N. M. Ivochkina, The Dirichlet problem for the curvature equation of order m,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 3, 192–217

Н.М.Ивочкина

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРИВИЗНЫ ПОРЯДКА m

В статье доказана разрешимость в $C^{1+2+\alpha}(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле с произвольным граничным условием для уравнений кривизны порядка m.

0. Введение. В теории существенно нелинейных эллиптических уравнений второго порядка особое место занимает задача о восстановлении поверхности по ее кривизне порядка m и краю [1-3]. Уравнение кривизны порядка m является одним из немногих представителей существенно нелинейных уравнений, допускающих простую геометрическую интерпретацию. Поэтому следует ожидать, что исследование его даст новые направления развития всей нелинейной теории, подобно тому как уравнение средней кривизны явилось одним из стимулов развития теории квазилинейных эллиптических уравнений [4-5].

В статье Каффарелли, Ниренберга и Спрука [3] рассматривается задача Дирихле для уравнений с операторами G, определенными на множестве векторов $k=(k_1,\dots,k_n)$, где k_i, $i=1,\dots,n$, - главные кривизны графика функции $u(x)$, $x\in\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$. Типичным представителем таких операторов является μ_m - нормированная элементарная симметрическая функция $S_m/\binom{n}{m}$ главных кривизн. Доказательству разрешимости задачи Дирихле для уравнений с операторами μ_m посвящены публикации [2,7]. Однако как в работе [3], так и в заметках [2,3] рассмотрены лишь нулевое условие Дирихле и выпуклые области Ω. Результаты о разрешимости задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка m, полученные в названных статьях, очень близки. Настоящую заметку можно рассматривать как естественное продолжение работы [7], которая допускает переход к произвольному условию Дирихле и невыпуклым, вообще говоря, областям Ω. Надо сказать, что возможности техники исследования, развитой в статье [3], проблематичны в отношении ненулевого условия Дирихле.

Несколько слов о расположении материала в настоящей статье. В п.1 даются некоторые определения и постановка задачи. Описанию вариационной природы исследуемой задачи посвящен п.2. В п.3 приведены основные свойства операторов кривизны порядка m. Формулировка теоремы существования и план ее доказательства содержатся в п.4,5 соответственно. Необходимые априорные оценки построены в п.6-8.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в R^{n+1} поверхность Γ^n класса C^2 и найдем в

Ключевые слова: кривизна порядка m, задача Дирихле, вариационная задача.

точке $M\in\Gamma^n$ главные кривизны $k_1,\dots,k_n$. Кривизной порядка m поверхности Γ^n в точке M называется величина

$$H_m(M) = \binom{n}{m}^{-1}S_m(k) \equiv \binom{n}{m}^{-1} \sum_{\{1\le i_1<\dots<i_m\le n\}} k_{i_1}\dots k_{i_m},$$

определенная для $m=1,\dots,n$. Последнее равенство задает функцию кривизны порядка m-H_m. Однако, рассматривая его на множестве $\{\Gamma^n\in C^2\}$, можно говорить об операторе кривизны порядка m, полагая

$$\mu_m\,[\Gamma^n] = H_m. \tag{1.1}$$

Если Γ^n является графиком функции $u(x)$, $x\in\Omega\subset R^n$, т.е. $\Gamma^n=\{x\in\Omega;\ x^{n+1}=u(x)\}$, будем использовать также обозначение $\mu_m[u]\equiv\mu_m[\Gamma^n]$.

В настоящей статье обсуждается вопрос о существовании поверхности Γ^n с заданными краем $\partial\Gamma^n$ и положительной функцией H_m. Проблема такого рода входит в круг задач, рассмотренных в публикациях [1-3].

Операторы типа (1.1) естественным образом связаны со стационарными значениями λ^i, $i=1,\dots,n$, отношения квадратичных форм

$$\frac{u_{xx}dx,dx}{\sqrt{1+u_x^2}\,(a(p,x)dx,dx)}, \tag{1.2}$$

где $u_{xx}=(u_{ij})$, $u_i=du/dx^i$, $a(p,x)$ - положительно определенная матрица, $p\in R^n$. Обозначим $A=a^{-1}$. Хорошо известно, что λ^i, $i=1,\dots,n$, являются корнями характеристического уравнения

$$\det\Big(\frac{Au_{xx}}{\sqrt{1+u_x^2}} - \lambda E\Big) \equiv \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})\frac{\lambda^{n-m}}{(1+u_x^2)^{\frac{m}{2}}} = 0.$$

Выпишем коэффициенты $\mathcal{F}_m^A$ для матрицы $a=a^0=(\delta^i_j+p^ip^j)$ в явной форме

$$\mathcal{F}_m(p,u_{xx})\equiv \mathcal{F}_m^{A_0}(p,u_{xx})= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{\{i_1<\dots<i_m\}} \Big(u_{\binom{i_1\dots i_m}{[i_1\dots i_m]}} - \frac{p^ip^j}{1+p^2}\,u_{\binom{i_1\dots i_{m-1}i}{[i_1\dots i_{m-1}j]}}\Big). \tag{1.3}$$

Здесь $u_{\binom{i_1\dots i_m}{[j_1\dots j_m]}}$ минор порядка m матрицы u_{xx}, строки и столбцы которого занумерованы индексами $i_1,\dots,i_m$, $j_1,\dots,j_m$ соответственно.

Если $p=u_x$, коэффициенты $\mathcal{F}_m^A$ являются операторами, определенными, во всяком случае, на элементах $C^2(\Omega)$. Введем обозначения

$$\mathcal{F}_m^A[u] = \mathcal{F}_m^A(u_x,u_{xx})$$

и, в частности,

$$\mathcal{F}_m[u] = \mathcal{F}_m(u_x,u_{xx}). \tag{1.4}$$

Операторы $\mathcal{F}_m$ и μ_m связаны равенством

$$\mathcal{F}_m[u] = \mu_m[u]\ (1+u_x^2)^{\frac{m}{2}}. \tag{1.5}$$

Задача отыскания поверхности $\Gamma^n = \{x\in\Omega;\ x^{n+1}=u(x)\}$ с краем $\partial\Gamma^n$ и кривизной порядка m, равной $H_m(x,u)$, равносильна следующей задаче Дирихле для уравнения с оператором $\mathcal{F}_m$:

$$\mathcal{F}_m[u] = H_m(x,u)\ (1+u_x^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{1.6}$$

$$U\big|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{1.7}$$

При $m=1$ уравнение (1.6) представляет собой хорошо изученное уравнение средней кривизны, [4,5] и др. При $m=n$ мы имеем дело с гауссовой кривизной, т.е. с уравнением Монжа-Ампера с сильно растущей правой частью. Задача (1.6), (1.7) для таких уравнений исследована в статье автора [6] и в настоящей статье не рассматривается.

В случае выпуклых областей Ω и нулевого граничного условия задача (1.6), (1.7) вкладывается в круг задач, исследованных в публикациях [3,7]. Цель настоящей работы - расширить класс допустимых областей и рассмотреть произвольное условие Дирихле. В статьях [8.9] приводятся условия на границу $\partial\Omega$, необходимые для разрешимости уравнений, родственных (1.6):

$$F_m[u] \equiv \mathcal{F}_m(0,u_{xx}) = f(x). \tag{1.8}$$

При этом в публикации [8] допускается произвольное условие Дирихле.

Поводом, побудившим автора вплотную заняться исследованием допустимых для операторов $\mathcal{F}_m$ границ $\partial\Omega$, явилось интересное и содержательное обсуждение с Н. Кутевым проблем, связанных с существенно нелинейными эллиптическими уравнениями, в ноябре 1987 г. в Ленинграде.

2. Вариационная задача, порождающая операторы μ_m. Пусть $v(p)$, $p\in R^n$ - произвольная функция класса C^2. Хорошо известно, что вариационная производная функционала $Y_0^v(u)=\int\limits_\Omega v(u_x)dx$ является квазилинейным оператором, и в этом смысле функционалы I_0^v генерируют эти операторы. В заметке [10] показано, что такую же роль по отношению к операторам $\mu_m^v[u]$:

$$\mu^v[u] \equiv \frac{\mathcal{F}_m^A[u]}{(1+u_x^2)^{m/2}},\quad A = \sqrt{1+p^2}\ v_{pp},$$

играют функционалы

$$Y_m^v(u) = \int\limits_\Omega v(u_x)\mu_m^v[u]dx. \tag{2.1}$$

Именно справедлива

Т е о р е м а 2.1. *Для любой функции $v\in C^2$ имеется равенство*

$$\frac{\delta}{\delta u} Y^{\mathrm{v}}_{m}(u) = -(n-m)\mu^{\mathrm{v}}_{m+1}[u]. \tag{2.2}$$

Доказывается теорема 2.1 непосредственным вычислением. При этом удобно использовать тождество (8) из работы [11]:

$$\frac{d}{dx^{i}} \frac{\partial w^{\left(\substack{i_1\ldots i_m\\ [j_1\ldots j_m]}\right)}}{\partial w_{ij}} \equiv 0. \tag{2.3}$$

Действительно, запишем $\mu^{\mathrm{v}}_{m}[u]$ в явном виде

$$\mu^{\mathrm{v}}_{m}[u] = \frac{1}{\binom{n}{m}} v^{\left(\substack{i_1\ldots i_m\\ [j_1\ldots j_m]}\right)}(u_x)\, u_{\left(\substack{i_1\ldots i_m\\ [j_1\ldots j_m]}\right)}.$$

Здесь $v^{\left(\substack{i_1\ldots i_m\\ [j_1\ldots j_m]}\right)}$ - соответствующий минор матрицы v_{pp}, по повторяющемуся матричному индексу ведется суммирование, причем индексы в строках упорядочены: $1\le i_1<\ldots<i_m\le n$. Приводя подобные члены в формально вычисленной вариационной производной функционала (2.1), имеем

$$\frac{\delta}{\delta u} Y^{\mathrm{v}}_{m}(u) = \left(-\frac{d}{dx^{i}}\frac{\partial}{\partial u_{i}} + \frac{d^2}{dx^{i}dx^{j}}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right)(v(u_x)\,\mu^{\mathrm{v}}_{m}[u] =$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{m}} u_{\left(\substack{i_1\ldots i_{m+1}\\ [j_1\ldots j_{m+1}]}\right)} \frac{\partial^2}{\partial u_{i_k}\partial u_{j_l}} (v(u_x) \frac{\partial v^{\left(\substack{i_1\ldots i_{m+1}\\ [j_1\ldots j_{m+1}]}\right)}}{\partial v^{i_k j_l}}).$$

Еще раз обращаясь к тождеству (2.3) с $x=p$, $w=v(p)$, получаем равенство (2.2).

С л е д с т в и е 1. *Любое решение* $u\in C^2(\bar{\Omega})$ *уравнения* (1.6) *доставляет стационарное значение функционалу*

$$I_{m-1}(u) = \int_{\Omega} (\sqrt{1+u_x^2}\,\mu^{\mathrm{v}}_{m-1}[u] + (n-m+1)f(x,u))\,dx,$$

если $\partial f(x,u)/\partial u=H_m(x,u)$.

С л е д с т в и е 2. *Любое решение* $u\in C^2(\bar{\Omega})$ *уравнения* (1.8) *доставляет стационарное значение функционалу*

$$I^{\mathrm{D}}_{m-1}(u) = \int_{\Omega} (\tfrac{1}{2} + u_x^2\,\mu^{\mathrm{D}}_{m-1}[u] + (n-m+1)uf(x))\,dx,$$

где $\mu^{\mathrm{D}}_{m-1}[u]=F_{m-1}[u]$.

В следствии 2 индекс D использован как указание на связь рассматриваемого функционала с интегралом Дирихле.

Для доказательства следствий 1,2 достаточно в теореме 2.1 положить $v=\sqrt{1+p^2}$ или $v=p^2/2$ соответственно.

О второй вариации функционалов (2.1) можно сказать следующее:

Теорема 2.2. *Пусть функция* $u \in C^2(\bar\Omega)$ *такова, что*

$$\frac{\partial\mu_m^\nu[u]}{\partial u_{ij}}\,\xi^i\xi^j > 0, \qquad |\xi| \neq 0, \tag{2.4}$$

$t \in R^1$, $\eta(x)$ – *произвольная ненулевая финитная в* Ω *функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\left.\frac{d^2 I_{m-1}^\nu(u)}{dt^2}\right|_{t=0} > 0.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$EG[u] = \frac{\delta}{\delta u}\int_\Omega G[u]dx.$$

Пусть G – дифференциальный оператор, зависящий от производных различного порядка функции $u(x)$. Нетрудно видеть, что если G имеет дивергентную структуру

$$G[u] = \frac{d}{dx^i}\,A^i\,[u],$$

то EG является оператором аннулирования. Учитывая последнее обстоятельство, а также неравенство (2.4) и тождество (2.3), вычисляем

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\,Y_{m-1}^\nu(u)\right|_{t=0} = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\,E^2\mu_m^\nu[u]\eta^2 + (n-m+1)\,\frac{\partial\mu_m^\nu[u]}{\partial u_{ij}}\,\eta_i\eta_j\right) dx > 0.$$

Теорема доказана.

3. Область положительности оператора $\mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})$. Пусть $A(x,p)$ – положительно определенная матрица, λ,Λ – ее наименьшее и наибольшее собственные числа. Как показано в статье [12], для операторов

$$\mathcal{F}_m^A(p,u_{xx}) = \frac{1}{\binom{n}{m}}\,A^{\binom{i_1\ldots i_m}{[j_1\ldots j_m]}}(x,p)\,u_{\binom{i_1\ldots i_m}{[j_1\ldots j_m]}}$$

особую роль играют функциональные конусы

$$K_m^A(p) = \{u \in C^2(\bar\Omega); \qquad \mathcal{F}_i^A(p,u_{xx}) > 0,\ i=1,\ldots m,\ x \in \Omega\}.$$

Конусы, связанные с операторами (1.3), будем обозначать символом $K_m(p)$, полагая $K_m \equiv K_m(u_x)$. В публикации [12] конус $K_m^A(p)$ представлен как связная компонента множества положительности оператора $\mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})$, причем конус $K_m(0)$ выпуклый. Для любого элемента $u \in K_m^A(p)$ выполнены неравенства

$$(\mathcal{F}_i^A(p,u_{xx}))^{\frac{1}{i}} \geq (\mathcal{F}_{i+1}^A(p,u_{xx}))^{\frac{1}{i+1}}, \qquad i=1,\ldots,m-1, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})}{\partial u_{ij}}\xi^i\xi^j \ge \frac{\mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})}{\Lambda|u_{xx}|}\xi^2, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})^{1/m}}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}}\xi^{ij}\xi^{kl} \le 0. \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) говорит о локальной выпуклости оператора $(\mathcal{F}_m^A)^{\frac{1}{m}}$ в конусе $K_m^A(p)$. Если $K_m^A(p)$ - выпуклый конус, возможен нелокальный вариант соотношения (3.3). Например, для любых u, $v\in K_m(0)$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial F_m[u]}{\partial u_{ij}} v_{ij} \ge F_m^{\frac{m-1}{m}}[u]\, F_m^{\frac{1}{m}}[v]. \tag{3.4}$$

Перечисленных свойств оказалось достаточно для исследования задач с операторами $F_m[u]$ [13]. Более тонкие свойства конусов K_m^A позволили рассмотреть уравнения кривизны порядка m в выпуклых областях Ω. Список их следует пополнить еще одним при переходе к невыпуклым, вообще говоря, областям.

Л е м м а 3.1. *Справедливо вложение* $K_m(0)\subset K_{m-1}(p)$. *При этом для любых* $u\in K_m(0)$, $i=1,\dots,m-1$ *выполнены неравенства*

$$\mathcal{F}_i(p,u_{xx}) \ge \frac{1}{1+p^2} F_i[u]. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем точки $x\in\Omega$, $p\in R^n$. Не ограничивая общности, можно считать $p=(p^1,0,\dots,0)$ (этого всегда можно добиться ортогональным преобразованием). Пусть $u\in K_m(0)$. Тогда из неравенств (3.1), (3.2) следует, что при любом $i<m$ выполнено соотношение

$$\sum_{1\notin\{k_1\dots k_i\}} u\binom{k_1\dots k_i}{[k_1\dots k_i]} > 0.$$

Вспоминая определение (1.3) операторов $\mathcal{F}_m(p,u_{xx})$, вычисляем

$$\mathcal{F}_i(p,u_{xx}) = \frac{1}{\binom{n}{i}}\left(\frac{1}{1+p^2}\sum_{\{2\le k_2<\dots\le k_i\}} u\binom{1k_2\dots k_i}{[1k_1\dots k_i]} + \sum_{1\notin\{k_1\dots k_i\}} u\binom{k_1\dots k_i}{[k_1\dots k_i]}\right) \ge \frac{1}{1+p^2} F_i[u].$$

Неравенство (3.2) означает, что на элементах $K_m^A(p)$ оператор $\mathcal{F}_m^A(p,u_{xx})$ эллиптичен. Это обстоятельство позволяет использовать различные теоремы сравнения. Например,

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* v, $w\in C^2(\Omega)$, $u\in K_m^A$. *Предположим, что*

$$\frac{\partial \mathcal{F}_m^A[u]}{\partial u_{ij}} W_{ij} \le f(x,w_x), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_m^A[u]}{\partial u_{ij}} v_{ij} \ge f(x, v_x) \qquad (3.7)$$

и $f(x,p)$ – непрерывная функция своих аргументов. Тогда из неравенства $(v-u)|_{\partial\Omega} \le 0$ следует, что $v(x) \le u(x)$ во всей области Ω.

Теорема 3.2. *Предположим, что*

а) $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *и в тех точках $x \in \Omega$, для которых $\mathcal{F}_i^A[u](x) > 0$ при $i=1,\dots,m$, выполнено неравенство*

$$\mathcal{F}_m^A[u] \le f(x, u, u_x); \qquad (3.8)$$

б) $v \in K_m^A$ *и*

$$\mathcal{F}_m^A[v] \ge f(x, v, v_x); \qquad (3.9)$$

в) $f(x,u,p)$ *– непрерывная функция, неубывающая по u и липшицева по p.*

Тогда из неравенства $(v-u)|_{\partial\Omega} \le 0$ следует, что $v(x) \le u(x)$ в Ω.

Теорема 3.1 является простым следствием эллиптичности оператора $\mathcal{F}_m^A$ на выбранной функции $u(x)$, а теорема 3.2 есть композиция принципа максимума, сформулированного в статье [8], и теоремы 3.1 из статьи [7].

Покажем еще, что решения задач

$$\mathcal{F}_m^A[u^i] = f^i(x, u^i, u_x^i), \quad u^i|_{\partial\Omega} = \Phi^i(x), \quad i=1,2, \qquad (3.10)$$

близки в конусе K_m, если близки функции Φ^i, $f^i(x,u,p)$, $i=1,2$. Именно справедлива

Теорема 3.3. *Пусть $u^1, u^2 \in K_m^A$ – решения задач (3.10). Предположим, что $f^i \in C^1(\bar{\mathfrak{B}}_1)$, $\mathfrak{B}_1 = \{x \in \Omega;\ |u| + |p| < \|u^1, u^2\|_{C^1(\Omega)}\}$ и $f^i(x,u,p) > 0$, $\partial f^i(x,u,p)/\partial u \ge 0$ в $\mathfrak{B}_1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{\Omega} |u^1 - u^2| \le c_1(\lambda, \Lambda, \|A^{ij}\|_{C^m(\mathfrak{B}_1)}, \|u_1 u_2\|_{C^2(\Omega)}) \times$$

$$\times (\max |f^1(x) - f^2(x)| + \max_{\partial\Omega} |\Phi^1(x) - \Phi^2(x)|). \qquad (3.11)$$

Если K_m^A – выпуклый конус, утверждение теоремы 3.3 является простым следствием принципа максимума для эллиптических уравнений (см., например, [14], с. 147). В случае невыпуклых конусов теорему 3.3 можно получить с помощью приема, использованного для доказательства теоремы 3.1 из работы [7].

4. Условия разрешимости задачи Дирихле для уравнения кривизны порядка m в $C^{1+2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Перечислим характеристики задачи (1.6), (1.7), необходимые для формулировки и доказательства основных результатов:

R – радиус шара B_R, содержащего область Ω,

$$\Phi_0 = \inf_{\partial\Omega} \Phi(x), \quad \Phi_1 = \sup_{\partial\Omega} \Phi(x),$$

$$\mathfrak{B}_0 = \{x \in \Omega;\ \Phi_0 - R < u < \Phi_1\},$$

$$\nu^{m} = \inf_{\mathfrak{B}_0} H_m(x,u), \quad \mu^{m} = \sup_{\mathfrak{B}_0} H_m(x,u).$$

В качестве характеристик границы области Ω рассмотрим ее кривизны порядка $i: \mu_i[\partial\Omega] = h_i(x)$, $x \in \partial\Omega$, $i = 1,\dots,m$. Символ $\partial\Omega \in K_m$ надо понимать в том смысле, что $h_i(x) > 0$ при $i = 1,\dots,m$. Обозначим $h_i^0 = \inf_{\partial\Omega} h_i(x)$.

Теорема 4.1. *Пусть $1 \le m < n$, $l \ge 2$ – целое число, $0 < \alpha < 1$. Предположим, что*

а) $\partial\Omega \in K_m$ *– замкнутая поверхность класса* $C^{l+2+\alpha}$;

б) $\Phi \in C^{l+2+\alpha}(\partial\Omega)$;

в) $H_m \in C^{l+\alpha}(\mathfrak{B}_0)$, $\nu > 0$, $\mu \le 1/R$, *и для элементов* $\mathfrak{B}_0$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial H_m(x,u)}{\partial u} \ge 0; \tag{4.1}$$

г) *на границе области* Ω *функции* $H_m(x,u)$ *и* $h_m(x)$ *связаны соотношением*

$$H_m(x,u) < \frac{n-m}{n} h_m(x). \tag{4.2}$$

Тогда существует единственное решение $u \in K_m \cap C^{l+2+\alpha}(\Omega)$ *задачи* (1.6), (1.7).

Теорема 4.1 продолжает известный результат Серрина [4] о разрешимости задачи Дирихле для уравнения средней кривизны на уравнения кривизны порядка $m<n$. Особенность ее в том, что граничная функция $\Phi(x)$, будучи достаточно гладкой, не влияет на сам факт разрешимости задачи (1.6), (1.7). Однако при этом сужается класс рассматриваемых задач: мы ничего не можем сказать в рамках теоремы 4.1 о поверхностях постоянной гауссовой кривизны, например. В статье [7] имеется аналог теоремы 4.1, включающий уравнение гауссовой кривизны, но при этом функция $\Phi(x)$ полагается равной нулю, а поверхность $\partial\Omega$ – строго выпуклой. Именно

Теорема 4.2. *Предположим, что*

а) $\partial\Omega$ *– строго выпуклая замкнутая поверхность класса* $C^{l+2+\alpha}$ *и* χ_0 *– минимальная из ее главных кривизн*;

б) $H_m \in C^{l+\alpha}(\{x \in \bar{\Omega};\ |u| \le 1/\chi_0\})$, $\partial H_m(x,u)/\partial U \ge 0$ *и* $0 < H_m(x,u) < \chi_0$.

Тогда существует хотя бы одна поверхность $\Gamma^n = \{x \in \Omega;\ x^{n+1} = u(x)\}$ *класса* $C^{l+2+\alpha}(\bar{\Omega})$ *с краем* $\partial\Omega$, *кривизна порядка* m *которой равна* $H_m(x,u)$.

Вместе с уравнением (1.6) мы будем рассматривать вспомогательное уравнение

$$\mathcal{F}_m[u] = H_m(x), \quad m > 1. \tag{4.3}$$

Справедлива

Теорема 4.3. *Предположим, что для* $\partial\Omega$, $\Phi(x)$ *выполнены условия теоремы* 4.1, $H_m \in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, $H_m(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$. *Тогда существует единственное решение* $u \in K_m \cap C^{l+2+\alpha}(\bar{\Omega})$ *задачи* (4.3), (1.7).

В статье [8] изучается класс задач, характерным представителем которых является задача (1.8), (1.7). Сформулируем для сравнения аналог теоремы 4.1 для задачи (1.8), (1.7).

Теорема 4.4. *Предположим, что* $\partial\Omega \in K_{m-1}$ *– замкнутая поверхность класса*

$C^{1+2+\alpha}$, $\Phi\in C^{1+2+\alpha}(\partial\Omega)$, $f\in C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$, $f(x)>0$ *в* $\bar\Omega$. *Тогда существует единственное решение* $u\in K_m(0)\cap C^{1+2+\alpha}(\bar\Omega)$ *задачи* (1.8), (1.7).

Теорема 4.4 является частным случаем теоремы 2 из статьи [8].

Единственность решения задач (1.6), (1.7), (4.1) и (4.3), (1.7) в конусе K_m следует из теоремы 3.3.

5. План доказательства теоремы 4.1. Для доказательства разрешимости конкретных задач, как правило, используются теоремы о разрешимости абстрактных операторных уравнений. При этом часто оказывается, что специфика рассматриваемой задачи вносит лишь те или иные уточнения в формулировки хорошо известных общих теорем, но не влияет на методы их доказательства. Так, например, для задачи (4.3), (1.7) достаточно переформулировать надлежащим образом теоремы из книги [15], с. 166–167. В самом деле, пусть H_0, H_1 – банаховы пространства, $\mathfrak{M}_0\subset H_0$, $\mathfrak{M}\subset H_1$ – открытые множества и $F:\mathfrak{M}_0\longrightarrow\mathfrak{M}_1$. Справедлива

Т е о р е м а 5.1. *Предположим, что*

а) *оператор* F *непрерывно дифференцируем на каждом ограниченном подмножестве из* $\mathfrak{M}_0$ *и его дифференциал Фреше*

$$D[F]:H_0\longrightarrow H_1$$

является обратимым на любом элементе $u\in\mathfrak{M}_0$;

б) $\mathfrak{M}_1$ – *выпуклое множество*;

в) *любое подмножество* $\mathfrak{M}_0$, *образ которого компактен в* $\mathfrak{M}_1$, *компактно в* $\mathfrak{M}_0$.

Тогда уравнение $F[u]=f$ *разрешимо в* $\mathfrak{M}_0$, *каков бы ни был элемент* $f\in\mathfrak{M}_1$.

Имея в виду задачу (4.3), (1.7), положим $H_0=C^{1+2+\alpha}(\bar\Omega)$, $H_1=C^{1+\alpha}(\bar\Omega)\times C^{1+2+\alpha}(\partial\Omega)$, $\mathfrak{M}_0=K_m\cap H_0$, $\mathfrak{M}_1=\{H_m(x)>0\}\cap H_1$, $F[u]=(1+u_x^2)\mathcal{F}_m[u]$. Неравенство (3.2) и то, что $F:\partial\mathfrak{M}_0\longrightarrow\partial\mathfrak{M}_1$, приводят к условию а), требование б) выполнено очевидным образом, для удовлетворения условию в) достаточно априорной оценки решения u в $C^{1+2+\alpha'}(\bar\Omega)$ и апостериорной в $C^{1+2+\alpha}(\bar\Omega)$ с каким-либо $0<\alpha'<\alpha$.

Для доказательства теоремы 4.1 удобно использовать принцип Лерэ-Шаудера в следующей формулировке:

Т е о р е м а 5.2. *Пусть* $H_1=H_1'\times H_1''$, $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_1\times H_1''$, H_1', H_1'' – *банаховы пространства и* $G:H_2\longrightarrow H_1'$. *Предположим, что*

а) *для оператора* F *выполнены условия теоремы* 5.1 *и*

$$\|u^1-u^2\|_{H_0}\le c_1(\|F[u^1]-F[u^2]\|_{H_1}),\ u^1,\ u^2\in\mathfrak{M}_0,$$

$$\|G[v^1]-G[v^2]\|_{H_1'}\le c_2(\|v^1-v^2\|_{H_2}),$$

где $c_1(t)\downarrow 0$, $c_2(t)\downarrow 0$ *при* $t\downarrow 0$;

б) H_0 *компактно вкладывается в* H_2;

в) *в зависимости от* $\Phi\in H_1''$ *найдется число* $\mathfrak{K}\gg 1$ *такое, что неподвижные точки уравнения*

$$F[u]=(G[v],\ \Phi),\tag{5.1}$$

если они имеются, содержатся в шаре $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}\subset H_0$.

Тогда уравнение (5.1) *имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Условия теоремы 5.2 сформулированы таким образом, что для уравнения $F[u^\tau]=(G[\tau v],\Phi)$, $\tau\in[0;1]$, выполнены все условия принципа Лерэ-Шаудера в формулировке Ладыженской-Уральцевой [14], с. 370.

Теорема 5.2 охватывает задачу (1.6), (1.7), (4.1), если $H_2=C^{1+1+\alpha}(\bar\Omega)$, $G[v]=H_m(x,v)(1+v_x^2)^{\frac{m+2}{2}}$, при условии априорной ограниченности ее решений в $C^{1+2+\alpha}(\bar\Omega)$.

Характер нелинейности в задачах с квазилинейными эллиптическими операторами второго порядка, как правило, несуществен, если имеется априорная оценка решения в $C^1(\bar\Omega)$, (см. [14]). Казалось бы, что в существенно нелинейном случае такую роль должна сыграть априорная оценка в $C^2(\bar\Omega)$. Однако при $n>2$ лишь в начале 80-х годов были найдены новые аналитические средства [5, 16-18], позволяющие продолжить оценку в $C^2(\bar\Omega)$ до оценки в $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$ для решений нелинейных уравнений с выпуклыми операторами и, тем самым, подключить к исследованию мощный аппарат линейной теории. В названных публикациях рассматривается задача

$$F[u] \equiv \mathcal{F}(x,u,u_x,u_{xx}) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{5.2}$$

Наименее ограничительные условия на функцию $\mathcal{F}(x,u,p,T)$, $T=(t^{ij})$, $t^{ij}=t^{ji}$, были даны в книге [5]. Сводятся они к тому, что рассмотрению подлежат только такие решения u, v задачи (5.2), для которых выполнены неравенства

$$\frac{\partial F[w]}{\partial w_{ij}}\xi^i\xi^j>0, \quad |\xi|\neq 0, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{F}(x,u,p,t,u_{xx}) + (1-t)v_{xx} \geq$$

$$\geq t\mathcal{F}(x,u,p,u_{xx}) + (1-t)\mathcal{F}(x,u,p,v_{xx}) \tag{5.4}$$

с любым $w=tn+(1-t)v$, $t\in[0;1]$.

Одна из особенностей уравнений (1.6) состоит в том, что решения их следует искать в конусе K_m, который не является выпуклым ни по u, ни по u_{xx}, и неравенств (5.3), (5.4), вообще говоря, нет. Однако анализ доказательств из публикаций [5, 17, 18], проведенный в заметке [7], показывает, что на самом деле верна

Т е о р е м а 5.3. *Пусть* $u\in C^4(\bar\Omega)$ *– такое решение задачи* (5.2), *для которого в* $\bar\Omega$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\partial F[u]}{\partial u_{ij}}\xi^i\xi^j>0, \quad |\xi|\neq 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial^2 F[u]}{\partial u_{ij}\partial u_{kl}}\xi^{ij}\xi^{kl}\leq 0. \tag{5.6}$$

Тогда в зависимости от n, $\|\partial\Omega\|_{C^4}$, $\|\Phi\|_{C^4(\partial\Omega)}$, $\|u\|_{C^2(\Omega)}$, $\|\mathcal{F}\|_{C^2(\mathfrak{B}_2)}$, $\mathfrak{B}_2=\{x\in\Omega;\ |u|+|p|+\sum_{ij}|t^{ij}|<\|u\|_{C^2(\Omega)}\}$, *найдутся числа* $\beta\in(0;1)$, $c_3>0$ *такие, что*

$\|u\|_{C^{2+\beta}(\Omega)} \le c_3.$

Из теоремы 5.3 и известных фактов теории линейных эллиптических уравнений немедленно следует

Теорема 5.4. *Если для решения* $u \in C^{l+2+\alpha'}(\bar\Omega)$, $l \ge 2$, $0<\alpha'<\alpha$, *выполнены неравенства* (5.5), (5.6), то

$$\|u\|_{C^{l+2+\alpha}(\Omega)} \le c_4(n, \|\partial\Omega\|_{C^{l+2+\alpha}}, \|\Phi\|_{C^{l+2+\alpha}(\partial\Omega)}, \|u\|_{C^2(\Omega)}, \|\mathcal{F}\|_{C^{l+\alpha}(\mathfrak{B}_2)}.$$

Поскольку на решениях $u \in K_m$ задач (1.6), (1.7), (4.3), (1.7) имеются неравенства (3.2), (3.3), то для таких решений справедливо утверждение теоремы 5.4 и как следствие теорем 5.1, 5.2 получаем следующие условные предложения.

Теорема 5.5. *Если все возможные решения* $u \in K_m$ *задачи* (4.3), (1.7) *априори ограничены в норме* $C^2(\bar\Omega)$ *каким-либо числом* M_2 *и* $H_m \in C^{l+\alpha}(\bar\Omega)$, $H_m(x)>0$ *в* Ω, $\partial \in C^{l+2+\alpha}$, $\Phi \in C^{l+2+\alpha}(\partial\Omega)$, *то задача* (4.3), (1.7) *разрешима в* $C^{l+2+\alpha}(\bar\Omega)$.

Теорема 5.6. *Пусть для любого решения* $u \in K_m$ *задачи* (1.6), (1.7) *и для* $\partial\Omega$, $\Phi(x)$ *выполнены условия теоремы* 5.5. *Предположим еще, что* $H_m \in C^{l+\alpha}(\bar{\mathfrak{B}})$, $H_m(x,u)>0$, $\partial H_m/\partial u \ge 0$ *в* $\bar{\mathfrak{B}}=\{x\in\bar\Omega;\ |u|\le M_2\}$. *Тогда задача* (1.6), (1.7) *разрешима в* $C^{l+2+\alpha}(\bar\Omega)$.

Итак, для доказательства теорем 4.1, 4.3 достаточно построить априорную оценку решений соответствующих задач в $C^2(\bar\Omega)$. Вывод ее естественным образом распадается на последовательные этапы. Необходимые внутренние оценки решений имеются в статье [7]. Для доказательства априорной ограниченности $\|u\|_{C^1(\Omega)}$ мы воспользуемся модификацией традиционного метода теории квазилинейных эллиптических уравнений [4,5,8]. Центральное место в нижеследующей части статьи занимает оценка второй производной решений по нормали на границе $\partial\Omega$. Вывести ее удалось с помощью модификации методов, предложенных авторами статьи [8] для исследования решений задачи типа (1.8), (1.7).

6. Априорная оценка $\|u\|_{C^1(\Omega)}$. Оценку для решения $u(x)$ рассматриваемых задач в $C^1(\bar\Omega)$ получим, убеждаясь последовательно в априорной ограниченности $|u|$ в Ω, $|u_n|$ на $\partial\Omega$ (n направлен по нормали к $\partial\Omega$), $|u_x|$ во внутренних точках области Ω.

Что касается вспомогательной задачи (4.3), (1.7), то оценка модуля ее решения следует из леммы 3.1 статьи [7] и принципа максимума для эллиптических уравнений. Именно

Лемма 6.1. *Для любого решения* $u \in K_m$ *задачи* (4.3), (1.7) *выполнено неравенство*

$$\Phi_0 - 2\exp(n(2R)^m \max_{\Omega} H_m(x)) \le u \le \Phi_1.$$

Априорная ограниченность решения задачи (1.6), (1.7) снизу следует из простых геометрических соображений. В самом деле, положим

$$v(x) = \Phi_0 + \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{1-(R\mu)^2} - \sqrt{1-(r\mu)^2}\right), \quad r=|x|.$$

Функция v определена в шаре B_R, $R\le\frac{1}{\mu}$. Будем считать, что центр этого шара совпадает с началом координат и $\Omega\subset B_R$. Из геометрического смысла оператора $\mathcal{F}_m$ следует, что

$$\mathcal{F}_m[v] = \mu^m(1+v_x^2)^{m/2},$$

и по построению $v|_{\partial\Omega}\le \Phi_0\le u|_{\partial\Omega}$. Помня о том, что $\mathcal{F}_m[u] \le \mu^m(1+u_x^2)^{m/2}$, видим: для пары u, v выполнены все условия теоремы 3.2, и поэтому $v\le u$ в Ω.

С другой стороны, если $u\in K_m$, то уравнение (1.6) эллиптическое, и из принципа максимума следует $u\le\Phi_1$ в Ω. Доказана

Л е м м а 6.2. *Каково бы ни было решение* $u\in K_m$ *задачи* (1.6), (1.7) *с* $\mu\le 1/R$, *справедливо неравенство*

$$\Phi_0+ \frac{1}{\mu} (\sqrt{1-(R\mu)^2} - \sqrt{1-(R\mu)^2} \le u(x) \le \Phi_1, \quad r=|x|, \quad x\in\Omega.$$

Для построения оценок на границе свяжем с каждой точкой $x_0\in\partial\Omega$ область $\tilde\Omega$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_0=0$, векторы $(0,\dots,x^t,\dots,0)$, $t=1,\dots,n-1$, расположены в касательной к $\partial\Omega$ плоскости в нуле, вектор $(0,\dots,1)$ направлен по внутренней к $\partial\Omega$ нормали, уравнение $\partial\Omega$ в окрестности нуля имеет вид: $x_n=\omega(\tilde x)$, $\omega(0)=0$, $\tilde x=(x^1,\dots,x^{n-1})$. Положим

$$\tilde\Omega = \{ |\tilde x|<d;\ \omega(\tilde x)<x^n<\omega(\tilde x) + \frac{\chi}{2} (d^2-\tilde x^2)\}, \tag{6.1}$$

где d, $\chi>0$ - свободные параметры. Обозначим

$$\tilde\omega = \omega(\tilde x) - \frac{\chi}{2}\tilde x^2, \quad \varphi(\tilde x) = \Phi(\tilde x,\omega(\tilde x)).$$

Барьер для оценки $u_n(0)$ снизу выберем в виде

$$v(x) = \omega(\tilde x) + C(r-\chi d^2/2), \quad r = \frac{\chi}{2} d^2-y, \quad y = x^n-\tilde\omega(\tilde x). \tag{6.2}$$

Часто барьеры v строятся на основе функции $d(x)=\mathrm{dist}\{x;\partial\Omega\}$ [4,5,8] и др. Функция $y(x)$ эквивалентна $d(x)$ в малой окрестности 0. Вид ее позволяет говорить о том, что по существу мы вводим новую систему координат в окрестности нуля, при этом рассматриваемая часть поверхности $\partial\Omega$ в новых координатах оказывается строго выпуклой: $y|_{\partial\Omega}=\chi\tilde x^2/2$.

Функция $y(x)$ задает поверхность $\partial\Omega(\chi,d)= \{|\tilde x|<d;\ x^n=\tilde\omega\}$. Обозначим

$$h_i(\tilde x,\chi,d) = \mu_i[\partial\Omega(\chi,d)], \quad i=1,\dots,m.$$

Функции $h_i(\tilde x,\chi,d)$ можно считать заданными в цилиндре $|\tilde x|<d$.

Вычислим значение оператора $\mathcal{F}_m$ на функции (6.2). Обращаясь к определению (1.4), выводим

$$\mathcal{F}_m[v] = \frac{n-m}{n} (\mathcal{F}_{m,n}[\tilde\omega] + o(\frac{1+\|\varphi_x\|_{C^1}}{C}))C^m. \tag{6.3}$$

Здесь и далее символом $\mathcal{F}_{m,n}$ обозначено значение оператора $\mathcal{F}_m$ на функциях с фиксированным аргументом x^n. Следствием равенства (1.5) является соотношение

$$\mathcal{F}_{m,n}[\tilde\omega] \equiv (1+\tilde\omega_x^2)^{\frac{m}{2}}\, \mu_m[\partial\Omega(\chi,d)]. \tag{6.4}$$

Кроме того,

$$C^2(1+\tilde{\omega}_x^2) = (1+o\ (\frac{1+|\varphi_x|}{C}))\ (1+v_x^2). \tag{6.5}$$

Композиция соотношений (6.3)-(6.5) приводит к равенству

$$\mathcal{F}_m[v] = \frac{n-m}{n}\ (1+o\ (\frac{1+|\varphi_x|}{C})\ (h_m(\tilde{x},\chi,d) +$$

$$+ o(\frac{1+\|\varphi_x\|_{C^1}}{C}))\ (1+v_x^2)^{\frac{m}{2}}. \tag{6.6}$$

Оценку снизу для нормальной производной решения задачи (1.6), (1.7) дает

Лемма 6.3. *Пусть* $x_0\in\partial\Omega$, $d>0$. *Предположим, что для функции* $u\in \bar{C}^2(\Omega\cap B_d(x_0))$ *выполнены неравенства*

$$\mathcal{F}_m[v] \le H_m(x,\Phi_1)\ (1+u_x^2)^{m/2}, \quad u|_{\partial\Omega\cap B_d(x_0)} \ge \Phi(x)$$

с какой-либо непрерывной функцией $H_m(x,\Phi_1)$. *Предположим еще, что* $\partial\Omega\cap B_d(x_0)\in K_m$ *и на* $\partial\Omega\cap B_d$ *имеется неравенство* (4.2). *Тогда в зависимости от* h_m^0, $\|\partial\Omega\|_{C^2(B_d)}$, $\|\Phi\|_{C^2(\partial\Omega\cap B_d)}$, *от разности* $\frac{n-m}{n}\ h_m - H_m$ *и от модуля непрерывности* $H_m(x,\Phi_1)$ *по* x^n *найдется число* $x>0$ *такое, что*

$$u_n(x_0) \ge -\ 2\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_d} u/(\chi d^2). \tag{6.7}$$

Доказательство. Положим в равенстве (6.2) $C = 2\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_d} u/(\chi d^2)$.

Тогда $(v-u)|_{\partial\Omega}\le 0$, $v(0)=u(0)$. Неравенство (4.2) предполагает существование такого $\varepsilon>0$, что

$$H_m(\tilde{x},\omega(\tilde{x}),\Phi_1) \le (1-\varepsilon)\ \frac{n-m}{n}\ (h_m(\tilde{x})\ -\ 2\varepsilon).$$

Считая ε не слишком большим и имея в виду соотношение (6.6), непрерывность функции H_m по x^n и свойства границы $\partial\Omega$, выберем $\chi(\varepsilon,h_m^0)$ столь малым, что в области $\tilde{\Omega}$ выполнены неравенства

$$\mathcal{F}_m[u] \le (1-\varepsilon)\ \frac{n-m}{n}\ (h_m(\tilde{x})\ -\ \varepsilon)\ (1+u_x^2)^{m/2},$$

$$\mathcal{F}_m[v] \ge (1-\varepsilon)\ \frac{n-m}{n}\ (h_m(\tilde{x})\ -\ \varepsilon)\ (1+v_x^2)^{m/2}.$$

При таком выборе C, χ функции u, v удовлетворяют всем условиям теоремы 3.2 в $\tilde{\Omega}$. Поэтому $v\le u$ в $\tilde{\Omega}$ и, в частности, $v_n(0)\le u_n(0)$. Последнее равносильно неравенству (6.7).

В формулировке леммы 6.3 намеренно подчеркнута локальная природа оценки (6.7): оценка имеется независимо от поведения функции $u(x)$ вне шара B_d, где d – сколь угодно малое фиксированное число. Возможно, решениям уравнения гауссовой кривизны такая локальность несвойственна, и поэтому случай $m=n$ выпадает как из леммы 6.3, так и из теоремы 4.1. В статьях [6, 13] для решений уравнения гауссовой кривизны построены нелокальные оценки градиента на границе.

Барьер (6.2) пригоден и для оценки нормальной производной решения задачи

(4.3), (1.7). Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что для малых $\chi>0$ в области $\tilde{\Omega}$ выполнено неравенство

$$\mathcal{F}_m[v] = o(\tfrac{1}{\chi}) > H_m(x).$$

Поэтому справедлива

Лемма 6.4. *Каковы бы ни были непрерывная функция $H_m(x)$ и граница $\partial\Omega\in K_m$, для любого решения $u\in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (4.3), (1.7) имеется неравенство*

$$u_n(x_0) > -c_5(h_m^0, \|\partial\Omega\cap B_d\|_{C^2}, \|\Phi\|_{C^2(\partial\Omega\cap B_d)}, \|H_m\|_{C^1}), \quad x_0\in\partial\Omega. \tag{6.8}$$

В леммах 6.3, 6.4 речь идет о решениях $u(x)$ из $C^2(\bar{\Omega})$. Если дополнительно предположить, что $u\in K_m$, односторонние оценки (6.7), (6.8) легко продолжить до оценки $\max\limits_{\partial\Omega}|u_x|$.

Лемма 6.5. *В условиях теорем 4.1, 4.3 для решений $u\in K_m$ уравнений (1.6) или (4.3) соответственно, равных $\Phi(x)$ на $\partial\Omega$, справедлива оценка*

$$\max_{\partial\Omega}|u_x| \le c_6(R, h_m^0, \|\partial\Omega\|_{C^{2+\delta}}, \|\Phi\|_{C^{2+\delta}(\partial\Omega)}, \varepsilon, \|H_m\|_{C^1}). \tag{6.9}$$

Доказательство. Поскольку $|u_x|_{\partial\Omega}\le|u_n|+\|\Phi\|_{C^1}$, для доказательства леммы 6.5 достаточно построить оценку сверху для нормальной производной решений обсуждаемых задач.

Выберем в качестве барьера $v(x)$ решение задачи

$$\mathcal{F}_1[v] = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{6.10}$$

Хорошо известно, что задача (6.10) однозначно разрешима в $C^{2+\delta}(\bar{\Omega})$, если $\partial\Omega\in K_1\cap C^{2+\delta}$, $\Phi\in C^{2+\delta}(\partial\Omega)$ с каким-либо $\delta>0$ (см., например, теорему 14.14 из кн. [5]). Из неравенства (3.1) следует, что $\mathcal{F}_1[u] \ge \mathcal{F}_{m1}^{1/m}[u]>0$, и для функций v, u выполнены условия теоремы сравнения 3.2 в области Ω при $m=1$. Поэтому $v_n\le u_n$ на $\partial\Omega$, что и приводит к неравенству (6.9).

Для завершения доказательства априорной ограниченности $u(x)$ в $C^1(\bar{\Omega})$ обратимся к теореме 4.1 из публикации [7], которая для рассматриваемых уравнений формулируется следующим образом.

Лемма 6.6. *Пусть $u\in K_m\cap C^3(\bar{\Omega})$ – решение уравнения (1.6) или (4.3), причем $|u|\le M_0$, $|u_x|_{\partial\Omega}\le\partial M_1$. Предположим, что выполнено условие (4.1). Тогда*

$$\max_{\Omega}|u_x| \le \partial M_1\exp(c_7(\nu, \|H_m\|_{C^1})M_0).$$

Следствием лемм 6.1-6.6 является

Теорема 6.1. *В условиях теорем 4.1, 4.3 любые решения $u\in K_m\cap C^3(\Omega)$ соответствующих задач удовлетворяют неравенству*

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \le c_8(\nu, \varepsilon, R, \delta, h_m^0, \|H_m\|_{C^1}, \|\partial\Omega\|_{C^{2+\delta}}, \|\Phi\|_{C^{2+\delta}(\partial\Omega)}), \tag{6.11}$$

где δ – произвольное число из интервала (0;1).

7. Априорная оценка $|u_{nt}|_{\partial\Omega}$. Начиная с этого места и далее, мы не будем различать уравнения (1.6), (4.3), рассматривая вместо них уравнение вида

$$\mathcal{F}_m[u] = f(x,u,u_x). \tag{7.1}$$

Оценка смешанных производных решений задачи (7.1), (1.7) на границе занимает центральное место в статье [7]. Оказалось, что попытка следовать схеме доказательства, разработанной в публикациях [13,8,9] для уравнений с операторами F_m, наталкивается на препятствия, порожденные структурными особенностями операторов кривизны порядка m. Для преодоления их понадобилось более глубокое исследование конусов K_m, результатом которого является лемма 5.1 из статьи [7]. Мы переформулируем ее здесь в несколько иных терминах.

Л е м м а 7.1. *Для любого решения* $u\in K_m\cap C^3(\Omega)$ *уравнения* (7.1) *найдется число* $d=d(\|u\|_{C^1})$ *такое, что в области* $\Omega\cap B_d(x_0)$, $x_0\in\partial\Omega$, *для функции*

$$W(x) = u_t + u_n\omega_t - (1/2)\sum_1^{n-1}(u_s-u_s(0))^2$$

выполнено неравенство

$$\frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ij}}W_{ij} \le c_9\cdot(1+|W_x| + \mathcal{F}_{m-1}[u] + \frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ij}}W_iW_j), \tag{7.2}$$

где $c_9=c_9(n,\|f\|_{C^1(\mathfrak{B}_1)},\|\omega\|_{C^3})$, $\mathfrak{B}_1=\{x\in\Omega;\ |u|+|p|\le\|u\cap_{C^1}\}$.

Заменим неравенство (7.2) более простым для функции $w(x) = \exp(-u_t(0)c_9)-\exp(-Wc_9)-c_{10}x^2$ с достаточно большой, в зависимости от $c_9, n, \omega, \|u\|_{C^1(\Omega)}$, постоянной c_{10}. Вычисляем

$$\frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ij}}w_{ij} \le c_{11}(1+|w_x|) + c_9^2\exp(-c_9W)\mathcal{F}_{m-1}[u] -$$

$$-2c_{10}\sum_1^n\frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ii}}. \tag{7.3}$$

Поскольку в конусе K_m выполнено

$$\mathcal{F}_{m-1}[u] \le n(1+u_x^2)\sum_1^n\frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ii}},$$

из неравенства (6.3) для w следует соотношение

$$\frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ij}}w_{ij} \le c_{11}(1+|w_x|). \tag{7.4}$$

Барьер v для функции w будем строить в области (6.1) в виде суммы типа (6.2):

$$v(x) = \theta(\tilde{x}) + h(r),\ h',\ h''>0. \tag{7.5}$$

Нас интересуют функции $v\in K_m(u_x)$, где $u(x)$ - решение уравнения (7.1). Покажем, что этого можно добиться за счет выбора функции $h(r)$, какова бы ни была фиксированная функция $\theta(\tilde{x})$ в равенстве (7.5).

Вычислим $\mathcal{F}_l(u_x, v_{xx})$, $l=1,\dots,m$, в какой-либо точке $x\in\tilde{\Omega}$. Для этого ортогональным преобразованием перейдем к новому базису: $b_1,\dots,b_{n-1}$, $b_n=\xi/|\xi|$, $\xi=(-\tilde{\omega}_1,\dots,-\tilde{\omega}_{n-1},1)$, связанному с выбранной точкой $x\in\tilde{\Omega}$. Имеем

$$v_\alpha \equiv v_i b^i_\alpha = \theta_\alpha + \delta^n_\alpha h'|\xi|,$$

$$v_{\alpha\beta} \equiv v_{ij}\cdot b^i_\alpha b^j_\beta = \theta_{\alpha\beta} + h'\tilde{\omega}_{\alpha\beta} + \delta^n_\alpha\delta^n_\beta h''\xi^2,$$

$$\mathcal{F}_l(u_x, v_{xx}) = \frac{l}{n}\,\frac{1+\sum\limits^{n-1} u_\alpha^2}{\frac{1}{1+u_x^2}}\,(h')^{l-1}h''\xi^2(\mathcal{F}_{l-1,n}(u_\alpha,\tilde{\omega}_{\alpha\beta}) +$$

$$+ o(\tfrac{1}{h'})) + (h')^l(\mathcal{F}_l(u_x,\tilde{\omega}_{xx}) + o(\tfrac{1}{h'})). \tag{7.6}$$

Специфика новых координат такова, что в рассматриваемой точке выполнено равенство

$$F_l[\tilde{\omega}] = (1+\xi^2)^{\frac{l}{2}} h_l(\tilde{x},\varkappa,d). \tag{7.7}$$

Если $\partial\Omega\cap B_d\in K_m$ и $\varkappa$ мало, то $\tilde{\omega}\in K_m(0)$. Выберем число $\varkappa$ столь малым, что

$$h_{m-1}(\tilde{x},\varkappa,d) \ge \tfrac{1}{2}h^0_{m-1}(d) = \tfrac{1}{2}\min_{\partial\Omega\cap B_d} h_{m-1}(\tilde{x}). \tag{7.8}$$

Включение $\tilde{\omega}\in K_m(0)$ позволяет воспользоваться неравенством (3.5) с $p^\alpha=u_\alpha$, $\alpha=1,\dots,n-1$, леммы 3.1. Последнее, вместе с соотношениями (7.6)-(7.8), приводит к неравенству

$$\mathcal{F}_m(u_x, v_{xx}) \ge c_{12}(h')^{m-1}((1-\frac{c_{12}}{h'})h''-c_{12}h') \tag{7.9}$$

с постоянной c_{12}, зависящей от h^0_{m-1}, $\|u_x\|_C$, $\|\omega_x\|_{C^1}$, $\|\theta_x\|_{C^1}$.

Положим в равенстве (7.5)

$$h(r) = \exp(br) - \exp(b\,\frac{\varkappa d^2}{2}). \tag{7.10}$$

Если $b\gg1$, то из неравенства (7.9) для $v(x)$ следует соотношение

$$\mathcal{F}_m(u_x, v_{xx}) \ge C^m(b)\,(1+|v_x|)^m, \tag{7.11}$$

где C неограниченно возрастает при $b\longrightarrow+\infty$. Заметим еще, что для достаточно больших b на границе $\partial\tilde{\Omega}$ выполнены неравенства

$$v|_{\partial\Omega\cap B_d} \le \theta(\tilde{x}), \tag{7.12}$$

$$v|_{\partial\tilde{\Omega}\setminus(\partial\Omega\cap B_d)} \le -M(b),\quad M\gg1. \tag{7.13}$$

Мы будем сравнивать $w(x)$ с $v(x)$ с помощью теоремы 3.1, а для этого неравенство (7.11) не подходит. Однако справедлива

Л е м м а 7.2. *Пусть $u\in K_m$ – решение уравнения* (7.1) *с $f\ge\nu^m>0$. Тогда для функции* (7.5), (7.10) *имеется неравенство*

$$\frac{\partial \mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ij}}\, v_{ij} \ge \nu^{m-1} C(b)(1+|v_x|). \tag{7.14}$$

Доказательство. Условия леммы и выбор $v(x)$ позволяют воспользоваться неравенством (3.4), которое в рассматриваемой ситуации равносильно следующему:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{ij}}\, v_{ij} \ge \mathcal{F}_m^{\frac{m-1}{m}}[u]\cdot \mathcal{F}_m^{\frac{1}{m}}[v],$$

что вместе с неравенством (7.11) приводит к соотношению (7.14).

Теорема 7.1. *Пусть $u\in K_m\cap C^3$ – решение уравнения (7.1) в области $\Omega\cap B_d(x_0)$, равное $\varphi(\tilde{x})$ на границе $\partial\Omega\cap B_d$. Предположим, что $\partial\Omega\cap B_d\in K_m$. Тогда каково бы ни было $t=1,\dots,n-1$, справедливо неравенство*

$$|u_{nt}(x_0)| \le c_{13}(\nu, h^0_{m-1}(d),\ \|u\|_{C^1},\ \|\partial\Omega,\varphi\|_{C^3},\ \|f\|_{C^1(\mathfrak{B}_1)}). \tag{7.15}$$

Доказательство. Свяжем с точкой x_0 область $\tilde{\Omega}$ со столь малым χ, что $\partial\Omega(x,d)\in K_m$ и выполнено неравенство (7.8). Для $w(x)$ на границе $\partial\tilde{\Omega}$ имеются оценки

$$w|_{\partial\Omega\cap B_d(x_0)} \ge \theta(\tilde{x}), \tag{7.16}$$

$$\theta(\tilde{x}) = \exp(-c_9\varphi_t(0))(1-\exp(c_9(\varphi_t-\varphi_t(0))^2+ M_1^2\omega_x^2)) - c_{10}(\tilde{x}^2+\omega^2),$$

$$w|_{\partial\tilde{\Omega}\setminus(\partial\Omega\cap B_d)} \ge -c_{14}(M_1, \|\varphi_x,\omega_x\|_{C^3}), \tag{7.17}$$

где $M_1 = \max\limits_{\Omega\cap B_d}|u_x|$. Сравнивая неравенства (7.16), (7.17) с (7.12), (7.13) и неравенство (7.4) с (7.14), выберем b настолько большим, что для функций w, v выполнены условия теоремы 3.1 в области $\tilde{\Omega}$. Поскольку по построению при любом b имеется равенство $w(x_0)=v(x_0)$, из теоремы 3.1 следует односторонняя оценка: $v_n(x_0)\le w_n(x_0)$, т.е. производная u_{nt} ограничена снизу. Как отмечено в статье [7], неравенство (7.2) справедливо и для функций $\tilde{W}(x)=-(u_t+u_n\omega_t)-0.5\sum\limits_1^{n-1}(u_s-u_s(0))^2$, и потому имеется двусторонняя оценка (7.15).

8. Априорные оценки $|u_{nn}|_{\partial\Omega}$, $\|u\|_{C^2(\Omega)}$. До сих пор ненулевое граничное условие (1.7) не вносило принципиальных усложнений в методы построения априорных оценок. Не так обстоит дело с оценкой $|u_{nn}|$, где основная трудность как раз в отличие $\Phi(x)$ от постоянной. Для уравнения Монжа-Ампера идея построения такой оценки в случае $\Phi\ne\mathrm{const}$ была заложена еще в работах С.Н.Бернштейна [19], где в качестве Ω рассмотрен шар B_R. Для произвольных выпуклых областей Ω аналогичные построения были проделаны в публикациях [19-21] и др. Принципы доказательства априорной ограниченности u_{nn} для более широкого класса уравнений, в частности для уравнения (1.8), были найдены авторами публикации [8]. Оказалось, что метод, использованный в статье [8], допускает модификацию, приводящую к успеху и в случае уравнений (7.1).

Поскольку оценка для смешанных производных решения задачи (7.1), (1.7) на границе имеется (теорема 7.1), а касательные производные известны из условия Дирихле, представляется естественной попытка оценить вторые производные решения по нормали непосредственно из уравнения (7.1). Для этого необходима квалифицированная оценка снизу для коэффициента при u_{nn} в уравнении (7.1) (коэффициент этот равен $\partial\mathcal{F}_m/\partial u_{nn}$ и на функциях $u\in K_m$ положителен, как следует из неравенства (3.2)).

Следуя идее, изложенной в статье [8], трансформируем поставленную задачу следующим образом. Рассмотрим в точке $x_0=0\in\partial\Omega$ многочлен

$$P_{m-1}(t) = \mathcal{F}_{m-1}(\varphi_x(0),\ \varphi_{xx}(0) - t\omega_{xx}(0)). \tag{8.1}$$

Если $\omega\in K_m$, корни его вещественны независимо от вида матрицы φ_{xx}, [22, 12]. Кроме того, если $t\ll-1$, то справедливо включение $\varphi_{xx}(0)-t\omega_{xx}(0)\in K_{m-1}(\varphi_x)$. Обозначим a - наименьший из корней многочлена (8.1). Очевидно, что $\varphi_{xx}(0)-a\omega_{xx}(0)\in\partial K_{m-1}(\varphi_x(0))$. Поскольку имеется равенство

$$\left.\frac{\partial\mathcal{F}_m[u]}{\partial u_{nn}}\right|_{x=0} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1+\varphi_x^2(0)}{1+u_x^2(0)}\,P_{m-1}(u_n(0)), \tag{8.2}$$

вывод априорной оценки для u_{nn} сводится к отысканию такого $\tau>0$, что

$$u_n(0) \le a-\tau. \tag{8.3}$$

Для построения оценки (8.3) воспользуемся теоремой сравнения 3.2 в области $\tilde{\Omega}$, связанной с точкой $x_0\in\partial\Omega$. Выберем число $\varkappa$ так, что $\partial\Omega(\varkappa;d)\in K_m$ и

$$\mu_{m-1}[\partial\Omega(\varkappa;d)] \ge \frac{1}{2}\,\mu_{m-1}[\partial\Omega]. \tag{8.4}$$

Последнее всегда возможно, если $\partial\Omega\in K_m$.

Барьер v на этот раз будем искать в виде

$$v(x) = \varphi(\tilde{x}) + (a-\tau)(x^n-\omega(\tilde{x})) + (\tilde{a},\tilde{x})(x^n-\omega(\tilde{x})) +$$

$$+\frac{1}{2}\,a^{nn}y^2(x), \qquad \tilde{a} = (\tilde{a}^1,\ldots,\tilde{a}^{n-1}). \tag{8.5}$$

Можно сказать, что функция (8.5) - очередная модификация параболоида Бернштейна.

Коэффициенты $\tilde{a}$, a^{nn}, τ, d в равенстве (8.5) должны быть таковы, что для v в области $\tilde{\Omega}$ и на $\partial\tilde{\Omega}$ выполнены неравенства

$$(v-u)|_{\partial\tilde{\Omega}} \ge 0, \tag{8.6}$$

$$\mathcal{F}_m[v] \le \nu^m/(1+M_1^2), \quad M_1 = \max_{\tilde{\Omega}}|u_x|, \tag{8.7}$$

причем неравенство (8.7) достаточно иметь только в тех точках $\tilde{\Omega}$, где $v\in K_m$.

Информация о структурных особенностях операторов $\mathcal{F}_m$ и свойствах конусов K_m заложена в неравенстве (8.7). Для того чтобы она была обозрима, свяжем с каждой точкой $x\in\tilde{\Omega}$ специальным образом выбранную систему координат. Перейдем сначала к базису $b_1,\dots,b_n$:

$$b_s=\frac{(-\tilde\omega_s\tilde\omega_1,\dots,-\tilde\omega_s\tilde\omega_{s-1},\ 1+\sum_1^{s-1}\tilde\omega_t^2,0,\dots,0,\tilde\omega_s}{(1+\sum_1^{s}\tilde\omega_t^2)^{1/2}\ (1+\sum_1^{s-1}\tilde\omega_t^2)^{1/2}},\qquad s=1,\dots,n-1,$$

$$b_n=\frac{(-\tilde\omega_1,\dots,-\tilde\omega_{n-1},1)}{(1+\tilde\omega_x^2)^{1/2}}. \tag{8.8}$$

В базисе (8.8) нас будет интересовать оператор $\mathcal{F}_{m-1,n}[v]$:

$$\mathcal{F}_{m-1,n}[v]=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{\{1\le l_1<l_{m-1}\le n-1\}}\left(v\begin{pmatrix} l_1\dots l_{m-1}\\ [l_1\dots l_{m-1}]\end{pmatrix}-\frac{v_lv_p}{1+\sum_1^{n-1}v_l^2}(v\begin{pmatrix} l_1\dots l_{m-2}l\\ [l_1\dots l_{m-2}p]\end{pmatrix}\right), \tag{8.9}$$

$$v_l\equiv v_sb_l^s=\varphi_l+(a^s(x^n\omega)-\varkappa x^s(a-\tau+a^tx^t))b_l^s,$$

$$v_{lp}\equiv v_{ij}b_l^ib_p^j=\varphi_{lp}-(a-\tau)\omega_{lp}+a^tx^t\omega_{lp}-a^{nn}y\tilde\omega_{lp}-$$

$$-\varkappa(a^sx^t+a^tx^s)b_l^sb_p^t,\qquad l,p\ne n.$$

Приведем оператор (8.9) к виду $F_{m-1,n}$, записывая его значение на v в выбранной точке в базисе $\tau_1,\dots,\tau_{n-1},\tau_{n+1}$:

$$\frac{(-v_lv_1,\dots,v_lv_{l-1},1+\sum_1^{l-1}v_p^2,0,\dots,v_l)}{(1+\sum_1^{l}v_p^2)^{1/2}\ (1+\sum_1^{l-1}v_p^2)^{1/2}},\qquad l\ne n,n+1,$$

$$\tau_{n+1}=\frac{(-v_1,\dots,-v_{n-1},1)}{(1+\sum_1^{n-1}v_p^2)^{1/2}}. \tag{8.10}$$

В базисе (8.10) на поверхности $\{x\in\tilde\Omega,\ x^{n+1}=v(x)\}$ имеется равенство

$$\frac{v_{lp}(x)dy^ldy^p}{(\delta_p^l+v_lv_p)dy^ldy^p}=\frac{v_{\alpha\beta}(x)dz^\alpha dz^\beta}{\sum_1^{n-1}(dz^\alpha)^2},\qquad v_{\alpha\beta}\equiv v_{lp}\tau_\alpha^l\tau_\beta^p. \tag{8.11}$$

Действительно,

$$dv=v_ldy^l=-(\tau_{n+1}^l/\tau_{n+1}^{n+1})dy^l,$$

$$dz^{n+1}=\tau_{n+1}^ldy^l+\tau_{n+1}^{n+1}dv=0,$$

$$(\delta_p^l+v_lv_p)dy^ldy^p=(\tau_\alpha^l\tau_\beta^l+$$

$$+\tau^l_\alpha\tau^p_\beta\tau^l_{n+1}\tau^p_{n+1}/(\tau^{n+1}_{n+1})^2)dz^\alpha dz^\beta = \sum_1^{n-1}(dz^\alpha)^2,$$

что и приводит к равенству (8.11). Вспоминая связь операторов $\mathcal{F}_m$ с отношением квадратичных форм, видим, что в базисе (8.10) оператор (8.9) приобретает вид $F_{m-1,n}$.

Л е м м а 8.1. (*Выбор вектора* $\tilde{a}(\tau)$). *Предположим, что* $\partial\Omega|_0\in K_m$. *Тогда найдется единственный вектор* $\tilde{a}(\tau)$ *такой, что для функции* (8.5) *в* $\tilde{\Omega}$ *имеется равенство*

$$\frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)]}{\partial v_{\alpha\beta}(0)}\,v_{\alpha\beta}(x) = (m-1)\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)] -$$

$$-\frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)]}{\partial v_{\alpha\beta}(0)}\,(a^{nn}y\tilde{\omega}_{\alpha\beta}(x) - |\tilde{a}|^2c^{\alpha\beta}(x)(y+\tilde{x}^2)), \tag{8.12}$$

где функции $c^{\alpha\beta}(x)$, $\alpha,\beta=1,\ldots,n-1$, *ограничены в зависимости от* $h_{m-1}(0)$, $\|\varphi_x,\omega_x\|_{C^4}$. *При этом справедлива оценка*

$$|\tilde{a}| \le c_{15}(h_{m-1}(0),\ \|\varphi_x,\omega_x\|_{C^2}/P^{\overline{m-1}}(a-\tau)). \tag{8.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В наших построениях (8.8), (8.10), в каждой точке $x\in\tilde{\Omega}$ задан набор функций $v_{\alpha\beta},\alpha,\beta=1,\ldots,n-1$:

$$v_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}-(a-\tau-\tilde{a}^tx^t)\omega_{\alpha\beta}-a^{nn}y\tilde{\omega}_{\alpha\beta}-x\tilde{a}^sx^tb^s_lb^t_p\tau^l_\alpha\tau^p_\beta.$$

Обращаясь к формуле Тейлора, найдем числа $A^s_{\alpha\beta}$, $s=1,\ldots,n-1$, и функции $c^{\alpha\beta}(x)$ из равенства

$$v_{\alpha\beta}=v_{\alpha\beta}(0) + (A^s_{\alpha\beta}-\tilde{a}^s\omega_{\alpha\beta}(0) - x\tilde{a}^t\tau^t_\alpha(0)\tau^s_\beta(0))x^s -$$

$$- a^{nn}y\tilde{\omega}_{\alpha\beta}(x) + |\tilde{a}|^2c^{\alpha\beta}(x)(y+\tilde{x}^2). \tag{8.14}$$

В качестве вектора $\tilde{a}(\tau)$ возьмем решение линейной алгебраической системы

$$\frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)]}{\partial v_{\alpha\beta}(0)}\,(\delta^s_t\omega_{\alpha\beta}(0) + x\tau^s_\alpha(0)\tau^t_\beta(0))\tilde{a}^t = \frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)]}{\partial v_{\alpha\beta}(0)}\,A^s_{\alpha\beta}. \tag{8.15}$$

Покажем, что в условиях леммы система (8.15) однозначно разрешима. В самом деле, рассуждая, как и при доказательстве равенства (8.11), выводим

$$\frac{\omega_{\alpha\beta}(0)dz^\alpha dz^\beta}{\sum_1^{n-1}(dz^\alpha)^2} = \frac{\omega_{lp}(0)dy^ldy^p}{(\delta^l_p+\varphi_l(0)\varphi_p(0))dy^ldy^p}. \tag{8.16}$$

Поскольку в базисе (8.8) $\omega\in K_m(0)$, применима лемма 3.1 и, в частности, имеется неравенство (3.5) с $p^l=\varphi_l(0)$. Тогда из соотношения (8.16) следует, что в базисе

(8.10) $\omega\in K_{m-1}(0)$ и

$$\mathcal{F}_{m-1,n}(0;\omega_{zz}(0) > \frac{1}{1+\varphi^2(0)}\, h_{m-1}(0). \tag{8.17}$$

Неравенство (3.4) в свою очередь дает

$$\frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)]}{\partial v_{\alpha\beta}(0)}\,\omega_{\alpha\beta}(0) \ge p^{\frac{m-2}{m-1}}(a-\tau)\Big(\frac{h_{m-1}(0)}{1+\varphi_x^2(0)}\Big)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{8.18}$$

Заметим еще, что матрица $\partial\mathcal{F}_{m-1,n}[v(0)]/\partial v_{\alpha\beta}(0)\tau^s_\alpha(0)\tau^t_\beta(0))$ положительно определена, и поэтому неравенство (8.18) гарантирует однозначную разрешимость системы (8.15) и справедливость оценки (8.13).

Неравенство (8.18) является чрезмерно грубым. Для построения более точной оценки воспользуемся следующим предложением алгебраического характера.

Л е м м а 8.2. *Пусть* $\omega\in K_{m-1}(0)$, $w\in\partial K_{m-1}(0)$ *и* $\tau=0$*–*l *– кратный корень многочлена*

$$Q_{m-1}(\tau) = F_{m-1}(w_{\alpha\beta} + \tau\omega_{\alpha\beta}) \equiv F_{m-1}[w + \tau\omega].$$

Тогда 0 *является* $(l-1)$ *– кратным корнем многочлена* $Q_{m-2}(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $l=2$. Предположим, что $Q_{m-2}(\tau)\ne0$. Тогда по определению конуса $Q_{m-2}(0)>0$ и поэтому найдется число $\tau_1<0$ такое, что $v_1=w+\tau_1\omega\in K_{m-1}(0)$. Рассмотрим отрезок $v=\alpha v_1+(1-\alpha)v_2$, $\alpha\in[0;1]$, где $v_2=w+\tau_2\omega$, $\tau_2>0$, $v_2\in K_{m-1}(0)$. Поскольку конус $K_{m-1}(0)$ – выпуклый, $v\in K_{m-1}(0)$. Однако при $\alpha=\tau_2/(\tau_2-\tau_1)$ имеем $v=w\in\partial K_m$ (0). Это противоречие означает, что предположение $Q_{m-2}(0)\ne0$ ошибочно, т.е. $Q_{m-2}(0)=0$.

Пусть теперь $l=p+2$, $p>0$. Рассмотрим вспомогательный конус

$$K^{(p)}_{m-1} = \{v;\ F^{(p)}_i[v] > 0,\quad i=p+1,\dots,m-1\},$$

где $F^{(p)}_i[w+\tau\omega] = d^pF_i[w+\tau\omega]/(d\tau)^p$. Конус $K^{(p)}_{m-1}$ является звездным относительно ω^0, $\omega^0_{\alpha\ \beta}=\delta^\alpha_\beta$, поскольку

$$F^{(p)}_{m-1}[v+t\omega^0] = \sum_{i=p}^{m-1} c_i(n,\hat{m})\ F^{(p)}_i[v]\,t^{i-p}>0,\quad t\ge0, \tag{8.19}$$

где $c_p,\dots,c_{m-1}$ – положительные постоянные.

Рассмотрим еще конус Гординга $\Gamma^{(p)}_{m-1}$, порожденный $\omega_{\alpha\ \beta}$– гиперболическим многочленом $Q^{(p)}_{m-1}(\tau)=F^{(p)}_{m-1}(w+\tau\omega)$ (см., напр., [8, с.268]). Известное неравенство Гординга

$$\hat{v}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial F^{(p)}_{m-1}}{\partial v_{\alpha\beta}} \ge (F^{(p)}_{m-1}[\hat{v}])^{\frac{1}{m-1-p}}\,(F^{(p)}_{m-1}[v])^{\frac{m-2-p}{m-1-p}},\ \hat{v},v\in\Gamma^{(p)}_{m-1},$$

и тот факт, что $\Gamma^{(p)}_i\subset\Gamma^{(p)}_{i-1}$, $i\le m-1$, дают с $\hat{v}=\omega^0$:

$$(F^{(p)}_i[v])^{\frac{1}{i-p}} \le c(\omega)(F^{(p)}_{i-1}[v])^{\frac{1}{i-p-1}},\quad i=p+2,\dots,m-1. \tag{8.20}$$

Соотношения (8.19), (8.20) означают, что $K^{(p)}_{m-1} = \Gamma^{(p)}_{m-1}$ и $K^{(p)}_{m-1}$ – выпуклое множество.

По построению $\tau=0$ - двукратный корень многочлена $Q^{(p)}_{m-1}$. Поэтому $Q^{(p)}_{m-2}(0) = 0$ и $F_{m-2}[w+\tau\omega]\sim\tau^{l-1}$.

Лемма 8.3. *В условиях леммы* 8.2, *какова бы ни была точка* $x\in\partial\Omega$, *справедливо неравенство*

$$|\tilde{a}| \le c_{16}(\|\Phi,\partial\Omega\|_{C^3}). \tag{8.21}$$

Доказательство. Из утверждения леммы 8.2 следует, что в фиксированной точке $x\in\partial\Omega$ выполнено соотношение

$$Q'_{m-1}(\tau)/Q_{m-2}(\tau) =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}}{\partial v^0_{\alpha\beta}}\,\omega_{\alpha\beta}/F_{m-2}[w+\tau\omega] \ge \frac{1}{c(x)}, \tag{8.22}$$

$$w_{\alpha\beta} = \varphi^0_{\alpha\beta} - a\omega_{\alpha\beta}\ .$$

Соображения компактности и непрерывности позволяют утверждать, что $c(x)\le$ $\le c_{17}(\|\Phi,\partial\Omega\|_{C^3})$. Учитывая, что $F_{m-2}[v]$ - сумма собственных значений положительно определенной формы $\dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial v^0_{\alpha\beta}}\,\xi^\alpha\xi^\beta$, в качестве следствия неравенства (8.22) имеем

$$\left|\frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}}{\partial v^0_{\alpha\beta}}\right| \le c_{18}\,\frac{\partial\mathcal{F}_{m-1,n}}{\partial v^0_{\alpha\beta}}\,\omega_{\alpha\beta}(0), \quad \alpha,\beta=1,\dots,n-1,$$

и, в частности, справедливо неравенство (8.21).

Параметр a^{nn} выберем таким образом, чтобы были выполнены соотношения

$$(\approx\!\omega_{\alpha\beta}) = (\tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \frac{c^{\alpha\beta}(x,\tilde{a})}{a^{nn}\chi})\in K_{m-1}(0) \tag{8.23}$$

и (8.6). Что касается (8.23), то в силу специфики базисов (8.8), (8.10) и выбора числа χ, $(\tilde{\omega}_{\alpha\beta})\in K_{m-1}(0)$. Поэтому найдется постоянная $c_{19}(\mu_{m-1}[\omega],\chi,c_{16},\|\varphi,\omega\|_{C^4})$ такая, что включение (8.23) имеется при любом $a^{nn}\ge c_{19}$.

Неравенство (8.6) выполнено на $\partial\Omega\cap\partial\tilde{\Omega}$ при любом $a^{nn}>0$. Для того, чтобы получить его на $\partial\tilde{\Omega}\setminus(\partial\Omega\cap\partial\tilde{\Omega}) = \{|\tilde{x}|<d,\ y=\chi d^2/2\}$, достаточно положить

$$a^{nn} = c_{20} = c_{19} \vee \frac{1}{4\chi d^2}\,(M_1 + |a-\tau| + c_{16}d). \tag{8.24}$$

Лемма 8.4. *Каково бы ни было число* $\tau\in(0;1/2)$, *функция* (8.5), (8.21), (8.24) *в точках* $\{x\in\tilde{\Omega};\ v(x)\in K_m\}$ *удовлетворяет неравенству*:

$$\mathcal{F}_m[v] \le c_{21}(c_{16},c_{20},\|\varphi,\omega\|_{C^2})\ P_{m-1}(a-\tau), \tag{8.25}$$

причем $(v-u)\big|_{\partial\tilde{\Omega}} \ge 0$.

Для доказательства леммы 8.4 достаточно заметить, что в выбранных точках $\{x\in\tilde{\Omega}\}$ имеются, как следствие соотношений (3.2), (3.4), (8.12), (8.23) неравенства

$$F_{m-1,n}[v] \le mP_{m-1}(a-\tau), \qquad \mathcal{F}_m[v] \le |v_{zz}|F_{m-1,n}[v].$$

Ключевое соотношение (8.7) получим, положив в (8.25) $\tau=\tau_0$, где τ_0 - наименьший положительный корень уравнения $\nu^m=c_{21}P_{m-1}(Q-\tau)$.

Обращаясь к теореме 3.2, подведем итог проделанным построениям.

Лемма 8.5. *Пусть* $u\in K_m$ *- решение задачи* (7.1), (1.7) *с* $f(x,u,p)\ge\nu^m>0$. *Тогда для* $u_n(x_0)$, $x_0\in\partial\Omega$, *выполнено неравенство* (8.3) *с* $\tau=\tau_0$.

Теорема 8.1. *Пусть* $\partial\Omega\in K_m$. *Тогда для любого решения* $u\in K_m$ *задачи* (7.1), (1.7) *имеется априорная оценка*

$$|u_{nn}|\big|_{\partial\Omega}\le c_{22}(\nu,h_m^0,c_{13},\|u\|_{C^1(\Omega)},\|\Phi,\partial\Omega\|_{C^4}). \tag{8.26}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что при $t<a$ многочлен (8.1) - убывающая функция. Поэтому следствием оценки (8.3) является неравенство

$$P_{m-1}(u_n(0))\ge P_{m-1}(a-\tau),$$

которое вместе с уравнением (7.1) и неравенством (7.15) приводит к оценке сверху для $u_{nn}|_{\partial\Omega}$. Оценка снизу - следствие вложения $K_m\subset K_1$, что и доказывает неравенство (8.26).

Теорема 8.2. *Пусть* $\partial\Omega\in K_m$. *Тогда для любого решения* $u\in K_m$ *задачи* (7.1), (1.7) *имеется априорная оценка*

$$|u_{xx}|\big|_{\partial\Omega}\le c_{23}(\nu,h_m^0,\|u\|_{C^1(\Omega)},\|\Phi,\partial\Omega\|_{C^4},\|f\|_{C^1(\mathfrak{B}_1)}). \tag{8.27}$$

Достаточные условия продолжения оценки (8.27) во внутренние точки области Ω сформулированы в теореме 6.1 из заметки [7]:

Лемма 6.4. *Пусть* $u\in K_m\cap C^4(\Omega)$ *- решение уравнения* (7.1) *и* $\max\limits_{\partial\Omega}|u_{xx}|\le\partial M_2$, $|u_x|\le M_1$. *Предположим, что в* $\mathfrak{B}_1$ *выполнено неравенство*

$$m\,\frac{\partial^2 f^{1/m}}{\partial p^i\partial p^j}\,\xi^i\xi^j\ge-\frac{f^{1/m}}{2\sqrt{n}\,(1+M_1^2)^2}\,\xi^2. \tag{8.28}$$

Тогда

$$\max_{\Omega}|u_{xx}|\le c_{24}(\nu,M_1,\partial M_2,\|f\|_{C^2(\mathfrak{B}_1)}). \tag{8.29}$$

Настало время вернуться к уравнениям (1.6), (4.3), для которых выполнено условие (8.28), и поэтому имеется оценка (8.29).

Подводя итог результатам, полученным в п.6-8, убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 8.3. *В условиях теорем* 4.1, 4.3 *для решений* $u\in K_m\cap C^4(\bar\Omega)$ *соответствующих задач имеется оценка*

$$\|u\|_{C^2(\Omega)}\le c_{25}(R,\nu,\mu,h_m^0,\|\partial\Omega,\Phi\|_{C^4},\|f\|_{C^2(\mathfrak{B}_1)}), \tag{8.30}$$

где $\mathfrak{B}_1=\{x\in\Omega;\ |u|+|p|\le c_8\}$ *- постоянная неравенства* (6.11).

Вспоминая теоремы 5.5, 5.6, видим, что вывод неравенства (8.30) завершает доказательство теорем 4.1, 4.3.

Дополнение

Во время пребывания в Центре математического анализа при Австралийском Национальном университете (Канберра, октябрь 1989 г.) автору стали известны последние результаты Н. С. Трудингера [23-25]. Покажем, что эти результаты позволяют существенно приблизить к необходимым условиям теоремы 4.1. Рассмотрим сначала неравенство $\mu \le 1/R$ в условии в). Это условие используется в настоящей статье для оценки решения задачи (1.6), (1.7) снизу. В публикациях [24, 25] найдены условия, необходимые для принадлежности исследуемого решения $u(x)$ пространству $C^1(\Omega)$ и показана их достаточность для априорной ограниченности $u(x)$. Именно справедлива

Теорема. *Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет в Ω дифференциальным неравенствам*

$$\mu_m[u](x) \le \psi(x), \quad \frac{\partial \mu_m[u]}{\partial u_{ij}} \xi^i \xi^j \ge 0.$$

Предположим, что

а) Ω *– ограниченная область в* R^n, $n \ge 2$; $\partial\Omega \in C^2$;

б) $\psi(x)$ *– ограниченная неотрицательная в* Ω *функция и найдется число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\int_E \psi dx \le \frac{(1-\varepsilon)}{n} \int_{\partial E} \mu_{m-1}[\partial E] ds, \tag{1}$$

какова бы ни была подобласть $E \subset \Omega$ *с* $\partial E \in K_{m-1}$.

Тогда справедливо неравенство

$$\inf_{\Omega} u \ge \inf_{\partial\Omega} u - c,$$

где постоянная c *зависит от* n, m, ε, ψ, Ω.

Очевидно, что неравенство (1) с $\psi(x) = H_m(x, \Phi_1)$ достаточно для априорной ограниченности решения задачи (1.6), (1.7) снизу.

Далее, уточним неравенство (4.2), использованное в настоящей статье для оценки нормальной производной решения $u(x)$ на границе $\partial\Omega$. В препринте [23], посвященном доказательству разрешимости задачи Дирихле для уравнений заданной кривизны в обобщенном смысле, эта оценка имеется в условиях нестрогого аналога неравенства (4.2). В препринте [25] показано, что обсуждаемое ограничение в нестрогом варианте необходимо для разрешимости задачи (1.6), (1.7) с произвольной функцией $\Phi(x)$.

Сформулируем в заключение уточненный вариант теоремы 4.1.

Теорема 4.1′. *Пусть* $1 \le m < n$, $l \ge 2$ *– целое число,* $0 < \alpha < 1$. *Предположим, что*

а) $\partial\Omega \in K_m$ *– замкнутая поверхность класса* $C^{l+2+\alpha}$;

б) $\Phi \in C^{l+2+\alpha}(\partial\Omega)$;

в) $H_m \in C^{l+\alpha}$, $\nu > 0$, $\partial H_m / \partial u \ge 0$ *и найдется число* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$\int_E H_m(x,\Phi_1)dx \le \frac{(1-\varepsilon)}{n}\int_{\partial E}\mu_{m-1}(\partial E)ds,$$

какова бы ни была подобласть $E\subset\Omega$, $\partial E\in K_{m-1}$;

г) *на границе* $\partial\Omega$ *функции* $H_m(x,u)$ *и* $h_m(x)=\mu_m[\partial\Omega](x)$ *связаны соотношением*

$$H_m(x,u) \le \frac{n-m}{n}\, h_m(x).$$

Тогда существует единственное решение $u\in K_m\cap C^{l+2+\alpha}(\bar\Omega)$ *задачи* (1.6),(1.7).

Список литературы

[1] Ивочкина Н.М. Восстановление поверхности по ее кривизне порядка // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып.5. С. 192.

[2] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для уравнения кривизны порядка m //ДАН СССР. 1988. Т. 299, N 1. С. 35-38.

[3] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J. Nonlinearsecond jrder equations V. The Dirichlet problem for weingarten hypersurfaces // Comm. Pure. Appl. Maht. 1988. Vol. 41. P. 47-70.

[4] Serrin J. The problem of Dirichlet for quasipinear elliptic differential equations with many independent variables // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1969. Vol. 264. P. 413-496.

[5] Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin etc.: Springer, 1983.

[6] Ивочкина Н.М. Классическая разрешимость задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 131. С. 72-79.

[7] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка // Мат. сб. 1989. Т. 180, N 7. С. 867-887.

[8] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J. The Didichtel problem for nonlinear second order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of Hessian // Acta Math. 1985. Vol. 155. N 3, 4. P. 261-301.

[9] Крылов Н.В. О первой краевой задаче для нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. АН. СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, N 2. С.242-269.

[10] Ивочкина Н.М. Вариационные задачи, связанные с операторами типа Монжа-Ампера // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1988. Т. 167. С. 186-189.

[11] Ивочкина Н.М. О возможности интегральных формул в R^n // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 35-51.

[12] Ивочкина Н.М. Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера //Мат. сб. 1983. Т. 122. С. 265-275.

[13] Ивочкина Н.М. Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа-Ампера // Мат. сб. 1985. Т. 128. С. 403-415.

[14] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

[15] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит. 1957.

[16] Evans L.C. Classical solutions of fully nonlinear, conves second order elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1982. Vol. 35. P. 333-363.

[17] Крылов Н.В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985.

[18] Сафонов М.В. Граничные оценки в $C^{2+\alpha}$ для решений нелинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 5. С. 146-147.

[19] Бернштейн С.Н. Собр. соч. Т.3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

[20] Ивочкина Н.М. Интегральный метод барьерных функций и задачи Дирихле для уравнений с операторами типа Монжа-Ампера // Мат. сб. 1940. Т. 112. С. 193-206.

[21] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. I. Monge-Ampère equations // Comm. Pure Sppl. Math. 1984. Vol.37. P. 369-402.

[22] Gärding L. An inequality for hyperbolic polynomials // J. Math. and Mech. 1959. Vol. 8. P. 957-965.

[23] Trudinger N.S. The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations // Preprint CMA-R19. 1989.

[24] Trudinger N.S. A priori bounds for graph with prescribed curvature // Festschrift for Jurgen Moser. Acad. Press, 1989.

[25] Trudinger N.S. A priori bounds for solutions of prescribed curvature equations // Preprint CMA. 1989.

Ленинградский инженерно-строительный институт
198005, Ленинград, 2-я Красноармейская ул., 4.

Поступило 20 сентября 1989 г.