_0(x) \mp ikf_1(x) + o(k),$$

$$x \rightarrow 0$$

где $f_0(x)$ и $f_1(x)$ — решения уравнения (5) при $\lambda = 0$ такие, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f_1(x) - x] = 0.$$

Через функции $f(x, k)$, $f(x, -k)$ решение $\psi_h(x, k^2)$ выражается в виде

$$\psi_h(x, k^2) = \frac{1}{2ik} [f_h(k) f(x, -k) - f_h(-k) f(x, k)],$$

где $f_h(k)$ определяется согласно (10).

В соответствии с принятым определением назовем фазой рассеяния самосопряженного расширения H_h функцию, связанную с $f_h(k)$ соотношением

$$e^{2i\delta_h(k)} = f_h(k) / \overline{f_h(-k)}.$$

Так как

$$f(x, k) \theta'(x, k^2) - f'(x, k) \theta(x, k^2) = B[f(\cdot, k)] \equiv B(k),$$

$$f(x, k) \varphi'(x, k^2) - f'(x, k) \varphi(x, k^2) = A[f(\cdot, k)] \equiv A(k),$$

то

$$e^{2i\delta_h(k)} = [B(k) + hA(k)] [\overline{B(k) + hA(k)}]^{-1}.$$

Поскольку решения $f_0(x)$ и $f_1(x)$ линейно независимы, то

$$\theta(x, 0) = \alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + o(1),$$

$$x \rightarrow \infty$$

(13)

$$\varphi(x, 0) = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x) = \beta_0 + \beta_1 x + o(1)$$

$$x \rightarrow \infty$$

и поэтому оказывается, что существует предел

$$(14) \quad r_s(h) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[- \frac{\delta_h(k)}{k} \right] = - \frac{\alpha_0 + h\beta_0}{\alpha_1 + h\beta_1},$$

называемый длиной рассеяния.

Так как дробно-линейное преобразование в (14) невырождено ($\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = 1$), то с помощью соотношений (13) и (14) параметр h , фиксирующий выбор самосопряженного расширения оператора H , однозначно восстанавливается по длине рассеяния. Например, если $q(x) = -\gamma x^{-\nu}$, $\gamma > 0$, $\nu > 3$, то

$$r_s(h) = \left(\sin \frac{\pi}{4} \frac{\nu-4}{\nu-2} - h \cos \frac{\pi}{4} \frac{\nu-4}{\nu-2} \right) \left(\sin \frac{\pi}{4} \frac{\nu}{\nu-2} - h \cos \frac{\pi}{4} \frac{\nu}{\nu-2} \right)^{-1} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{\nu-3}{\nu-2}\right) \cdot \Gamma^{-1}\left(\frac{\nu-1}{\nu-2}\right) \left[\frac{\gamma}{(\nu-2)^2} \right]^{1/(\nu-2)}$$

Важно для приложений случае, когда $q(x) = -\gamma x^{-6} - \vartheta x^{-4}$, $\gamma > 0$, $\vartheta > 0$,

$$r_s(h) = 2\gamma^{1/4} \operatorname{Re}(1+ih) \frac{\exp\left[\frac{1}{8}i(\vartheta \ln \gamma / \sqrt{\gamma} + 3\pi)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i\vartheta\gamma^{-1/2}\right)} \times \\ \times \left[\operatorname{Re}(1+ih) \frac{\exp\left[\frac{1}{8}i(\vartheta \ln \gamma / \sqrt{\gamma} + \pi)\right]}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i\vartheta\gamma^{-1/2}\right)} \right]^{-1}$$

При $k \rightarrow \infty$ фаза рассеяния оказывается неограниченной функцией такой, что

$$(15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \delta_h(k) - \int_0^{\infty} \left[\sqrt{\omega(x) + k^2} - k - \sqrt{\omega(x)} \right] dx - \arctg \frac{1}{h} \right\} = 0.$$

В частности, если $\omega(x) = -Ax^{-\nu} [1 + o(1)]$, $A > 0$, $\nu > 2$, то согласно (15)

$$\delta_h(k) = A^{1/\nu} k^{1-2/\nu} \int_0^{\infty} \left[\sqrt{1+x^{-\nu}} - 1 - x^{-\nu/2} \right] dx [1 + o(1)].$$

Одесский государственный университет
им. И.И. Мечникова

Поступило
27 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л.Д. Фаддеев, УМН, т. 14, 4 (88), 57 (1959). ² В.де Альфаро, Т. Редже, Потенциальное рассеяние М., "Мир", 1966. ³ Ф.С. Рофе-Бекетов, Е.Х. Христов, ДАН, т. 168, № 6, 1265 (1966). ⁴ Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963. ⁵ Ф. Олвер, Введение в асимптотические методы и специальные функции, М., "Наука", 1978. ⁶ М.Ш. Бирман, М.Г. Крейн, ДАН, т. 144, 475 (1962).

УДК 539.12

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.А. ЖЕЛНОВИЧ

О ТЕНЗОРНОМ ОПИСАНИИ ПОЛЕЙ ПОЛУЦЕЛОГО СПИНА

(Представлено академиком В.С. Владимировым 14 VII 1979)

Покажем, что поле спина 1/2 можно рассматривать как взаимодействующую систему нейтрального псевдоскалярного, нейтрального векторного и заряженного векторного полей, полевые функции которых связаны некоторыми алгебраическими уравнениями.

Рассмотрим в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского, отнесенном к декартовой системе координат с переменными x^i , $i = 1, 2, 3, 4$, и сигналами