1996. Т. 32, № 5. С. 702 — 703

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

А. Ю. Александров

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + ax^{\nu}\dot{x} + bx^{\mu} = 0. \tag{1}$$

Здесь a и b — положительные постоянные, $\nu = p_1/q_1$, $\nu > 1$, $\mu = p_2/q_2$, $\mu > 1$, причем p_1 — четное число, а p_2, q_1, q_2 — нечетные.

Произведя в уравнении (1) замену $y = \dot{x} + ax^{\nu+1}/(\nu+1)$, получим систему

$$\dot{x} = y - ax^{\nu+1}/(\nu+1), \quad \dot{y} = -bx^{\mu}. \tag{2}$$

Известно (см. [1]), что для системы (2) существует функция Ляпунова

$$V = \frac{y^2}{2} + b\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1},$$

удовлетворяющая условиям теоремы Барбашина — Красовского. Таким образом, нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво в целом.

Рассмотрим функцию

$$V_1 = \frac{y^2}{2} + b\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + cxy^s,$$

где c — отрицательная постоянная, $s = p_3/q_3$, $s \geq 1$, причем p_3 и q_3 — нечетные числа. Если $s \geq \max\{\mu/(\nu+1); 1 + 2\nu/(\mu+1)\}$, а число c достаточно мало по абсолютной величине, то функция V_1 положительно определена, а ее производная в силу системы (2) является отрицательно-определенной функцией.

Исследуем, далее, возмущенное уравнение

$$\ddot{x} + (ax^{\nu} + f_1(t)x^{\lambda})\dot{x} + (bx^{\mu} + f_2(t)x^{\sigma}) = 0. \tag{3}$$

Будем предполагать, что λ и σ — рациональные числа с нечетными знаменателями, $\lambda > 1$, $\sigma > 1$, а функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$ вместе с интегралами $\int\limits_0^t f_j(\tau)\,d\tau$, $j = 1, 2$. Система, соответствующая уравнению (3), имеет вид

$$\dot{x} = y - ax^{\nu+1}/(\nu+1), \quad \dot{y} = -bx^{\mu} - f_1(t)x^{\lambda}\left(y - ax^{\nu+1}/(\nu+1)\right) - f_2(t)x^{\sigma}. \tag{4}$$

Используя функцию V_1, получим достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4)

$$\lambda > \max\{\nu; \mu - \nu - 1\}, \quad \sigma > \max\{\mu; (2\nu + \mu + 1)/2\}. \tag{5}$$

Для уточнения области значений параметров λ и σ, при которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения, воспользуемся предложенным в работе [2] методом построения функций Ляпунова для нелинейных нестационарных систем.

Пусть

$$V_2 = V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}\left(x^{\sigma}\int\limits_0^t f_2(\tau)\,d\tau + x^{\lambda}\left(y - a\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)\int\limits_0^t f_1(\tau)\,d\tau\right).$$

При этом на число s накладывается дополнительное условие $s > 2$.

Проверяя для функции V_2 условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [3], получаем, что имеет место

Теорема. *Пусть*

$$\lambda > \max\{\mu - 2\nu - 1; (2\nu - \mu + 1)/2; \nu/2; (\nu + \mu + 1)/6; (\mu - \nu - 1)/2\},$$

$$\sigma > \max\{(\nu + \mu + 1)/2; (\nu + \mu + 4)/3; \mu - \nu; \nu + 1\}. \tag{6}$$

Тогда нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво.

Следствие. *Предположим, что уравнение (3) имеет вид*

$$\ddot{x} + (a + f_1(t))x^\nu \dot{x} + (b + f_2(t))x^\mu = 0. \tag{7}$$

Если выполнены условия $\max\{\nu+1; \nu/2+2\} < \mu < 3\nu+1$, *то нулевое решение уравнения (7) асимптотически устойчиво.*

Замечания. 1. Использование функции V_2 улучшает оценки на параметры λ и σ, так как из выполнения неравенств (5) следует, что неравенства (6) также будут выполнены.

2. Известно (см. [1, 4]), что асимптотическая устойчивость нулевого решения нелинейной системы сохраняется, если порядок возмущений выше порядка правых частей невозмущенной системы. Для рассматриваемых нестационарных возмущений получаем условия сохранения асимптотической устойчивости и в случаях, когда $\lambda < \nu$, $\sigma < \mu$.

3. Оценки (6) на значения параметров λ и σ не являются, вообще говоря, наилучшими, так как определяются функцией V_1. Например, если $\mu = 2\nu + 1$, то система (2) будет обобщенно-однородной (см. [4]), ее правые части являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, а неравенства (6) имеют вид

$$\lambda > \nu/2 + 1/3, \quad \sigma > \max\{3\nu/2 + 1; \nu + 5/3\}.$$

В работе [4] доказано, что в этом случае для системы (2) существует дважды непрерывно дифференцируемая обобщенно-однородная функция, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Используя эту функцию вместо V_1 при построении функции V_2, получим неравенства $\lambda > \nu/2$, $\sigma > 3\nu/2 + 1$, улучшающие условия (6).

4. Пусть

$$h_j(t) = f_j(t) \int_0^t f_{3-j}(\tau)\, d\tau, \qquad j = 1, 2.$$

Функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq 0$. Если интегралы $\int_0^t h_j(\tau)\, d\tau$, $j = 1, 2$, ограничены при $t \geq 0$, то можно применить предложенный в работе [5] несколько модифицированный способ построения функции V_2 и улучшить оценки на параметры λ и σ, при которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Литература

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
2. *Александров А. Ю.* К вопросу об устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями. Санкт-Петербург, 1994. Деп. в ВИНИТИ 22.09.94, № 2239 — В94.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
4. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., 1959.
5. *Александров А. Ю., Старостенко Б. В.* // Тр. Алтай. гос. техн. ун-та им. И. И. Ползунова. Барнаул, 1994. Вып. 3. С. 259 — 263.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 22 марта 1995 г.