Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

E. A. Karatsuba, Fast Evaluation of the Hurwitz Zeta Function and Dirichlet L-Series, *Probl. Peredachi Inf.*, 1998, Volume 34, Issue 4, 62–75

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 44.210.149.218
November 9, 2024, 18:40:37

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 34 **1998** **Вып. 4**

УДК 621.391.1:681.327

© 1998 г. **Е. А. Карацуба**

БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ГУРВИЦА И L-РЯДОВ ДИРИХЛЕ[1]

Предлагается основанный на БВЕ-методе алгоритм быстрого вычисления значений дзета-функции Гурвица $\zeta(s,a)$ при целых значениях s и алгебраических значениях a. Рассматривается быстрое вычисление значений L-рядов Дирихле. Сложность вычисления близка к наилучшей возможной.

§ 1. Введение

В работах [1–7] представлены алгоритмы быстрого вычисления простейших и высших трансцендентных функций, а также классических констант e, π и константы Эйлера γ, основанные на методе быстрого вычисления значений функций типа E-функций Зигеля (БВЕ), со сложностью вычисления, близкой к наилучшей возможной.

Далее считаем, что числа записаны в двоичной системе счисления.

Под сложностью умножения двух n-значных целых чисел будем понимать число элементарных (битовых) операций $M(n)$, достаточное для вычисления произведения этих чисел.

Число битовых операций, достаточное для вычисления функции $y = f(z)$ с точностью 2^{-n} в точке $z = z_0$ ее области определения, обозначается $s_f(n)$ и называется сложностью вычисления функции $f(z)$ в точке $z = z_0$.

В [1–7] доказано, что сложность вычисления посредством БВЕ упоминавшихся выше элементарных трансцендентных функций и констант, а также высших трансцендентных функций при алгебраических значениях аргументов и параметров есть

$$s_f(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

История быстрых вычислений началась с постановки А. Н. Колмогоровым проблемы оценки сверху значения $M(n)$ [8]. В работах [9–11] представлены алгоритмы быстрого умножения, а особенности практического применения этих алгоритмов описаны в [12]. Первые алгоритмы быстрого вычисления элементарных алгебраических, простейших трансцендентных и некоторых высших трансцендентных функций приведены в [13–15].

§ 2. Лемма о представлении дзета-функции Гурвица в виде некоторого ряда

В работе [6] подробно описано применение БВЕ-метода к быстрому вычислению дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при целых значениях аргумента s. Для дробных значе-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 97-01-00993).

ний s вычислить быстро $\zeta(s)$ пока не удается. В то же время, оказывается, можно быстро вычислить дзета-функцию Гурвица

$$\zeta(s,a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(\nu+a)^s}, \quad a>0, \tag{1}$$

при целых значениях s, $s\geqslant 2$, и вещественных алгебраических значениях a. Заметим, что из (1) вычисление значений $\zeta(s,a)$ при $a\geqslant 1$, $a=[a]+\{a\}$, $0\leqslant\{a\}<1$, легко сводится к вычислению значений $\zeta(s,a)$ при $0<a<1$ (случай целых значений a рассмотрен в [6]).

Вычисляя $\zeta(s,a)$ с точностью 2^{-n}, далее везде считаем, что $n\to+\infty$, s и a – произвольные фиксированные числа, $s\geqslant 2$, s – целое число, a – вещественное алгебраическое число, $0<a<1$.

Как и в [6], докажем сначала две вспомогательные леммы. Доказательства этих лемм подобны доказательствам соответствующих лемм из [6].

Лемма 1. *Пусть $n_1,n_2,\ldots,n_s$ – целые неотрицательные числа, и*

$$P_i=\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_s=i\\ n_1+2n_2+\ldots+sn_s=s}} \frac{s!}{n_1!n_2!\ldots\,n_s!}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{J_j}{j!}\right)^{n_j}, \tag{2}$$

$$J_j=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{a-1}\log^j t\,dt. \tag{3}$$

Тогда справедливо тождество

$$\zeta(s,a)=\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!P_i}{(\Gamma(a))^i}-\frac{1}{a^s}. \tag{4}$$

Доказательство. По определению гамма-функции Эйлера $\Gamma(x)$ (см., например, [16, с. 51]) имеем

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}e^{-\gamma x}\left(\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{-1}e^{\frac{x}{\nu}}\right), \tag{5}$$

где γ – константа Эйлера. Из (5) находим

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\gamma+\frac{1}{x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+\nu}-\frac{1}{\nu}\right). \tag{6}$$

Дифференцируя (6) $s-1$ раз по x и подставляя затем $x=a$, получим

$$\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\left(-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)\bigg|_{x=a}=(-1)^{s-1}(s-1)!\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+a)^s}+\frac{1}{a^s}\right). \tag{7}$$

Пользуясь формулой дифференцирования сложной функции (см., например, [17, с. 116–117]), находим

$$\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\left(-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)\bigg|_{x=a}=\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{(\Gamma(a))^i}\times$$

$$\times\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_s=i\\ n_1+2n_2+\ldots+sn_s=s\\ n_1,n_2,\ldots,n_s\geqslant 0-\text{ целые числа}}}\frac{s!}{n_1!n_2!\ldots\,n_s!}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{j!}\,\frac{d^j}{dx^j}\Gamma(x)\bigg|_{x=a}\right)^{n_j}. \tag{8}$$

Теперь воспользуемся интегральным представлением $\Gamma(x)$ (см., например, [16, с. 53]):

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt, \quad Re(x-1)>-1. \tag{9}$$

Дифференцируя в (9) j раз под знаком интеграла по x и полагая затем $x=a$, получим

$$\frac{d^j}{dx^j}\Gamma(x)\bigg|_{x=a}=\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\log^j t\,dt. \tag{10}$$

Из (1)–(3) и (7)–(10) следует справедливость формулы (4).

§ 3. Лемма о быстром вычислении некоторого специального интеграла

Пусть $s_J(n)$ есть сложность вычисления интеграла J_j, определяемого формулой (3), при некотором натуральном параметре j, $j=1,2,\ldots,s$. Тогда справедлива

Лемма 2.

$s_J(n)=O\left(M(n)\log^2 n\right)$.

Доказательство. Считаем, что

$$n\geqslant 2s\log 2s, \quad s\geqslant 2. \tag{11}$$

Представим интеграл (3) в виде суммы двух интегралов

$$J_j=A_j+B_j, \tag{12}$$

где

$$A_j=\int_0^n e^{-t}t^{a-1}\log^{j-1} t\,dt,$$

$$B_j=\int_n^\infty e^{-t}t^{a-1}\log^{j-1} t\,dt.$$

Разложив функцию e^{-t} в ряд Тейлора по степеням t, $0\leqslant t\leqslant n$, представим интеграл A_j в виде суммы

$$A_j=A'_j+A''_j, \tag{13}$$

где

$$A'_j=\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^n t^{k+a-1}\log^j t\,dt, \tag{14}$$

$$A''_j=\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^n t^{k+a-1}\log^j t\,dt, \tag{15}$$

$r\geqslant n$, r – натуральное число.

Оценим сверху значения B_j и A_j''. Поскольку $0 < a < 1$, то

$$B_j < B_j', \quad B_j' = \int\limits_n^\infty e^{-t} \log^j t\, dt. \tag{16}$$

Учитывая (11), оценим интеграл B_j', $1 \leqslant j \leqslant s$, сверху, интегрируя его по частям и переходя последовательно к оценкам

$$B_j' = -e^{-t} \log^j t\Big|_n^\infty + j \int\limits_n^\infty e^{-t} t^{-1} \log^{j-1} t\, dt \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant e^{-n} \log^j n \frac{1 - \left(\dfrac{j}{n \log n}\right)^j}{1 - \dfrac{j}{n \log n}} \leqslant \frac{5}{3} e^{-n} \log^s n. \tag{17}$$

Чтобы оценить сверху сумму A_j'', определяемую формулой (15), представим ее в виде суммы двух слагаемых

$$A_j'' = \sum_{k=r+1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_0^1 t^{k+a-1} \log^j t\, dt + \sum_{k=r+1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_1^n t^{k+a-1} \log^j t\, dt. \tag{18}$$

Каждое из двух слагаемых в (18) представляет собой знакопеременный ряд, члены которого являются монотонно убывающими по абсолютной величине и стремятся к нулю. Учитывая, что $0 < a < 1$, оценим сверху эти слагаемые и получим для A_j'' из (18) следующую оценку:

$$A_j'' \leqslant \frac{1}{(r+1)!} \left(\left| \int\limits_0^1 t^{r+a} \log^j t\, dt \right| + \left| \int\limits_1^n t^{r+a} \log^j t\, dt \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(r+2)!} (1 + n^{r+2} \log^s n). \tag{19}$$

Из (12) и (13) следует, что интеграл J_j можно представить в виде

$$J_j = A_j' + \theta_j, \tag{20}$$

где сумма A_j' определяется формулой (14), а для величины θ_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, $n \geqslant 2s \log 2s$, $r \geqslant n$, из (16), (17), (19) справедлива оценка

$$|\theta_j| \leqslant \frac{5}{3} e^{-n} \log^s n + \frac{1}{(r+2)!} (1 + n^{r+2} \log^s n). \tag{21}$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{r!} \leqslant \left(\dfrac{e}{r}\right)^r$ и полагая $r \geqslant 3n$, из (21) для θ_j получим

$$|\theta_j| \leqslant 2 e^{-n} \log^s n. \tag{22}$$

При s, удовлетворяющих (11), получаем из (22) оценку

$$|\theta_j| \leqslant 2^{-n-1}. \tag{23}$$

Рассмотрим сумму A'_j, определяемую формулой (14). Заменим в (14) интегралы их значениями:

$$\int\limits_0^n t^{k+a-1}\log^j t\,dt = \frac{n^{k+a}}{k+a}\sum_{m=0}^{j}(-1)^m \frac{j!\log^{j-m} n}{(j-m)!(k+a)^m}.$$

Из (20), (23) следует, что для того чтобы вычислить с точностью 2^{-n} интеграл

$$J_j = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\log^j t\,dt, \quad 0<a<1,$$

достаточно вычислить с той же точностью сумму

$$A'_j = \sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{n^{k+a}}{k+a}\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{j!\log^{j-m} n}{(j-m)!(k+a)^m} \tag{24}$$

при

$$r \geqslant 3n, \quad n \geqslant 2s\log 2s, \quad s\geqslant 2, \quad 1\leqslant j\leqslant s. \tag{25}$$

Перепишем (24) в виде

$$A'_j = n^a\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{j!\log^{j-m} n}{(j-m)!}S_m, \tag{26}$$

где

$$S_m = \sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{n^k}{(k+a)^{m+1}}. \tag{27}$$

Вычислим сумму S_m с помощью БВЕ-процесса.

§ 4. Продолжение доказательства леммы 2 для случая рационального значения числа a

Пусть сначала a – рациональное число, $a=\dfrac{a_1}{a_2}$, $(a_1,a_2)=1$. Перепишем (27) в виде

$$S_m = a_2^{m+1}S'_m, \tag{28}$$

где

$$S'_m = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{n^k}{(a_2k+a_1)^{m+1}}, \tag{29}$$

и будем вычислять сумму S'_m. Возьмем

$$r+1 = 2^q \quad (q\geqslant 1, \quad 2^{q-1}<3n<2^q) \tag{30}$$

членов ряда (29), и пусть числа $S_{r+1-\nu}(0)$, $\nu=0,1,\ldots,r$, определяются равенствами

$$S_{r+1-\nu}(0) = (-1)^{r-\nu}\frac{n^{r-\nu}}{(r-\nu)!(a_2(r-\nu)+a_1)^{m+1}}.$$

По определению S'_m имеем

$$S'_m = S_1(0) + S_2(0) + \ldots + S_{r+1}(0).$$

Вычисление S'_m проведем за q шагов БВЕ-процесса, подробно описанного в [3–6]. А именно, объединяя на каждом шаге слагаемые S'_m последовательно попарно и вынося за скобки общий множитель, вычисляем на каждом шаге только значения (они будут целыми) выражений, стоящих в скобках. Процесс вычисления суммы S'_m, определяемой формулой (29), аналогичен детально описанному в [6] процессу вычисления соответствующей суммы для ряда и интеграла, связанного с дзета-функцией Римана. Поэтому, не останавливаясь на нем подробно, отметим, что сложность вычисления суммы S'_m оценивается, как в [6], и составляет на i-м шаге

$$O\left(\sum_{\tau=1}^{i} M(2^\tau \log r)\right) + O\big(M(2^i m \log(nr))\big)$$

операций. Суммируя число операций по всем шагам i, $1 \leqslant i \leqslant q$, и прибавляя к этому число

$$O\big(r \log r M(\log r) + M(r \log r) + M(2^q m \log r)\big)$$

операций, достаточное для деления на последнем шаге вычисленного нами целого числа на целое число

$$r![(a_2 r + a_1)(a_2(r-1) + a_1) \ldots (a_2 + a_1)a_1]^{m+1},$$

из (28)–(30) находим, что для вычисления суммы S_m достаточно

$$O\big(M(n) \log^2 n\big) \tag{31}$$

операций.

§ 5. Продолжение доказательства леммы 2 для случая алгебраического значения числа a. Теорема о быстром вычислении дзета-функции Гурвица

Рассмотрим теперь вычисление суммы S_m, определяемой формулой (27), при вещественном алгебраическом значении числа a. Будем считать, что число a задано как в явной форме, так и некоторым многочленом с целыми коэффициентами, корнем которого оно является (зная такой многочлен, можно быстро найти значение его корня, например, методом Ньютона [13]). Заметим, что приведенный ниже алгоритм безусловно пригоден и для быстрого вычисления суммы S_m при рациональном значении a (в этом случае a является алгебраическим числом степени 1).

Пусть a – вещественное алгебраическое число степени t, большей или равной 1, и $h(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число a, т.е.

$$h(x) = h_t x^t + h_{t-1} x^{t-1} + \ldots + h_1 x + h_0, \ \ h_t, h_{t-1}, \ldots, h_1, h_0 - \text{целые числа}, \ \ t \geqslant 1, \tag{32}$$

$$h(a) = 0. \tag{33}$$

Напомним, что $0 < a < 1$. Будем вычислять сумму S_m, учитывая, что a удовлетворяет уравнению (33). Как и в вышеприведенном алгоритме, возьмем $r + 1 =$

$= 2^q (q \geqslant 1,\ 2^{q-1} < 3n < 2^q)$ членов ряда (27), и пусть числа $S_{r+1-\nu}(0)$, $\nu = 0, 1, \dots, r$, определяются равенствами

$$S_{r+1-\nu}(0) = (-1)^{r-\nu} \frac{n^{r-\nu}}{(r-\nu)!(r-\nu+a)^{m+1}}.$$

По определению S_m имеем

$$S_m = S_1(0) + S_2(0) + \ldots + S_{r+1}(0). \tag{34}$$

Вычисление суммы S_m проводим за q шагов следующим образом. Объединяя слагаемые S_m в (34) последовательно попарно и вынося общий множитель за скобки, на первом шаге имеем

$$S_m = S_1(1) + S_2(1) + \ldots + S_{r_1}(1), \quad r_1 = \frac{r+1}{2},$$

$$S_{r_1-\nu}(1) = S_{r-2\nu}(0) + S_{r-2\nu-1}(0) = \frac{(-1)^{r-2\nu} n^{r-2\nu}}{(r-2\nu)!(r-2\nu+a)^{m+1}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{r-2\nu-1} n^{r-2\nu-1}}{(r-2\nu-1)!(r-2\nu-1+a)^{m+1}} = (-1)^{r-2\nu-1} \frac{n^{r-2\nu-1} \beta_{r_1-\nu}(1)}{(r-2\nu)!},$$

$$\beta_{r_1-\nu}(1) = -\frac{n}{(r-2\nu+a)^{m+1}} + \frac{r-2\nu}{(r-2\nu-1+a)^{m+1}} =$$

$$= \frac{(r-2\nu)(r-2\nu+a)^{m+1} - n(r-2\nu-1+a)^{m+1}}{(r-2\nu-1+a)^{m+1}(r-2\nu+a)^{m+1}}. \tag{35}$$

Заметим, что $(-1)^{r-2\nu-1} = 1$, и при r, удовлетворяющем условию (30), числитель дроби (35)

$$(r-2\nu)(r-2\nu+a)^{m+1} - n(r-2\nu-1+a)^{m+1} > 0.$$

Раскрыв скобки в выражении (35), представим $\beta_{r_1-\nu}(1)$ в виде дроби, числителем и знаменателем которой являются многочлены от a степени $m+1$ и $2m+2$ соответственно:

$$\beta_{r_1-\nu}(1) = \frac{\alpha_{r_1-\nu}(1)}{\delta_{r_1-\nu}(1)}, \tag{36}$$

где

$$\alpha_{r_1-\nu}(1) = \sum_{k=0}^{m+1} A_{r_1-\nu}(k,1) a^k, \quad \delta_{r_1-\nu}(1) = \sum_{\ell=0}^{2m+2} D_{r_1-\nu}(\ell,1) a^\ell, \tag{37}$$

$$A_{r_1-\nu}(k,1) = \binom{m+1}{k} \left((r-2\nu)^{m+2-k} - n(r-2\nu-1)^{m+1-k} \right), \tag{38}$$

$$D_{r_1-\nu}(\ell,1) = \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2=\ell \\ 0 \leqslant \ell_1, \ell_2 \leqslant m+1}} \binom{m+1}{\ell_1} \binom{m+1}{\ell_2} (r-2\nu-1)^{m+1-\ell_1} (r-2\nu)^{m+1-\ell_2}. \tag{39}$$

Напомним, что при r, удовлетворяющем (30), в (38)

$$(r-2\nu)^{m+2-k} - n(r-2\nu-1)^{m+1-k} > 0.$$

На первом шаге по формулам (38), (39) вычисляются значения

$$A_{r_1-\nu}(k,1), \quad k=0,1,2,\dots,m+1, \quad \nu=0,1,2,\dots,r_1-1, \quad r_1=\frac{r+1}{2},$$
$$D_{r_1-\nu}(\ell,1), \quad \ell=0,1,2,\dots,2m+2, \quad \nu=0,1,2,\dots,r_1-1, \quad r_1=\frac{r+1}{2},$$

которые являются целыми.

На втором шаге имеем

$$S_m=S_1(2)+S_2(2)+\dots+S_{r_2}(2), \quad r_2=2^{-1}r_1=2^{-2}(r+1),$$
$$S_{r_2-\nu}(2)=S_{r_1-2\nu}(1)+S_{r_1-2\nu-1}(1)=n^{r-2^2\nu-3}\frac{\beta_{r_2-\nu}(2)}{(r-2^2\nu)!},$$
$$\beta_{r_2-\nu}(2)=n^2\beta_{r_1-2\nu}(1)+(r-2^2\nu)(r-2^2\nu-1)\beta_{r_1-2\nu-1}(1).$$

Из (36) следует, что $\beta_{r_2-\nu}(2)$ можно представить в виде дроби

$$\beta_{r_2-\nu}(2)=\frac{\alpha_{r_2-\nu}(2)}{\delta_{r_2-\nu}(2)},$$

где

$$\alpha_{r_2-\nu}(2)=n^2\alpha_{r_1-2\nu}(1)\delta_{r_1-2\nu-1}(1)+$$
$$+(r-2^2\nu)(r-2^2\nu-1)\alpha_{r_1-2\nu-1}(1)\delta_{r_1-2\nu}(1), \tag{40}$$
$$\delta_{r_2-\nu}(2)=\delta_{r_1-2\nu}(1)\delta_{r_1-2\nu-1}(1). \tag{41}$$

Учитывая (37)–(39), перемножим многочлены в (40), (41) и, раскрыв скобки, представим $\alpha_{r_2-\nu}(2)$ и $\delta_{r_2-\nu}(2)$ в виде следующих многочленов:

$$\alpha_{r_2-\nu}(2)=\sum_{k=0}^{3m+3}A_{r_2-\nu}(k,2)a^k,$$
$$\delta_{r_2-\nu}(2)=\sum_{\ell=0}^{4m+4}D_{r_2-\nu}(\ell,2)a^\ell,$$

где

$$A_{r_2-\nu}(k,2)=\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ 0\leqslant k_1\leqslant m+1;0\leqslant k_2\leqslant 2m+2}}\big[n^2A_{r_1-2\nu}(k_1,1)D_{r_1-2\nu-1}(k_2,1)+$$
$$+(r-2^2\nu)(r-2^2\nu-1)A_{r_1-2\nu-1}(k_1,1)D_{r_1-2\nu}(k_2,1)\big], \tag{42}$$
$$D_{r_2-\nu}(\ell,2)=\sum_{\substack{\ell_1+\ell_2=\ell\\ 0\leqslant \ell_1\leqslant 2m+2;0\leqslant \ell_2\leqslant 2m+2}}D_{r_1-2\nu}(\ell_1,1)D_{r_1-2\nu-1}(\ell_2,1). \tag{43}$$

На втором шаге вычисляются целые значения

$$A_{r_2-\nu}(k,2), \quad k=0,1,2,\dots,3m+3, \quad \nu=0,1,2,\dots,r_2-1, \quad r_2=2^{-2}(r+1),$$
$$D_{r_2-\nu}(\ell,2), \quad \ell=0,1,2,\dots,4m+4, \quad \nu=0,1,2,\dots,r_2-1, \quad r_2=2^{-2}(r+1),$$

по формулам (42), (43). И так далее.

На i-м шаге (предполагаем, что $1 \leqslant i \leqslant q_0 \leqslant q$, где q_0 определяется следующими двумя неравенствами:

$$2^{q_0-1}(m+1) \leqslant t \leqslant 2^{q_0}(m+1), \tag{44}$$

и следовательно, $q_0 \geqslant 1$, поскольку $t \geqslant 1$) имеем

$$S_m = S_1(i) + S_2(i) + \ldots + S_{r_i}(i), \quad r_i = 2^{-1}r_{i-1} = 2^{-i}(r+1),$$

$$S_{r_i-\nu}(i) = S_{r_{i-1}-2\nu}(i-1) + S_{r_{i-1}-2\nu-1}(i-1) = n^{r-2^i\nu-2^i+1}\frac{\beta_{r_i-\nu}(i)}{(r-2^i\nu)!},$$

$$\beta_{r_i-\nu}(i) = n^{2^{i-1}}\beta_{r_{i-1}-2\nu}(i-1) + \frac{(r-2^i\nu)!}{(r-2^i\nu-2^{i-1})!}\beta_{r_{i-1}-2\nu-1}(i-1),$$

где

$$\beta_{r_i-\nu}(i) = \frac{\alpha_{r_i-\nu}(i)}{\delta_{r_i-\nu}(i)}, \tag{45}$$

$$\alpha_{r_i-\nu}(i) = \sum_{k=0}^{(2^i-1)(m+1)} A_{r_i-\nu}(k,i)a^k, \quad \delta_{r_i-\nu}(i) = \sum_{\ell=0}^{2^i(m+1)} D_{r_i-\nu}(\ell,i)a^\ell, \tag{46}$$

$$A_{r_i-\nu}(k,i) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ 0\leqslant k_1\leqslant(2^{i-1}-1)(m+1)\\ 0\leqslant k_2\leqslant 2^{i-1}(m+1)}} \Big[n^{2^{i-1}}A_{r_{i-1}-2\nu}(k_1,i-1)D_{r_{i-1}-2\nu-1}(k_2,i-1)+$$

$$+\frac{(r-2^i\nu)!}{(r-2^i\nu-2^{i-1})!}A_{r_{i-1}-2\nu-1}(k_1,i-1)D_{r_{i-1}-2\nu}(k_2,i-1)\Big], \tag{47}$$

$$D_{r_i-\nu}(\ell,i) = \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2=\ell\\ 0\leqslant \ell_1\leqslant 2^{i-1}(m+1)\\ 0\leqslant \ell_2\leqslant 2^{i-1}(m+1)}} D_{r_{i-1}-2\nu}(\ell_1,i-1)D_{r_{i-1}-2\nu-1}(\ell_2,i-1). \tag{48}$$

На i-м шаге вычисляются целые значения

$$A_{r_i-\nu}(k,i), \quad k=0,1,2,\ldots,(2^i-1)(m+1), \quad \nu=0,1,2,\ldots,r_i-1, \quad r_i=2^{-i}(r+1),$$
$$D_{r_i-\nu}(\ell,i), \quad \ell=0,1,2,\ldots,2^i(m+1), \quad \nu=0,1,2,\ldots,r_i-1, \quad r_i=2^{-i}(r+1),$$

по формулам (47), (48). После q_0-го шага (q_0 определяется неравенствами (44), $1 \leqslant q_0 \leqslant q$) выражение (45) будет представлять собой дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены от a степени $(2^{q_0}-1)(m+1)$ и $2^{q_0}(m+1)$ соответственно. Перед (q_0+1)-м шагом редуцируем эти многочлены по модулю многочлена $h(x)$ при $x=a$. Рассмотрим эти редукции подробнее.

Пусть

$$A(x) = \sum_{k=0}^{u} A_k x^k = A_u x^u + A_{u-1}x^{u-1} + \ldots + A_1 x + A_0, \tag{49}$$

$$D(x) = \sum_{\ell=0}^{w} D_\ell x^\ell = D_w x^w + D_{w-1}x^{w-1} + \ldots + D_1 x + D_0, \tag{50}$$

где

$$u = (2^{q_0}-1)(m+1), \quad w = 2^{q_0}(m+1), \tag{51}$$
$$A_k = A_{r_{q_0}-\nu}(k,q_0), \quad D_\ell = D_{r_{q_0}-\nu}(\ell,q_0), \tag{52}$$

и пусть $h(x)=\sum\limits_{i=0}^{t}h_i x^i$ – многочлен, определяемый формулами (32), (33). Напомним, что из (47), (48), (52) числа A_k, D_ℓ, $k=0,1,2,\dots,u$, $\ell=0,1,2,\dots,w$, являются целыми, числа h_i, $i=0,1,2,\dots,t$, являются целыми по определению. По определению (33) $h(a)=0$. Из (46), (47), (49)–(52) имеем

$$A(a)=\alpha_{r_{q_0}-\nu}(q_0),\quad D(a)=\delta_{r_{q_0}-\nu}(q_0). \tag{53}$$

Разделим многочлены $A(x)$ и $D(x)$ на многочлен $h(x)$ с остатками $R(x)$ и $Q(x)$ соответственно:

$$A(x)=h(x)B(x)+R(x), \tag{54}$$

$$D(x)=h(x)G(x)+Q(x). \tag{55}$$

Тем самым

$$\sum_{k=0}^{u}A_k x^k=\sum_{i=0}^{t}h_i x^i\sum_{j=0}^{u-t}B_j x^j+\sum_{k=0}^{t-1}R_k x^k, \tag{56}$$

$$\sum_{\ell=0}^{w}D_\ell x^\ell=\sum_{i=0}^{t}h_i x^i\sum_{j=0}^{w-t}G_j x^j+\sum_{\ell=0}^{t-1}Q_\ell x^\ell. \tag{57}$$

Из (56) имеем

$$A_k=\sum_{\substack{i+j=k\\ o\leqslant i\leqslant t;0\leqslant j\leqslant u-t}}h_iB_j,\quad k=u,u-1,u-2,\dots,t+1,t. \tag{58}$$

Отсюда

$$B_{u-t-j}=\frac{1}{h_t}\left(A_{u-j}-\sum_{i=0}^{j-1}B_{u-t-i}h_{t-j+i}\right),\quad j=0,1,2,\dots,u-t. \tag{59}$$

Аналогично

$$D_\ell=\sum_{\substack{i+j=\ell\\ o\leqslant i\leqslant t;0\leqslant j\leqslant w-t}}h_iG_j,\quad \ell=w,w-1,w-2,\dots,t+1,t, \tag{60}$$

$$G_{w-t-j}=\frac{1}{h_t}\left(D_{w-j}-\sum_{i=0}^{j-1}G_{w-t-i}h_{t-j+i}\right),\quad j=0,1,2,\dots,w-t. \tag{61}$$

Для коэффициентов остатков R_k и Q_ℓ из (56), (58) и (57), (60) соответственно получаем

$$R_k=A_k-\sum_{\substack{i+j=k\\ o\leqslant i\leqslant t,0\leqslant j\leqslant u-t}}h_iB_j,\quad k=t-1,t-2,\dots,1,0, \tag{62}$$

$$Q_\ell=D_\ell-\sum_{\substack{i+j=\ell\\ o\leqslant i\leqslant \ell,0\leqslant j\leqslant w-t}}h_iG_j,\quad \ell=t-1,t-2,\dots,1,0, \tag{63}$$

где коэффициенты B_j и G_j определяются из формул (59) и (61) соответственно.

Из (33), (53)–(55) следует, что

$$R(a) = A(a) = \alpha_{r_{q_0}-\nu}(q_0), \quad Q(a) = D(a) = \delta_{r_{q_0}-\nu}(q_0), \tag{64}$$

где

$$R(x) = \sum_{k=0}^{t-1} R_k x^k,$$

$$Q(x) = \sum_{\ell=0}^{t-1} Q_\ell x^\ell,$$

причем коэффициенты R_k, Q_ℓ определяются формулами (62), (59) и (63), (61) соответственно и уже не являются в общем случае целыми числами. Из (59) и (61) следует, что целыми будут числа ${h_t}^{u-t+1}R_k$, $k = t-1, t-2, \ldots, 1, 0$, и ${h_t}^{w-t+1}Q_\ell$, $\ell = t-1, t-2, \ldots, 1, 0$. Поскольку из (45) и (64)

$$\beta_{r_{q_0}-\nu}(q_0) = \frac{\alpha_{r_{q_0}-\nu}(q_0)}{\delta_{r_{q_0}-\nu}(q_0)} = \frac{R(a)}{Q(a)}, \tag{65}$$

то учитывая (51), домножим числитель и знаменатель дроби (65) на число ${h_t}^{w-t+1}$. Получим

$$\beta_{r_{q_0}-\nu}(q_0) = \frac{R_1(a)}{Q_1(a)}, \tag{66}$$

где многочлены $R_1(a) = \sum\limits_{k=0}^{t-1} R'_k a^k$, $\quad Q_1(a) = \sum\limits_{\ell=0}^{t-1} Q'_\ell a^\ell$ есть многочлены степени $t-1$ от a с целыми коэффициентами

$$R'_k = {h_t}^{w-t+1}R_k, \quad Q'_\ell = {h_t}^{w-t+1}Q_\ell, \quad k = 0,1,2,\ldots,t-1, \quad \ell = 0,1,2,\ldots,t-1. \tag{67}$$

Следовательно, на q_0-м шаге (q_0 определяется из (44)) вычисляются целые значения R'_k, $k = 0,1,2,\ldots,t-1$, по формулам (67), (62), (59) и (47) при $i = q_0$ и целые значения Q'_ℓ, $\ell = 0,1,2,\ldots,t-1$, по формулам (67), (63), (61) и (48) при $i = q_0$. Имея в качестве $\beta_{r_{q_0}-\nu}(q_0)$ дробь (66), $\nu = 0,1,2,\ldots,r_{q_0}-1$, $r_{q_0} = 2^{-q_0}(r+1)$, на (q_0+1)-м шаге проводим вычисление целых коэффициентов в многочленах числителя и знаменателя дроби $\beta_{r_{q_0+1}-\nu}(q_0+1)$, $\nu = 0,1,2,\ldots,r_{q_0+1}-1$, $\quad r_{q_0+1} = 2^{-q_0-1}(r+1)$, по формулам (47), (48) при $i = q_0+1$. Затем редуцируем, как это описано выше, числитель и знаменатель дроби $\beta_{r_{q_0+1}-\nu}(q_0+1)$ по модулю многочлена $h(x)$ при $x = a$. Домножая числитель и знаменатель редуцированной дроби на общий множитель, получаем в качестве $\beta_{r_{q_0+1}-\nu}(q_0+1)$ дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены степени $t-1$ от a с целыми коэффициентами. И так далее. Проводим редукцию на каждом шаге $i = q_0$, q_0+1, $q_0+2, \ldots, q$. Поскольку коэффициенты в многочлене $h(x)$ и степень $h(x)$ являются абсолютными постоянными, такие редукции не ухудшают оценку сложности проводимых вычислений. На последнем q-м шаге после редукции имеем

$$S_m = S_{r_q}(q) = S_1(q) = \frac{\beta_{r_q}(q)}{r!}, \tag{68}$$

где

$$\beta_{r_q}(q) = \frac{\alpha_{r_q}(q)}{\delta_{r_q}(q)}, \tag{69}$$

$$\alpha_{r_q}(q) = \sum_{k=0}^{t-1} \widetilde{R}_k a^k, \quad \delta_{r_q}(q) = \sum_{\ell=0}^{t-1} \widetilde{Q}_\ell a^\ell, \tag{70}$$

$\widetilde{R}_k, \widetilde{Q}_\ell$ – целые числа.

Чтобы вычислить значения $\alpha_{r_q}(q)$ и $\delta_{r_q}(q)$ по формулам (70) при уже вычисленных коэффициентах $\widetilde{R}_k$ и $\widetilde{Q}_\ell$, учитывая, что a есть алгебраическое число, $t = \text{const}$, а также вычислить дробь $\beta_{r_q}(q)$ по формуле (69), достаточно

$$O(M(n)) \tag{71}$$

операций. Чтобы вычислить дробь (68), учитывая (30), достаточно

$$O\big(M(\log n)n\log n\big) \tag{72}$$

операций. Из (71), (72) и (31) следует, что для вычисления суммы S_m при вещественном алгебраическом a достаточно

$$O\big(M(n)\log^2 n\big)$$

операций.

Рассмотрим сумму (26). Для вычисления в (26) значения $\log^{j-m} n$, $0 \leqslant m \leqslant j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, достаточно $O\big(M(\log n)\log^2 n\big)$ операций. Для вычисления значения $n^a = e^{a\log n}$, где a – алгебраическое число, достаточно $O\big(M(n)\log^2 n\big)$ операций.

Как и в [6], для вычисления суммы

$$S = \sum_{m=0}^{j}(-1)^m \frac{j!\log^{j-m} n}{(j-m)!} S_m \tag{73}$$

с точностью 2^{-n} достаточно вычислить сумму S_m и значение $\log^{j-m} n$ с точностью 2^{-3n}. Оценив модуль значения S, из (73) и (26) находим, что для вычисления суммы A'_j с точностью 2^{-n} достаточно вычислить значения S и n^a с точностью $2^{-(a+2)n}$, $0 < a < 1$.

Из вышеприведенных оценок следует, что для вычисления интеграла $J_j = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\log^j t\,dt$, где a – вещественное алгебраическое число, $0 < a < 1$, достаточно

$$O\big(M(n)\log^2 n\big)$$

операций. Имеет место

Теорема 1. *Для сложности вычисления значения дзета-функции Гурвица $\zeta = \zeta(s,a)$ при любом натуральном $s = k$, $k \geqslant 2$, и любом вещественном алгебраическом a, справедлива оценка*

$$s_\zeta(n) = O\big(M(n)\log^2 n\big).$$

§ 6. Теорема о сложности вычисления рядов Дирихле

Следствием теоремы 1 является теорема 2 о сложности вычисления L-ряда Дирихле $L(s,\chi)$ при любом натуральном $s = k$, $k \geqslant 2$.

Пусть m – целое число, $m \geqslant 2$; $\chi(\ell)$ – произвольный характер Дирихле по модулю m. Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$L(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi(k)}{k^s} = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\chi(km+\ell)}{(km+\ell)^s} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m}\frac{\chi(\ell)}{m^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\dfrac{\ell}{m}\right)^s} = \frac{1}{m^s}\sum_{\ell=1}^{m}\chi(\ell)\zeta\left(s,\frac{\ell}{m}\right) \tag{74}$$

Воспользуемся конструктивным определением $\chi(\ell)$ (см., например, [18, с. 106]).

Пусть $m = 2^{\alpha} {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}$ – каноническое разложение числа m, и числа c, c_0 и c_ν такие, что

$c = c_0 = 1$, если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$,

$c = 2$, $c_0 = 2^{\alpha-2}$, если $\alpha \geqslant 2$,

$c_\nu = \varphi({p_\nu}^{\alpha_\nu}) = {p_\nu}^{\alpha_\nu} - {p_\nu}^{\alpha_\nu - 1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, r.$

Пусть также g_ν – наименьший первообразный корень по модулю ${p_\nu}^{\alpha_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, r$. Пусть $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ есть система индексов числа ℓ по модулю m, $1 \leqslant \ell < m$, $(\ell, m) = 1$, т.е. для чисел $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ справедливы сравнения

$$\begin{aligned}
&\ell = (-1)^{\gamma} 5^{\gamma_0} (\operatorname{mod} 2^{\alpha}),\\
&\ell = {g_1}^{\gamma_1} (\operatorname{mod} {p_1}^{\alpha_1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\ell = {g_r}^{\gamma_r} (\operatorname{mod} {p_r}^{\alpha_r}).
\end{aligned} \tag{75}$$

Пусть числа R, R_0, $R_1, \dots, R_r$ являются какими-либо корнями уравнений

$$R^c = 1, \quad R^{c_0} = 1, \quad R^{c_1} = 1, \dots, R^{c_r} = 1. \tag{76}$$

Заметим, что корнями уравнения $R^{\lambda} = 1$ являются числа

$$e^{2\pi i \frac{\nu}{\lambda}}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1. \tag{77}$$

Тогда

$$\chi(\ell) = \begin{cases} R^{\gamma} {R_0}^{\gamma_0} {R_1}^{\gamma_1} \dots {R_r}^{\gamma_r}, & \text{если} \quad (\ell, m) = 1,\\ \qquad 0, & \text{если} \quad (\ell, m) > 1. \end{cases} \tag{78}$$

Определенная таким образом для всякого целого ℓ функция $\chi(\ell)$ называется характером Дирихле по модулю m.

Зная из (75) числа $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r$, можно вычислить любой характер Дирихле $\chi(\ell), (\ell, m) = 1$, по формулам (76)–(78) с точностью 2^{-n} за

$$O\big(M(n) \log^2 n\big) \tag{79}$$

операций (быстрое вычисление $\exp(z)$ для любого комплексного аргумента z подробно описано в [3]). Из (74) следует, что число операций, достаточное для вычисления $L(s, \chi)$ с точностью 2^{-n}, также определяется оценкой (79). Имеет место

Теорема 2. *Для сложности вычисления значения L-ряда Дирихле $L(s, \chi)$ при любом натуральном $s = k$, $k \geqslant 2$, и любом характере Дирихле $\chi(\ell)$ по модулю m, $m \geqslant 2$, m – целое число, справедлива оценка*

$$s_L(n) = O\big(M(n) \log^2 n\big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карацуба Е. А.* О новом методе быстрого вычисления трансцендентных функций // УМН. 1991. Т. 46. № 2. С. 219–220.
2. *Карацуба Е. А.* О быстром вычислении трансцендентных функций // ДАН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 278–279
3. *Карацуба Е. А.* Быстрые вычисления трансцендентных функций // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 4. С. 87–110.

4. *Karatsuba Catherine A.* Fast Evaluation of Bessel Functions // Integral Transforms and Special Functions. 1993. T. 1. № 4. C. 269–276.
5. *Карацуба Е. А.* Быстрое вычисление $\zeta(3)$ // Пробл. передачи информ. 1993. Т. 29. № 1. С. 68–73.
6. *Карацуба Е. А.* Быстрое вычисление дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при целых значениях аргумента s // Пробл.передачи информ. 1995. Т. 31. № 4. С. 69–80.
7. *Карацуба Е. А.* О быстром вычислении дзета-функции Римана при целых значениях аргумента // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 4. С. 463.
8. *Карацуба А. А.* Сложность вычислений // Труды математического института им. В.А. Стеклова. М.: Наука, 1995. Т. 211. С. 186–202.
9. *Карацуба А. А., Офман Ю. П.* Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 293–294.
10. *Karacuba A. A.* Berechnungen und die Kompliziertheit von Beziehungen // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1975. T. 11. S. 10–12.
11. *Schönhage A., Strassen V.* Schnelle Multiplikation großer Zahlen // Computing. 1971. T. 7. № 314. C. 281–292.
12. *Schönhage A., Grotefeld A. F. W., Vetter E.* Fast Algorithms: a Multitape Turing Machine Implementation. Mannheim-Zürich:BI-Wiss.-Verl. 1994.
13. *Бендерский Ю. В.* Быстрые вычисления // ДАН СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1041–1043.
14. *Brent R. P.* Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions // J. ACM. 1976. T. 23. № 2. C. 242–251.
15. *Borwein J. M., Borwein P. B.* π and the AGM. New York:Wiley, 1987.
16. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
17. *Ла Валле-Пуссен Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых. М.: ГТТИ, 1933.
18. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
06.03.98

После переработки
05.06.98