



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. A. Isachenko, Limit sets of free convergence groups,
Sibirsk. Mat. Zh., 2002, Volume 43, Number 1, 70–75

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1288>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 11:41:48



О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ СВОБОДНЫХ СХОДЯЩИХСЯ ГРУПП

Н. А. Исаченко

Аннотация: Изучаются предельные множества сходящихся групп, и доказыва-
ется, что предельное множество свободной разрывной кокомпактной сходящейся
группы с инвариантной компонентой области разрывности является дисконтинуу-
мом. Библиогр. 7.

Введение

Сходящиеся группы были введены Ф. Герингом и Дж. Мартином [1] как естественное обобщение мёбиусовых групп. Класс таких групп достаточно широк, в частности, он включает в себя так называемые равномерно квазиконформные группы, т. е. группы квазиконформных гомеоморфизмов пополненного евклидова пространства на себя, коэффициенты квазиконформности которых ограничены в совокупности.

Сходящиеся группы, являясь обобщением мёбиусовых групп, наследуют многие их свойства (см. [1]). В то же время класс сходящихся групп существенно шире. В [2] доказано существование равномерно квазиконформных групп, которые даже чисто алгебраически не могут быть изоморфны мёбиусовым.

В настоящей работе изучаются предельные множества свободных сходящихся групп и доказывается, что при достаточно естественных ограничениях предельное множество свободной разрывной сходящейся группы является дисконтинуумом.

1. Определения

Пусть $\mathbf{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — расширенное n -мерное евклидово пространство, отождествленное с n -мерной сферой посредством стереографической проекции. Группу G гомеоморфизмов \mathbf{S}^n на себя будем называть *сходящейся*, если из любого бесконечного множества $F \subset G$ можно выбрать последовательность $\{g_k\}$ такую, что будет выполнено одно из следующих условий:

- (i) существует гомеоморфизм $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ такой, что g_k сходятся к f равномерно на \mathbf{S}^n ;
- (ii) существуют точки $x \in \mathbf{S}^n$, $y \in \mathbf{S}^n$ (не обязательно различные) такие, что $g_k(z)$ сходятся к y и $g_k^{-1}(z)$ сходятся к x равномерно на компактах в $\mathbf{S}^n \setminus \{x\}$ и $\mathbf{S}^n \setminus \{y\}$ соответственно.

Относительно топологии равномерной сходимости на компактах всякая сходящаяся группа является топологической группой. Сходящаяся группа называется *дискретной*, если единичный элемент изолирован в этой топологии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01523).

Несложно видеть, что это эквивалентно тому, что для такой группы выполнено только условие (ii).

Пусть G — сходящаяся группа, действующая в \mathbf{S}^n , будем говорить, что G действует разрывно в точке $x \in \mathbf{S}^n$, если существует окрестность $U(x) \subset \mathbf{S}^n$ точки x такая, что $U(x) \cap g(U(x)) \neq \emptyset$ не более чем для конечного числа элементов $g \in G$. Множество всех таких точек называется *областью разрывности* и обозначается через $\Omega(G)$, а множество $\Lambda(G) = \mathbf{S}^n \setminus \Omega(G)$ называется *предельным множеством группы G* . Группа G называется *разрывной*, если $\Omega(G) \neq \emptyset$.

Приведем необходимые в дальнейшем сведения из трехмерной топологии и теории препятствий.

Пусть M — трехмерное многообразие. По теореме Мойза [3] на многообразии M можно ввести кусочно-линейную структуру. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на M зафиксирована некоторая кусочно-линейная структура и все отображения являются кусочно-линейными.

Компактное двумерное многообразие $S \subset M$ (поверхность в M) называется *двусторонней вложенной поверхностью в M* , если S разбивает свою регулярную окрестность в M . Если S — замкнутая поверхность в \mathbf{S}^3 , то *внутренностью S* назовем множество в \mathbf{S}^3 , ограниченное S и не содержащее точку ∞ .

Пусть M и N — многообразия, $\pi_1(M)$ и $\pi_1(N)$ — их фундаментальные группы. Пусть $f : M \rightarrow N$ — непрерывное отображение. Через f_* будем обозначать гомоморфизм $\pi_1(M)$ в $\pi_1(N)$, индуцированный отображением f .

Пусть X — комплекс, L — его подкомплекс, $x_0 \in L$, Y — комплекс такой, что $\pi_k(Y, y_0) = 0$ для всех $k \geq 2$. Пусть $f : L \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, и $f(x_0) = y_0$. Далее $f_* : \pi_1(L, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $i_* : \pi_1(L, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ — гомоморфизмы, индуцированные отображением f и тождественным вложением $i : L \rightarrow X$.

Лемма 1 [4]. *При заданных выше условиях отображение f продолжается до непрерывного отображения $\hat{f} : X \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\theta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(L, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ i_* \searrow & & \nearrow \theta \\ & \pi_1(X, x_0) & \end{array}$$

в коммутативную. Причем для любого такого гомоморфизма θ существует продолжение $\hat{f} : X \rightarrow Y$ такое, что $\hat{f}_* = \theta$.

2. Предельные множества свободных сходящихся групп

В теории клейновых групп, т. е. разрывных групп мёбиусовых преобразований \mathbf{S}^n , известен следующий результат Н. А. Гусевского [5].

Теорема 1. *Пусть Γ — клейнова геометрически конечная свободная ранга $m \geq 2$ группа без параболических элементов, действующая в \mathbf{S}^3 . Тогда ее предельное множество гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.*

Условия геометрической конечности и отсутствия параболических элементов существенны в теореме 1. Определение геометрической конечности клейновой группы Γ использует продолжение действия Γ в \mathbb{R}_+^4 . Поскольку не известно (по-видимому, и не верно), возможно ли действие всякой сходящейся группы продолжить в \mathbb{R}_+^4 , то для доказательства аналогичного утверждения для

свободных сходящихся групп требуются ограничения, заменяющие условия геометрической конечности и отсутствия параболических элементов. Оказывается, что вполне естественными условиями являются наличие инвариантной компоненты $\Omega_0 \in \Omega(G)$ области разрывности и компактность фактор-многообразия $M = \Omega_0/G$.

Теорема 2. Пусть G — сходящаяся разрывная свободная ранга $m \geq 2$ группа, действующая в \mathbf{S}^3 и имеющая инвариантную компоненту Ω_0 области разрывности, и фактор-многообразие $M = \Omega_0/G$ компактно. Тогда предельное множество $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

Рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_m, S'_m$ — замкнутые поверхности в \mathbf{S}^3 , причем замыкания их внутренностей не пересекаются, S_i гомеоморфна S'_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть, далее, g_1, g_2, \dots, g_m — гомеоморфизмы \mathbf{S}^3 на себя такие, что $g_i(\overline{\text{ext}(S_i)}) = \overline{\text{int}(S'_i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Допустим, что при этом группа $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_m \rangle$ сходящаяся. В п. 4 будет показано, что в этом случае G свободная, разрывная и ее предельное множество гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

Тем самым для доказательства теоремы 2 достаточно построить область $D \subset \mathbf{S}^3$, ограниченную $2m$ попарно не пересекающимися поверхностями $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_m, S'_m$, и отображения g_1, g_2, \dots, g_m такие, что $g_i(\overline{\text{ext}(S_i)}) = \overline{\text{int}(S'_i)}$, при этом g_1, g_2, \dots, g_m порождают нашу группу G .

Последующие два пункта посвящены доказательству теоремы 2. В п. 3 для группы G мы строим область D , о которой говорилось выше. В п. 4, как уже сказано, докажем, что предельное множество $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

3. Построение области D

Лемма 2. Если выполнены условия теоремы 2, то существуют область D и гомеоморфизмы g_1, g_2, \dots, g_m такие, что

- (1) D ограничена $2m$ поверхностями $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_m, S'_m$;
- (2) замыкания внутренностей поверхностей $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_m, S'_m$ попарно не пересекаются;
- (3) $g_i(\overline{\text{ext}(S_i)}) = \overline{\text{int}(S'_i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$;
- (4) g_1, g_2, \dots, g_m порождают группу G .

Доказательство. Рассмотрим накрытие $p : \Omega_0 \rightarrow M = \Omega_0/G$. Пусть $x_0 \in M$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tau : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$ — естественный эпиморфизм и $p_* : \pi_1(\Omega_0, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$ — естественный гомоморфизм, индуцированные накрытием $p : \Omega_0 \rightarrow M$. Пусть $H = p_*(\pi_1(\Omega_0, \tilde{x}_0))$ и g_1, g_2, \dots, g_m — свободные порождающие группы G . Для каждого g_i , $i = 1, 2, \dots, m$, выберем по представителю $\tilde{g}_i \in \tau^{-1}(g_i)$. Тогда $\pi_1(M, x_0) = \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_m, H \rangle$.

В многообразии M выберем простые петли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, представляющие в $\pi_1(M, x_0)$ элементы $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_m$ соответственно. Обозначим через L комплекс в M , образованный петлями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Рассмотрим комплекс Y , представляющий собой букет из m окружностей Y_1, Y_2, \dots, Y_m , касающихся друг друга в точке y_0 . Фундаментальная группа $\pi_1(Y, y_0)$ является свободной ранга m , т. е. изоморфна группе G . Пусть $\varphi : G \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ — изоморфизм ($\varphi(g_i) = [Y_i]$).

Пусть $f : L \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, $f(\alpha_i) = Y_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $f(x_0) = y_0$. Многообразие M , комплексы L и Y и отображение f полностью удовлетворяют

условиям леммы 1, причем роль гомоморфизма θ играет эпиморфизм $\varphi \circ \tau$. Таким образом, существует непрерывное отображение $\hat{f} : M \rightarrow Y$ такое, что $\hat{f}|_L = f$ и \hat{f} индуцирует эпиморфизм $\tau : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$, т. е. $\hat{f}_* = \tau$.

На каждой из окружностей Y_i выберем по точке $y_i \in Y_i$, $y_i \neq y_0$. Точки y_i можно считать регулярными в том смысле, что $\hat{f}^{-1}(y_i)$ — набор правильно вложенных двумерных многообразий, и для каждой поверхности $S \subset \hat{f}^{-1}(y_i)$ существуют окрестности $S \times [-1, 1] \subset M$ и $\{y_i\} \times [-1, 1] \subset Y_i$ такие, что для всякой точки $q \in S$ отображение \hat{f} , ограниченное на $\{q\} \times [-1, 1]$, представляет собой гомеоморфизм на $\{y_i\} \times [-1, 1]$. В самом деле, это следует из леммы Сарда, поскольку по теореме Мойза [3] на M можно ввести гладкую структуру и отображение \hat{f} можно считать гладким.

Рассмотрим прообраз $\hat{f}^{-1}(y_i)$ точки y_i , $i = 1, 2, \dots, m$. В нем имеется поверхность, которую обозначим через S_i , пересекающая петлю α_i . Действительно, на α_i существует точка x такая, что $\hat{f}(x) = y_i$, и, следовательно, x лежит на одной из компонент $\hat{f}^{-1}(y_i)$. Так как точка y_i регулярная, а сужение \hat{f} на α_i — гомеоморфизм, петля α_i пересекает S_i ровно в одной точке. Очевидно, что поверхности S_i и S_j не пересекаются при $i \neq j$.

Рассмотрим компоненту поднятия $p^{-1}(S_i)$ поверхности S_i и обозначим ее через \tilde{S}_i .

Лемма 3. Сужение отображения p на \tilde{S}_i — гомеоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, поверхность S_i с помощью \hat{f} отображается в точку, и, значит, $\hat{f}_*(i_*(\pi_1(S_i))) = 1$. Но \hat{f} индуцирует естественный эпиморфизм $\tau : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$. Следовательно, если петля α содержится в S_i , то она представляет элемент $p_*(\pi_1(\Omega_0, \tilde{x}_0))$, а поэтому ее поднятие $\tilde{\alpha} \subset \tilde{S}_i$ также является петлей, т. е. на \tilde{S}_i нет эквивалентных относительно G точек, тем самым сужение p на \tilde{S}_i — гомеоморфизм. \square

В Ω_0 существует единственный путь $\tilde{\alpha}_i$, проходящий через \tilde{x}_0 , накрывающий путь α_i и имеющий начало на одной компоненте $p^{-1}(S_i)$, а конец — на другой. Обозначим эти компоненты через \tilde{S}_i и \tilde{S}'_i .

Так как путь $\tilde{\alpha}_i$ накрывает путь α_i , а α_i представляет в $\pi_1(M, x_0)$ элемент \tilde{g}_i , то $g_i(\tilde{S}_i) = \tilde{S}'_i$.

Можно считать, что точка ∞ лежит в области разрывности группы G . Поэтому точку \tilde{x}_0 можно выбрать так, что $\text{int}(\tilde{S}'_i) \subset \text{ext}(\tilde{S}_i)$ и $\tilde{x}_0 \in \text{ext}(\tilde{S}'_i) \cap \text{ext}(\tilde{S}_i)$.

Лемма 4. $g_1(\text{ext}(\tilde{S}_1)) = \text{int}(\tilde{S}'_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка \tilde{x}_0 под действием g_1 отображается внутрь \tilde{S}'_1 . Действительно, допустим, что $g_1(\tilde{x}_0) \in \text{ext}(\tilde{S}'_1)$. Рассмотрим путь α^* от точки \tilde{x}_0 до $g_1(\tilde{x}_0)$, накрывающий путь α_1 . Так как индекс пересечения α_1 с S_1 равен единице, а сужение p на \tilde{S}'_1 — гомеоморфизм, то индекс пересечения α^* с \tilde{S}'_1 также равен единице. Но концы пути α^* (\tilde{x}_0 и $g_1(\tilde{x}_0)$) лежат во внешности поверхности \tilde{S}'_1 , которая, очевидно, разбивает \mathbf{S}^3 , и потому индекс пересечения α^* с \tilde{S}'_1 равен нулю. Противоречие; следовательно, $g_1(\tilde{x}_0) \in \text{int}(\tilde{S}'_1)$.

Пусть $x \in \text{ext}(\tilde{S}_1)$. Соединив x с \tilde{x}_0 путем в $\text{ext}(\tilde{S}_1)$ и проведя стандартные рассуждения с покрытием пути шарами, получаем, что $g_1(x) \in \text{int}(\tilde{S}'_1)$. \square

Теперь рассмотрим поверхности \tilde{S}_2 и \tilde{S}'_2 . Из тех же соображений, что и для \tilde{S}_1 и \tilde{S}'_1 , можно считать, что $\text{int}(\tilde{S}'_2) \subset \text{ext}(\tilde{S}_2)$ и $g_2(\text{ext}(\tilde{S}_2)) = \text{int}(\tilde{S}'_2)$. Кроме того, ни одна из поверхностей \tilde{S}_2 и \tilde{S}'_2 не может лежать ни внутри \tilde{S}_1 , ни внутри \tilde{S}'_1 , так как в противном случае путь $\tilde{\alpha}_2$ пересекал бы поверхность \tilde{S}_1 или \tilde{S}'_1 и, следовательно, путь α_2 , накрываемый путем $\tilde{\alpha}_2$, пересекал бы поверхность S_1 .

Повторяя рассуждения для остальных поверхностей $\tilde{S}_3, \tilde{S}'_3, \dots, \tilde{S}_m, \tilde{S}'_m$, получим набор из $2m$ поверхностей, замыкания внутренностей которых попарно не пересекаются. При этом $g_i(\text{ext}(\tilde{S}_i)) = \text{int}(\tilde{S}'_i)$ и g_1, \dots, g_m порождают группу G . Таким образом, построена область D со свойствами (1)–(4). \square

4. Гомеоморфность предельного множества канторову дисконтинууму

В этом пункте будет доказана

Лемма 5. Пусть $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_m, S'_m$ — замкнутые поверхности, ограничивающие в \mathbf{S}^3 область D , замыкания внутренностей которых попарно не пересекаются. Пусть, далее, g_1, \dots, g_m — гомеоморфизмы \mathbf{S}^3 на себя такие, что $g_i(\text{ext}(S_2)) = \text{int}(S'_i)$. Тогда группа $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ свободная и разрывная. Если, кроме того, G — сходящаяся группа, то ее предельное множество $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

Доказательство. Утверждение, что G свободна и разрывна, вполне очевидно. В самом деле, пусть $x \in D$ и $U(x)$ — окрестность точки x , содержащаяся в D . Пусть $w = w(g_1, \dots, g_m)$ — произвольное редуцированное слово от g_1, \dots, g_m . Так как $U(x)$ содержится в пересечении внешностей всех S_i и S'_i , то $w(U(x)) \cap U(x) = \emptyset$ и $w(x) \neq x$, следовательно, w представляет нетривиальный элемент в группе G и $\Omega(G) \neq \emptyset$.

Докажем, что $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

Замыкания внутренностей поверхностей S_i и S'_i , $i = 1, 2, \dots, m$, назовем множествами нулевого поколения. Если $w = w(g_1, \dots, g_m)$ — редуцированное слово длины k , то $\overline{\text{int}(w(S_i))}$ и $\overline{\text{int}(w(S'_i))}$ будем называть множествами k -го поколения. Пусть U_k — объединение всех множеств k -го поколения. Заметим, что, если V_1 и V_2 — различные множества одного поколения, то либо $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, либо одно содержится в другом. Кроме того, $U_{k+1} \subset U_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, предельное множество $\Lambda(G)$ лежит в пересечении всех U_k .

Группа G неэлементарная, поэтому ее предельное множество совершенно [1]. Таким образом, для доказательства того, что $\Lambda(G)$ — дисконтинуум, достаточно показать, что оно нульмерно [6].

Предположим противное. Пусть $\Lambda(G)$ содержит отрезок кривой, который обозначим через γ . Тогда для любого k существует множество k -го поколения, содержащее γ . Поскольку поверхностей S_i и S'_i конечное число, то среди таких множеств существует бесконечно много образов замыкания одной поверхности. Пусть S_i такая поверхность и h_1, h_2, h_3, \dots — последовательность элементов, для которых $\gamma \subset \overline{\text{int}(h_k(S_i))}$, при этом h_k имеет длину k .

С другой стороны, поскольку G сходящаяся, то существуют точки $t_1, t_2 \in \Lambda(G)$ и подпоследовательность $\{h_{k_j}\}$ такие, что $h_{k_j}(x) \rightarrow t_2$ равномерно на компактах в $\mathbf{S}^3 \setminus t_1$. Противоречие; следовательно, $\Lambda(G)$ нульмерно и совершенно и тем самым гомеоморфно канторовскому дисконтинууму. \square

Из лемм 2 и 5 теперь с очевидностью следует справедливость теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поверхности $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_m, S'_m$ в лемме 5, вообще говоря, могут быть зацеплены между собой, а потому предельное множество группы G вполне может оказаться диким дисконтинуумом, т. е. таким, что не существует гомеоморфизма \mathbf{S}^3 на себя, отображающего $\Lambda(G)$ на отрезок. Примеры таких групп построены М. Фридманом и Р. Скорой [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gehring F. Martin G. Discrete quasiconformal groups. I // Proc. London Math. 1987. V. 55, N 3. P. 331–358.
2. Исаченко Н. А. О равномерно квазиконформных разрывных группах, не изоморфных мёбиусовым // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 5. С. 1040–1043.
3. Moise E. Affine structure on 3-manifolds // Ann. of Math. 1952. V. 56. P. 96–114.
4. Ху Сы-Цзян. Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.
5. Гусевский Н. А. Группы Шоттки в пространстве // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 30–33.
6. Александров П. С., Пасынков В. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1980.
7. Freedman M., Skora R. Strange actions of groups on spheres // J. Differential Geom. 1987. V. 25. P. 75–98.

Статья поступила 30 января 2001 г.

Исаченко Николай Андреевич

*Омский гос. университет, кафедра математического анализа,
пр. Мира, 55а, Омск 644077*

isachenk@univer.omsk.su; isachenko@math.omsu.omskreg.ru