



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. К. Демьянович, К оценке погрешности проекционных методов в задаче о наилучшем приближении, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1980, том 102, 5–18

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 января 2025 г., 12:29:50



К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ О
НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Ниже рассматриваются проекционные методы решения задачи о кратчайшем расстоянии от точки до замкнутого выпуклого множества M в гильбертовом пространстве H . Такая задача сводится к определенным вариационным неравенствам, приближенные методы решения которых рассматривались в ряде работ (см., например, [1] - [2]). В этой задаче С.Г. Михлин [3] получил оценки скорости сходимости проекционных методов при определенных предположениях относительно множества M .

Цель настоящей работы - изучение устойчивости и скорости сходимости указанных методов в данной задаче для более широкого класса множеств M и аппроксимирующих подпространств X . Тут вводится понятие равностепенной выпуклости, даются оценки погрешности метода через наилучшее приближение. Все рассматриваемые характеристики определяются метрикой гильбертова пространства и потому инвариантны относительно параллельного переноса системы координат в H ; это позволяет использовать линейные многообразия X , которые не проходят через начало координат (такие многообразия называются плоскостями в H).

В первом параграфе рассматриваются некоторые вопросы устойчивости вариационных неравенств, второй параграф посвящен оценке погрешности проекционных методов через наилучшее приближение элементами пересечения $X \cap M$. Во втором параграфе приводится пример, показывающий точность полученной оценки.

§ I. Об устойчивости решения вариационных неравенств

В первых двух пунктах этого параграфа рассматривается некоторая вспомогательная задача, необходимая для оценки устойчивости вариационных неравенств; третий пункт содержит основные результаты этого параграфа.

1°. В вещественном гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу об определении решений u системы неравенств

$$(u_0 - u, u_0^* - u) \leq \alpha, \quad (I.1)$$

$$\|u - u_0\|^2 \geq \|u_0^* - u_0\|^2 - \beta, \quad (I.2)$$

где α и β - вещественные числа, а u_0 и u_0^* - заданные эле-

менты пространства H . Через $V_{\alpha, \beta}$ обозначим множество решений этой задачи, а через ζ - величину $\|u_0^* - u_0\|^2$.

ЛЕММА 1. Справедливы следующие утверждения:

1) если $4\alpha + \zeta < 0$, то множество $V_{\alpha, \beta}$ пусто;

2) если $4\alpha + \zeta \geq 0$, и выполнено одно из условий

а) $\zeta \leq \beta$, б) $\zeta > \beta$, $\zeta \leq 2(\alpha + \beta)$, в) $\zeta > \beta$, $\zeta > 2(\alpha + \beta)$,
 $\zeta(2\alpha + \beta) \geq (\alpha + \beta)^2$,

то множество $V_{\alpha, \beta}$ не пусто;

3) если выполнены условия

$$4\alpha + \zeta \geq 0, \quad \zeta > \beta, \quad \zeta > 2(\alpha + \beta), \quad \zeta(2\alpha + \beta) < (\alpha + \beta)^2,$$

то множество $V_{\alpha, \beta}$ пусто;

4) если или $4\alpha + \zeta = 0$ и выполнено одно из условий а), б), в) или $4\alpha + \zeta > 0$ и выполнено условие в) со знаком равенства в последнем неравенстве, то $V_{\alpha, \beta}$ содержит только одну точку;

5) если существует решение u системы неравенств (I.1), (I.2), то $2\alpha + \beta \geq 0$ и справедлива оценка

$$\|u - u_0^*\| \leq (2\alpha + \beta)^{1/2};$$

6) если $\zeta > 0$, то из условия $|\alpha| + |\beta| < \zeta/4$ вытекают неравенства $4\alpha + \zeta > 0$, $\zeta > \beta$, $\zeta > 2(\alpha + \beta)$, и в этом случае множество $V_{\alpha, \beta}$ пусто или нет в зависимости от того, выполнено ли неравенство $\zeta(2\alpha + \beta) < (\alpha + \beta)^2$ или нет; если $\zeta(2\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^2$, то множество $V_{\alpha, \beta}$ состоит из одной точки.

ЛЕММА 2. Если $a \stackrel{\text{def}}{=} (u_0 - u_0^*, e) < 0$, $\|e\| = 1$, то при достаточно малых α и β , удовлетворяющих условию $2\alpha + \beta > 0$ существуют решения u системы (I.1), (I.2), имеющие вид

$$u = u_0^* + te, \quad \text{где } |t| \leq t_e, \quad t_e = |a|^{-1} \max\{|\alpha|, \frac{|\beta|}{2}\} + 0(\alpha^2 + \beta^2),$$

причем асимптотика в последней формуле равномерна при $\alpha^2 + \beta^2 \rightarrow 0$ относительно параметра a из любой фиксированной области вида $a \leq -a_0$, $a_0 = \text{const} > 0$. В случае, когда $(u_0 - u_0^*, e) = 0$, необходимым и достаточным условием существования решений u вида $u = u_0^* + te$ у системы неравенств (I.1), (I.2) являются соотношения $\alpha \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 0$; в этом случае $|t| \leq t_e$, $t_e = \sqrt{\alpha}$.

ЛЕММА 3. Если выполнено условие $a \stackrel{\text{def}}{=} (u_0 - u_0^*, e) \leq 0$,

$\|e\| = 1$, и существует решение u системы неравенств (I.1),

(I.2) вида $u = u_0^* + te$, $t \geq 0$, то необходимо $\alpha \geq 0$ и $t \leq \sqrt{\alpha}$.

2°. Пусть в гильбертовом пространстве H дано замкнутое

множество M ; через ∂M обозначим его границу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что множество M в точке $v \in \partial M$ удовлетворяет условию шара с вектором l , если оно не содержит шара $\|u - v - l\| < \|l\|$, $u \in M$.

Рассмотрим задачу об определении решения $u \in M$ неравенства

$$(u_0 - u, u_0^* - u) \leq \alpha, \quad (I.3)$$

где $u_0 \in M$, $u_0^* \in \partial M$, α - некоторое вещественное число. Через W_α обозначим множество решений задачи (I.3).

ЛЕММА 4. Если множество M в точке u_0^* удовлетворяет условию шара с вектором $u_0 - u_0^*$, то при $\alpha < 0$ задача (I.3) не имеет решений, а при $\alpha \geq 0$ решения задачи (I.3) существуют и для любого ее решения u_α^* справедлива оценка

$$\|u_\alpha^* - u_0^*\| \leq \sqrt{2\alpha}.$$

Пусть через заданную точку v , $v \in H$, проведена гиперплоскость с нормалью l ; она делит пространство на два полупространства. То из них, в которое направлена нормаль l , назовем положительным и обозначим через $H_l^+(v)$, а другое назовем отрицательным и будем обозначать $H_l^-(v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что множество M выпукло в точке $v \in \partial M$ по вектору l , если оно лежит в полупространстве $H_l^+(v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выпуклое множество M выпукло в каждой точке v своей границы по вектору l , если последний служит внешней нормалью опорной гиперплоскости к M в точке v (напомним, что гиперплоскость называется опорной для выпуклого замкнутого множества, если это множество имеет с гиперплоскостью непустое пересечение и лежит от нее по одну сторону). Выпуклое множество M удовлетворяет условию шара в каждой точке $v \in \partial M$ с упомянутым выше вектором l . Если множество M выпукло в точке $v \in \partial M$ по вектору l , то оно удовлетворяет условию шара с вектором l .

ЛЕММА 5. Если множество M выпукло в точке u_0^* по вектору $u_0 - u_0^*$, то при $\alpha < 0$ задача (I.3) не имеет решения, а при $\alpha \geq 0$ для любого решения u_α^* задачи (I.3) справедлива оценка

$$\|u_\alpha^* - u_0^*\| \leq \sqrt{\alpha}.$$

3⁰. Пусть M - замкнутое выпуклое множество гильбертова пространства H , а u_0 - точка в H , не содержащаяся в множестве M . Задача об отыскании наилучшего приближения точки u среди точек множества M имеет единственное решение (см., на-

пример, [2], стр.49); этой задаче эквивалентна задача об отыскании решения вариационного неравенства

$$(u_0 - u, w - u) \leq 0, \quad w \in M. \quad (I.4)$$

Как известно, под решением задачи (I.4) подразумевается элемент u_0^* , который будучи подставлен в (I.4) вместо u , дает верное неравенство, каков бы ни был элемент w из множества M . Поэтому задачу (I.4) можно рассматривать как задачу о решении системы неравенств, получающихся при всевозможных элементах w из M (конечно, как правило, такая система состоит из бесконечного и даже несчетного множества неравенств). Хотя задачу (I.4), следуя [1], можно было бы по-прежнему называть вариационным неравенством, однако, поскольку нам придется также рассматривать близкие задачи, не связанные с вариацией, то мы предпочтем, как правило, говорить о решении системы неравенств (каждое неравенство системы в таких случаях, как и в (I.4), определяется некоторым элементом w , $w \in M$, и все неравенства системы получаются, когда w пробегает все множество M).

Наряду с задачей (I.4) рассмотрим задачу об отыскании элемента $v \in M$, который удовлетворяет системе неравенств

$$(u_0 - v, w - v) \leq \alpha, \quad w \in M; \quad (I.5)$$

здесь α - фиксированное вещественное число.

Множество решений v_α задачи (I.5) обозначим через V_α . Очевидно, для $v_\alpha \in V$ справедлива оценка

$$(u_\alpha - v_\alpha, u_0^* - v_\alpha) \leq \alpha,$$

так что $V_\alpha \subset W_\alpha$, где W_α - множество решений задачи (I.3). Благодаря этому, из леммы 4 и замечания I получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА I. При $\alpha < 0$ множество V_α решений задачи (I.5) пусто, при $\alpha = 0$ это множество состоит из одного элемента $v = u_0^*$, а при $\alpha > 0$ множество V_α не пусто и для любого v_α , $v_\alpha \in V_\alpha$ справедлива оценка

$$\|v_\alpha - u_0^*\| \leq \sqrt{\alpha'}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с замечанием I выпуклое множество M выпукло в каждой точке v своей границы по вектору ℓ , который служит внешней нормалью к опорной гиперплоскости множества M в точке v . В частности, можно положить $\ell = u_0 - u_0^*$. Поскольку множество V_α представляет собой разве лишь часть мно-

жества W_α , а по лемме 5 последнее пусто при $\alpha < 0$, то V_α в этом случае тоже пусто. Далее, если $\alpha = 0$, то из леммы 5 видно, что W_α состоит лишь из элемента u_0^* , который, очевидно, удовлетворяет неравенству (I.5). Наконец, при $\alpha \geq 0$ имеем $u_0^* \in V_\alpha$, так что множество V_α не пусто и в соответствии с включением $V_\alpha \subset W_\alpha$ и леммой 5 получим $\|v_\alpha - u_0^*\| \leq \sqrt{\alpha}$. Теорема доказана.

§ 2. Аппроксимация решения вариационных неравенств

I⁰. Рассмотрим замкнутую плоскость $\tilde{X} \subset H$ такую, что пересечение $\tilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} M \cap \tilde{X}$ не пусто. Будем считать, что M - выпуклое замкнутое множество; тогда \tilde{M} также выпукло и замкнуто.

Для приближенного решения задачи (I.4) рассмотрим задачу об определении \tilde{u} из системы неравенств

$$(u_0 - \tilde{u}, \tilde{w} - \tilde{u}) \leq 0, \quad \tilde{w} \in \tilde{M}. \quad (2.1)$$

Решение последней задачи (оно, очевидно, существует и единственно) обозначим через \tilde{u}_0^* . Сдвинув, если нужно, начало координат в H в плоскость \tilde{X} , будем далее считать \tilde{X} подпространством в H . Пусть p - ортопроектор в H на подпространство \tilde{X} .

В соотношении (I.4) подставим $w = \tilde{w} \in \tilde{M}$ и $u = u_0^*$. Тогда получим систему верных неравенств

$$(u_0 - u_0^*, \tilde{w} - u_0^*) \leq 0, \quad \tilde{w} \in \tilde{M}. \quad (2.2)$$

Тождественно преобразуя левую часть в (2.2), найдем

$$\begin{aligned} (u_0 - u_0^*, \tilde{w} - u_0^*) &= (u_0 - u_0^*, \tilde{w}) - (u_0 - u_0^*, u_0^*) = \\ &= (pu_0 - pu_0^*, \tilde{w}) - (u_0 - pu_0, u_0^*) + (u_0^* - pu_0^*, u_0^*) - \\ &\quad - (pu_0 - pu_0^*, u_0^*), \end{aligned}$$

откуда теперь имеем

$$\begin{aligned} (u_0 - u_0^*, \tilde{w} - u_0^*) &= (pu_0 - pu_0^*, \tilde{w} - pu_0^*) - \\ &\quad - (u_0 - pu_0, u_0^* - pu_0^*) - \|u_0^* - pu_0^*\|^2. \end{aligned}$$

Итак, систему неравенств (2.2) можно переписать в виде

$$(u_0 - pu_0^*, \tilde{w} - pu_0^*) \leq \alpha, \quad \tilde{w} \in \tilde{M},$$

где

$$\alpha = (u_0 - ru_0, u_0^* - ru_0^*) - \|u_0^* - ru_0^*\|^2. \quad (2.3)$$

Это означает, что элемент $\tilde{v}_\alpha^* = ru_0^*$ является решением системы неравенств

$$(u_0 - \tilde{v}, \tilde{w} - \tilde{v}) \leq \alpha, \quad \tilde{w} \in \tilde{M}.$$

Предположим, что $ru_0^* \in \tilde{M}$; тогда по теореме I (заменяя в ней v_α^* на \tilde{v}_α^* , u_0^* на \tilde{u}_0^* , w на \tilde{w} и M на \tilde{M}) необходимо $\alpha \geq 0$, и, кроме того,

$$\|\tilde{v}_\alpha^* - \tilde{u}_0^*\| \leq \sqrt{\alpha}. \quad (2.4)$$

Используя неравенство треугольника при оценке нормы $\|u_0^* - \tilde{u}_0^*\|$ и применяя формулы (2.3) и (2.4) видим, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если M - выпуклое замкнутое множество, \tilde{X} - подпространство в H такое, что $\tilde{M} = \tilde{X} \cap M$ не пусто, а u_0^* и \tilde{u}_0^* - решения задач (I.4) и (2.I) соответственно, то при условии, что $ru_0^* \in \tilde{M}$, справедлива оценка

$$\|u_0^* - \tilde{u}_0^*\| \leq (q_{\tilde{X}}(u_0^*) + (q_{\tilde{X}}^2(u_0^*) + q_{\tilde{X}}(u_0^*) q_{\tilde{X}}(u_0))^{1/2},$$

где p - ортопроектор в H на подпространство \tilde{X} , а $q_{\tilde{X}}(u)$ - наилучшее приближение элемента u с помощью элементов пространства \tilde{X} , $q_{\tilde{X}}(u) = \|u - pu\|$.

2°. Из теоремы 2 следует, что если наилучшее приближение элементов u_0 и u_0^* пространствами $\tilde{X}(h)$ имеет одинаковый порядок, то тот же порядок имеет и скорость сходимости приближенного решения $\tilde{u}_0^*(h)$ к точному решению u_0^* . Однако, это утверждение получено при трудно проверяемом предположении, что $ru_0^* \in \tilde{M}$. Приводимые ниже примеры показывают, что без этого предположения для сохранения прежней скорости сходимости необходимы дополнительные ограничения на множество M и на структуру семейства пространств $\{\tilde{X}(h)\}$.

Рассмотрим решение \tilde{u}_1^* семейства неравенств

$$(u_0^* - \tilde{u}_1^*, \tilde{w} - \tilde{u}_1^*) \leq 0, \quad \tilde{w} \in \tilde{M}. \quad (2.5)$$

Из тождества

$$\|u_0^* - u_0\|^2 = \|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 + \|u_0^* - \tilde{u}_1^*\|^2 + \|u_0 - \tilde{u}_0^*\|^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & -2(u_0^* - \tilde{u}_1^*, \tilde{u}_0^* - \tilde{u}_1^*) - 2(u_0 - \tilde{u}_0^*, \tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*) - \\
 & -2(u_0^* - \tilde{u}_1^*, u_0 - \tilde{u}_0^*),
 \end{aligned}$$

ввиду неравенств (2.5) и (2.1) найдем

$$\begin{aligned}
 \|u_0^* - u_0\|^2 \geq & \|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 + \|u_0^* - \tilde{u}_1^*\|^2 + \|u_0 - u_0^*\|^2 - \\
 & -2(u_0^* - \tilde{u}_1^*, u_0 - \tilde{u}_0^*),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

откуда

$$\|u_0^* - u_0\|^2 \geq \|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 + (\|u_0 - \tilde{u}_0\| - \|u_0^* - \tilde{u}_1^*\|)^2. \tag{2.7}$$

Очевидно $\|u_0 - u_0^*\| \leq \|u_0 - \tilde{u}_0^*\|$, так что из (2.7) при предположении $\|u_0 - u_0^*\| \geq \|\tilde{u}_1^* - u_0^*\|$ вытекает неравенство

$$\|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 \leq \|u_0^* - u_0\|^2 - (\|u_0 - u_0^*\| - \|u_0^* - \tilde{u}_1^*\|)^2.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3. Если M - замкнутое выпуклое множество в H , а \tilde{X} - подпространство в H , имеющее непустое пересечение с M , то при условии $\|u_0 - u_0^*\| \geq \|\tilde{u}_1^* - u_0\|$ справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 \leq 2\|u_0 - u_0^*\| \cdot \|u_0^* - \tilde{u}_1\| - \|u_0^* - \tilde{u}_1^*\|^2,$$

где u_0^* , \tilde{u}_0^* и \tilde{u}_1^* - решения задач (1.4), (2.1) и (2.5) соответственно.

Обратимся теперь снова к неравенству (2.6); оно легко преобразуется к виду

$$\|u_0^* - u_0\|^2 \geq \|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 + \|(u_0^* - \tilde{u}_1^*) - (u_0 - \tilde{u}_0^*)\|^2,$$

откуда найдем

$$\|\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*\|^2 \leq (\tilde{u}_1^* - \tilde{u}_0^*, u_0^* - u_0). \tag{2.8}$$

Предположим, что наилучшее приближение элемента u_0^* элементами подпространства \tilde{X} не лежит в M . Тогда $\tilde{u}_1^* \in \partial M$ (граница множества M берется относительно подпространства \tilde{X}).

Найдем неотрицательные числа t_0^* , t_1^* , α и единичные векторы l_0^* , l_1^* , e так, чтобы

$$\tilde{u}_i^* = u_0^* + t_i^* l_i^*, \quad i=0,1, \quad u_0 = u_0^* - \alpha e.$$

В виду соотношения (2.8) числа t_i^* и векторы l_i^* , $i = 0, 1$ удовлетворяют неравенству

$$\|t_1 l_1 - t_0 l_0\|^2 \leq a(t_1 l_1 - t_0 l_0, e), \quad (2.9)$$

если в нем взять $t_i = t_i^*$, $l_i = l_i^*$, $i = 0, 1$.

ЛЕММА 7. Справедливы такие утверждения:

1) если $(l_0, e) > 0$, то все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области

$$t_1 \geq \frac{(l_0, e)}{(l_1, e)} t_0, \quad t_0 > 0;$$

2) если $(l_0, e) = 0$, $(l_1, e) \geq 0$, $-1 \leq (l_1, l_0) < 1$, то все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области

$$t_1 \geq \sigma t_0^2, \quad t_0 > 0, \quad \sigma \in (0, \sigma_0),$$

где а) $\sigma_0 = a^{-1}(1 - |(l_1, l_0)|^2) / (l_1, e)$ при $|(l_1, l_0)| < 1$;

б) $\sigma_0 = [a(l_1, e)]^{-1}$ при $(l_1, l_0) = -1$,

3) если $(l_0, e) = 0$, $(l_1, e) \geq 0$, $(l_1, l_0) = 1$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $\sigma \in (0, \sigma_0)$,

$\sigma_0 \overline{\text{def}} \min \{1, \varepsilon(1 + a(l_1, e))^{-1}\}$, положительные решения (t_0, t_1) неравенства (2.9) из полосы $t_0 \in (0, \varepsilon]$ лежат в области $t_1 \geq \sigma t_0^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через \mathcal{D} обозначим множество положительных решений неравенства (2.9); эти решения, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\Psi(t_0, t_1) \leq 0, \quad t_0 > 0, \quad t_1 > 0,$$

где

$$\Psi(t_0, t_1) \equiv t_0^2 + t_1^2 - 2t_0 t_1 (l_1, l_0) - a t_1 (l_1, e) + a t_0 (l_0, e).$$

Пусть L - кривая, задаваемая уравнением $\Psi(t_0, t_1) = 0$. Легко видеть, что при $|(l_0, l_1)| < 1$ кривая L является эллипсом, а при $(l_0, l_1) = \pm 1$ - параболой. Далее, очевидно следующее:

1) кривая L проходит через начало координат,

2) при $(l_0, e) \geq 0$ полуось $t_0 > 0$ лежит во внешности области \mathcal{D} ,

3) при $(l_1, e) \geq 0$ полуось $t_1 > 0$ пересекает кривую L один раз.

Рассмотрим вопрос о том, пересекает ли кривую L лучи вида $t_1 = \sigma t_0$, $t_0 > 0$, $\sigma > 0$. Абсцисса t_0 точки пересечения должна удовлетворять уравнению $\Psi(t_0, \sigma t_0) = 0$, решением которого в области положительных чисел может быть разве лишь число

$$t_0 = a \frac{(\sigma l_1 - l_0, e)}{\|\sigma l_1 - l_0\|^2}.$$

Отсюда следует, что при $\sigma(l_1, e) < (l_0, e)$ луч $t_1 = \sigma t_0$ не пересекает кривую L ; в частности, при $(l_0, e) > 0$ все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области $t_1 \geq \frac{(l_0, e)}{(l_1, e)} t_0$,

$t_0 > 0$; этим доказан первый пункт леммы.

Продифференцируем тождество $\Psi(t_0, t_1) \equiv 0$ по t_0 ; получим

$$2t_0 + 2t_1 t_1' - 2(t_1 + t_0 t_1')(l_1, l_0) - a t_1'(l_1, e) + a(l_0, e) \equiv 0,$$

откуда при $t_0 = 0$ (с учетом того, что $t_1(0) = 0$) найдем $t_1'(0) = (l_0, e)/(l_1, e)$. Теперь видно, что при $(l_0, e) = 0$ кривая L_1 , проходящая через начало координат и не пересекающая область \mathcal{Q} , в окрестности точки $t_0 = 0$ должна иметь вид $t_1 = o(t_0)$. Будем искать эту кривую в виде $t_1 = \sigma t_0^2$, $t_0 > 0$, $\sigma > 0$. Уравнение положительной абсциссы t_0 точки пересечения кривых L и L_1 (если эта точка существует), очевидно, имеет вид

$$\sigma^2 t_0^3 + t_0 - 2\sigma t_0^2 (l_1, l_0) - a \sigma t_0 (l_1, e) = 0,$$

откуда после подстановки $z = \sigma t_0$, найдем

$$|z - (l_1, l_0)|^2 + (1 - |(l_1, l_0)|^2) - a(l_1, e) \sigma = 0.$$

При $|(l_1, l_0)| < 1$ для чисел σ , удовлетворяющих условию $a\sigma(l_1, e) < 1 - |(l_1, l_0)|^2$, последнее уравнение не имеет решения, и потому при $|(l_1, l_0)| < 1$ и $(l_1, e) \geq 0$ все положительные решения неравенства (2.9) лежат в области $t_1 \geq \sigma t_0^2$, где $0 < \sigma < (1 - |(l_1, l_0)|^2) |a(l_1, e)|^{-1}$; утверждение 2), а) доказано.

Если $(l_1, l_0) = -1$, $(l_1, e) \geq 0$, то легко найдем два решения рассматриваемого уравнения

$$(t_0)_{1,2} = \delta^{-1}(-1 \pm |a\delta(t_1, e)|^{1/2}),$$

откуда видно, что при $\delta \in (0, [a(t_1, e)]^{-1})$ положительные решения неравенства (2.9) лежат в области $t_1 \geq \delta t_0^2$, $t_0 > 0$; этим доказано утверждение 2), б). Наконец, при $(t_1, t_0) = 1$, $(t_1, e) \geq 0$ из упомянутого уравнения найдем $(t_0)_{1,2} = \delta^{-1}(1 \pm |a\delta(t_1, e)|^{1/2})$. Отсюда легко следует утверждение 3) нашей леммы. Лемма полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что выпуклое замкнутое множество M равноугоненно выпукло в точке u_0^* относительно вектора e , если при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$,

$$\gamma_\varepsilon(u_0^*, e) = \inf_{\substack{u \in \partial M \setminus U_\varepsilon(u_0^*) \\ v \in U_\varepsilon(u_0^*) \cap \partial M}} \frac{(u - u_0^*, e) \|v - u_0^*\|}{(v - u_0^*, e) \|u - u_0^*\|} \geq c > 0,$$

где $U_\varepsilon(u_0^*)$ - ε -окрестность точки u_0^* ; константа c от ε не зависит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Число

$$\gamma(u_0^*, e) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \gamma_\varepsilon(u_0^*, e)$$

назовем степенью выпуклости множества M в точке $u_0^* \in \partial M$ относительно вектора e . Очевидно $\gamma(u_0^*, e) \geq 0$.

Пусть $\mathcal{T}_e = \mathcal{T}_e(u_0^*)$ - множество единичных векторов, исходящих из u_0^* и ортогональных вектору e . Возьмем $n \in \mathcal{T}_e$ и проведем через n и e двумерную плоскость. Рассмотрим в ней декартову систему координат (x, y) , направив ось x вдоль вектора n , а ось y - вдоль e . Предположим, что сечение этой плоскостью поверхности ∂M имеет вид (для $x > 0$)

$$y = f_n(x),$$

где $f_n(0) = 0$, $f_n(x) > 0$, $x > 0$.

Очевидно, $u_0^* = (0, 0)$; положим $u = (x, f_n(x))$, тогда $(u - u_0^*, e) = f_n(x)$, $\|u - u_0^*\| = (x^2 + |f_n(x)|^2)^{1/2}$. В плоскости, проходящей через векторы e и $n \in \mathcal{T}_e$, аналогично предыдущему по-

ложим $v = (x', f_m(x'))$; тогда $(v - u_0^*, e) = f_m(x')$, $\|v - u_0^*\| = (x'^2 + |f_m(x')|^2)^{1/2}$. Будем считать, что $(x, f(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(u_0^*)$. $(x', f(x')) \in \mathcal{U}_\varepsilon(u_0^*)$. Тогда

$$\frac{(u - u_0^*, e) \|v - u_0^*\|}{(v - u_0^*, e) \|u - u_0^*\|} \geq \frac{f_n(x_{\varepsilon, n})}{f_m(x_{\varepsilon, m})},$$

где $x_{\varepsilon, n}$ и $x_{\varepsilon, m}$ определяются из уравнений

$$|f_n(x_{\varepsilon, n})|^2 + x_{\varepsilon, n}^2 = \varepsilon^2, \quad |f_m(x_{\varepsilon, m})|^2 + x_{\varepsilon, m}^2 = \varepsilon^2$$

соответственно.

Если $f_n(x) = o(x)$, то $x_{\varepsilon, n} = \varepsilon + o(\varepsilon)$, если же $f_n(x) = O(x)$, то $x_{\varepsilon, n} = c\varepsilon + O(\varepsilon)$, а при $f_n^{-1}(x) = O(x)$ получим $x_{\varepsilon, n} = f_n^{-1}(\varepsilon) + O(f_n^{-1}(\varepsilon))$.

Отсюда легко вытекает

ТЕОРЕМА 6. Если в сечении двумерной плоскостью \mathcal{P} , проходящей через векторы e и $n \in \mathcal{J}_e(u_0^*)$, уравнение кривой $\partial M \cap \mathcal{P}$ имеет вид $y = f_n(x)$, где $f_n(x) > 0$ при $x > 0$, $f_n(x) = o(1)$, и с независимыми от $m, n \in \mathcal{J}_e(u_0^*)$ положительными константами c_0 и c_1 выполнены соотношения

$$c_0 f_m(x) \leq f_n(x) \leq c_1 f_m(x), \quad x \in (0, \varepsilon_0),$$

то M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно e .

СЛЕДСТВИЕ I. Если $f_n \in C^{k+1}[0, \varepsilon_0]$, причем $f_n^{(i)}(+0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $k \geq 1$ и $c_0 f_m^{(k)}(+0) \leq f_n^{(k)}(+0) \leq c_1 f_m^{(k)}(+0)$ $|f_n^{(k+1)}(x)| \leq C$ с положительными константами c_0, c_1, C и ε_0 , не зависящими от $m, n \in \mathcal{J}_e(u_0^*)$ и $x \in [0, \varepsilon_0]$, то M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно внутренней нормали к поверхности ∂M в точке u_0^* .

ТЕОРЕМА 7. Если множество M равностепенно выпукло в точке u_0^* относительно $u_0^* - u_0$, то справедлива оценка

$$\|\tilde{u}_0^* - u_0^*\| \leq c \|\tilde{u}_1^* - u_0^*\|,$$

где

$$c = \max \{1, [\gamma(u_0^*, u_0^* - u_0)]^{-1}\},$$

а $\gamma(u_0^*, u_0^* - u_0)$ - степень выпуклости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем неотрицательные числа t_i^* и единичные векторы l_i^* так, чтобы $\tilde{u}_i^* - u_0^* = t_i^* l_i^*$, $i = 0, 1$. Очевидно, пара чисел (t_0^*, t_1^*) лежит в объединении множеств решений неравенств (2.9), в которых $a e = u_0^* - u_0$, $a > 0$, $\|e\| = 1$, а l_0 , l_1 всевозможные единичные векторы со свойством: существуют числа $t_i \geq 0$, $i = 0, 1$, такие, что

$$u_i \stackrel{\text{def}}{=} u_0^* + t_i l_i \in \partial M. \quad (2.10)$$

Множество пар (l_0, l_1) со свойством (2.10) обозначим через \mathcal{M} . Из множества \mathcal{M} исключим те пары (l_0, l_1) , для которых

$$\|u_1 - u_0^*\| \geq \|u_0 - u_0^*\|, \quad (2.11)$$

и обозначим множество оставшихся пар через \mathcal{L} . Очевидно, для каждой пары $(l_0, l_1) \in \mathcal{L}$ найдется $\varepsilon > 0$ так, что $t_1 = \|u_1 - u_0^*\| < \varepsilon < \|u_0 - u_0^*\| = t_0$, и значит, $u_1 \in \partial M \cap U_\varepsilon(u_0^*)$, $u_0 \in \partial M \setminus U_\varepsilon(u_0^*)$.

В виду предположения о равностепенной выпуклости имеем для любых $(l_0, l_1) \in \mathcal{L}$

$$\frac{(l_0, e)}{(l_1, e)} = \frac{(u_0 - u_0^*, e) \|u_1 - u_0^*\|}{(u_1 - u_0^*, e) \|u_0 - u_0^*\|} \geq \gamma(u_0^*, e) > 0,$$

так что по лемме 7 для тех пар чисел (t_0', t_1') , которые служат решением какого-либо из неравенств (2.9) при $(l_0, l_1) \in \mathcal{L}$ получим $t_1' \geq \gamma(u_0^*, e) t_0'$. Отсюда и из неравенства (2.11) найдем, в частности,

$$\|\tilde{u}_1^* - u_0^*\| \geq \min \{1, \gamma(u_0^*, e)\} \|\tilde{u}_0^* - u_0^*\|.$$

Теорема доказана.

Покажем, что равностепенная выпуклость существенна для справедливости заключения теоремы 7 даже в конечномерном случае.

Пусть $H = R^3$, $u_0 = (0, 0, a)$, $a > 0$, а M - двумерная выпуклая область, расположенная в полуплоскости

$$-\infty < x_1 < +\infty, \quad x_2 = 0, \quad -\infty < x_3 \leq 0,$$

причем M содержит полукруг

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_3^2 \leq b^2, \quad x_3 \leq 0, \quad x_2 = 0\}.$$

В дальнейшем a и b - фиксированные положительные числа, $a > b$.

Очевидно, $u_0^* = (0, 0, 0)$, и не существует вектора e , относительно которого множество M является равноугленно выпуклым в точке u_0^* .

Будем рассматривать такие плоскости \tilde{X} в R^3 , что пересечение $\tilde{M} = M \cap \tilde{X}$ не пусто, а ближайшая к u_0 точка \tilde{u}_0^* на \tilde{M} лежит на отрезке $|x_1| \leq b$, $x_2 = x_3 = 0$. Множество \tilde{M} представляет собой отрезок, имеющий лишь одну общую точку \tilde{u}_0^* с кругом $x_1^2 + (x_3 - a)^2 \leq \tilde{R}^2$, $x_2 = 0$, где $\tilde{R}^2 = \|u_0 - \tilde{u}_0^*\|^2$. Проведем к нему касательную в точке \tilde{u}_0^* и обозначим через α острый угол, образованный ею с осью x_1 . Очевидно, $\operatorname{tg} \alpha = \|u_0^* - \tilde{u}_0^*\|/a$. Пусть плоскость \tilde{X} построена так, что отрезок $\tilde{M} = M \cap \tilde{X}$ образует с осью x_1 угол 2α . Обозначая через \tilde{u}_1^* наилучшее приближение элемента u_0^* точками отрезка \tilde{M} , легко найдем $\|u_0^* - \tilde{u}_1^*\| = \|u_0^* - \tilde{u}_0^*\| \cdot \sin 2\alpha$, откуда вытекает оценка

$$\|u_0^* - \tilde{u}_1^*\| \leq \|u_0^* - \tilde{u}_0^*\|^2 a^{-1}. \quad (2.12)$$

Таким образом, в классе всех плоскостей \tilde{X} , для которых пересечение $\tilde{M} = M \cap \tilde{X}$ не пусто, заключение теоремы 7 не может быть верно. Можно сузить этот класс с сохранением последнего свойства, например, можно проводить эти плоскости через одну точку пространства.

Заметим, что легко построить телесное множество M со свойством

$$\|u_0^* - \tilde{u}_1^*\| \leq c \|u_0^* - \tilde{u}_0^*\|^2, \quad (2.13)$$

где константа c одна и та же для всех подпространств нашего семейства. Действительно, малый поворот рассмотренного ранее плоского множества вокруг оси x_1 лишь мало изменяет константу в неравенстве (2.12), так что зачерчиваемое этим множеством клинообразное тело обладает свойством (2.13).

Литература

1. Г л о в и н с к и Р., Л и о н с Ж.Л., Т р е м о л ь е р Р. Численное исследование вариационных неравенств. М., "Мир", 1979, 574 с.
2. Л о р а н П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., "Мир", 1975, 496 с.

3. М и х л и н С.Г. О приближенном решении односторонних вариационных задач. "Изв.вузов. Мат.", 1980, № 2, с.1-14.
4. Г л а з м а н И.М., Л ю б и ч Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М., "Наука", 1969, 475 с.