В. Н. Кокарев, О кривизне кэлеровых многообразий с нулевым тензором Риччи, *Матем. заметки*, 2019, том 105, выпуск 4, 537–544

DOI: 10.4213/mzm12002

Математические заметки

Том 105 выпуск 4 апрель 2019

УДК 514.76

О кривизне кэлеровых многообразий с нулевым тензором Риччи

В. Н. Кокарев

В работе исследуется поведение модуля тензора кривизны и голоморфной секционной кривизны на Риччи-плоских кэлеровых многообразиях.
Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: Риччи-плоское многообразие, тензор кривизны.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12002

1. Введение. В настоящей статье подробно доказываются результаты, анонсированные в [1].

Пусть M – кэлерово многообразие с кэлеровой метрикой g нулевой кривизны Риччи. Тогда метрику g называют *Риччи-плоской кэлеровой метрикой*, а многообразие M – *Риччи-плоским многообразием*. По теореме Яу [2] на компактном кэлеровом многообразии M с $c_1(M)=0$ существует Риччи-плоская кэлерова метрика. Однако теорема Яу – теорема существования – не позволяет получить эту метрику в явном виде. Исследование же свойств таких метрик является важной задачей геометрии.

В работе изучается поведение секционной кривизны и модуля тензора кэлеровой кривизны. Полученные результаты применимы к Риччи-плоским кэлеровым метрикам на компактных и некомпактных многообразиях.

Используемый в статье метод – вычисление и оценка лапласиана от геометрических объектов, важных для изучаемого вопроса, – стандартный метод римановой геометрии [3], [4].

2. Основные соотношения. Пусть n – комплексная размерность многообразия M. Греческие индексы $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ будут принимать значения $1,2,\dots,n$; индексы, обозначенные большими латинскими буквами $A,B,\dots$, будут принимать значения $1,2,\dots,n$, $\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{n}$. Для функции f пусть

$$\Delta f=g^{\alpha\overline{\beta}}f_{,\alpha\overline{\beta}},\qquad \operatorname{grad}^2 f=g^{\alpha\overline{\beta}}f_{,\alpha}f_{,\overline{\beta}},$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ означает ковариантное дифференцирование. Оператор Δ и grad^2 с точностью до коэффициента $(=1/4)$ совпадают с оператором Лапласа–Бельтрами и квадратом градиента римановой метрики, полученной из кэлеровой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00154а).

С помощью тензора кривизны $K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}$ можно построить инварианты

$$
\begin{aligned}
|K|^2 &= g^{\alpha\overline{\lambda}} g^{\mu\overline{\beta}} g^{\gamma\overline{\nu}} g^{\varepsilon\overline{\delta}} K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} \overline{K_{\lambda\overline{\mu}\nu\overline{\varepsilon}}} = g^{\alpha\overline{\lambda}} g^{\mu\overline{\beta}} g^{\gamma\overline{\nu}} g^{\varepsilon\overline{\delta}} K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} K_{\overline{\lambda}\mu\overline{\nu}\varepsilon} = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}, \\
T_1 &= K^{\alpha\overline{\beta}}{}_{..\gamma\overline{\delta}} K^{\gamma\overline{\delta}}{}_{..\varepsilon\overline{\lambda}} K^{\varepsilon\overline{\lambda}}{}_{..\alpha\overline{\beta}}
\end{aligned}
$$

(сворачиваются пары индексов разных типов, стоящие на одном уровне),

$$
T_2 = K_{\alpha\,.\,\gamma\,.}^{\;.\,\beta\,.\,\delta} K_{\delta\,.\,.\,\beta}^{\;.\,\varepsilon\lambda\,.} K^{\alpha\,.\,\gamma\,.}_{\;.\,\varepsilon\,.\,\lambda}
$$

(сворачиваются пары индексов одного типа, стоящие на одном уровне).

Инвариант $|K|^2$, очевидно, вещественный.

Используя симметрии, антисимметрии тензора кривизны и правило суммирования $a_\alpha b^\alpha = a^{\overline{\alpha}} b_{\overline{\alpha}}$, получаем

$$
\begin{aligned}
\overline{T_1} &= K^{\overline{\alpha}\beta}{}_{..\overline{\gamma}\delta} K^{\overline{\gamma}\delta}{}_{..\overline{\varepsilon}\lambda} K^{\overline{\varepsilon}\lambda}{}_{..\overline{\alpha}\beta} = K^{\beta\overline{\alpha}}{}_{..\delta\overline{\gamma}} K^{\delta\overline{\gamma}}{}_{..\lambda\overline{\varepsilon}} K^{\lambda\overline{\varepsilon}}{}_{..\beta\overline{\alpha}} = T_1, \\
\overline{T_2} &= K_{\overline{\alpha}\,.\,\overline{\gamma}\,.}^{\;.\,\overline{\beta}\,.\,\overline{\delta}} K_{\overline{\delta}\,.\,.\,\overline{\beta}}^{\;.\,\overline{\varepsilon}\overline{\lambda}\,.} K^{\overline{\alpha}\,.\,\overline{\gamma}\,.}_{\;.\,\overline{\varepsilon}\,.\,\overline{\lambda}} = K_{\overline{\alpha}\,.\,\overline{\gamma}\,.}^{\;.\,\overline{\beta}\,.\,\overline{\delta}} K_{\overline{\delta}\,\varepsilon\,\lambda\,\overline{\beta}} K^{\overline{\alpha}\,\varepsilon\,\overline{\gamma}\,\lambda} \\
&= K_{\overline{\alpha}\,.\,\overline{\gamma}\,.}^{\;.\,\overline{\beta}\,.\,\overline{\delta}} K_{\lambda\,\overline{\beta}\,\overline{\delta}\,\varepsilon} K^{\overline{\alpha}\,\varepsilon\,\overline{\gamma}\,\lambda} = K^{\alpha\,.\,\gamma\,.}_{\;.\,\beta\,.\,\delta} K_{\lambda\,.\,.\,\varepsilon}^{\;.\,\beta\delta\,.} K_{\alpha\,.\,\gamma\,.}^{\;.\,\varepsilon\,.\,\lambda} = T_2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, T_1, T_2 тоже вещественные.

Обозначим $|K| = \sqrt{|K|^2}$.

Теорема 1. *Для Риччи-плоской кэлеровой метрики при $|K|^2 \neq 0$ выполнено неравенство*

$$
\Delta(|K|^2) \geqslant -6|K|^3 + \frac{(\operatorname{grad}|K|^2)^2}{2|K|^2}. \tag{1}
$$

Доказательство. Для кэлеровой метрики g локально существует вещественная функция w такая, что $g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial^2 w/(\partial z^\alpha\,\partial\overline{z}^\beta)$. Для удобства обозначаем

$$
w_{\alpha\overline{\beta}} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^\alpha\,\partial\overline{z}^\beta}, \qquad w_{\alpha\overline{\beta}\gamma} = \frac{\partial^3 w}{\partial z^\alpha\,\partial\overline{z}^\beta\,\partial z^\gamma}, \qquad \ldots
$$

и т.д. Эти величины, за исключением первой, вообще говоря, не являются координатами тензоров.

Для координат тензора кривизны $K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}$ имеет место формула

$$
K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = w_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} - g^{\overline{\varepsilon}\tau} w_{\overline{\varepsilon}\alpha\gamma} w_{\tau\overline{\beta}\,\overline{\delta}}
$$

[5; гл. 9, § 5, (28)]. Отсюда следует симметрия $K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}$ по первому, третьему индексам α, γ и по второму, четвертому индексам $\overline{\beta}$, $\overline{\delta}$.

С учетом $\Gamma^\pi_{\gamma\alpha} = w_{\gamma\alpha\overline{\nu}} g^{\overline{\nu}\pi}$, $\partial g^{\alpha\overline{\beta}}/\partial z^\lambda = -\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} g^{\overline{\beta}\mu}$ вычислим ковариантную производную тензора кривизны:

$$
\begin{aligned}
K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\lambda} &= w_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}\lambda} - w_{\alpha\gamma\lambda\overline{\varepsilon}}\, w_{\overline{\beta}\,\overline{\delta}\tau} g^{\overline{\varepsilon}\tau} - w_{\alpha\gamma\overline{\varepsilon}}\, w_{\overline{\beta}\,\overline{\delta}\tau\lambda} g^{\overline{\varepsilon}\tau} + w_{\alpha\gamma\overline{\varepsilon}}\, w_{\overline{\beta}\,\overline{\delta}\tau} w_{\mu\overline{\nu}\lambda} g^{\overline{\nu}\tau} g^{\overline{\varepsilon}\mu} \\
&\quad - (w_{\pi\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} - w_{\pi\gamma\overline{\varepsilon}}\, w_{\overline{\beta}\,\overline{\delta}\tau} g^{\overline{\varepsilon}\tau})\Gamma^\pi_{\alpha\lambda} - (w_{\alpha\overline{\beta}\pi\overline{\delta}} - w_{\alpha\pi\overline{\varepsilon}}\, w_{\overline{\beta}\,\overline{\delta}\tau} g^{\overline{\varepsilon}\tau}) w_{\gamma\lambda\overline{\nu}} g^{\overline{\nu}\pi}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем симметричность по α, λ. Следовательно,

$$
K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\lambda} = K_{\lambda\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\alpha} = K_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\delta},\gamma} \tag{2}
$$

Так как $K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\overline{\mu}} = \overline{K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\mu}} = \overline{K_{\beta\overline{\alpha}\delta\overline{\gamma},\mu}}$, то имеется симметрия по $\overline{\beta}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\mu}$:

$$K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\overline{\mu}} = K_{\alpha\overline{\mu}\gamma\overline{\delta},\overline{\beta}} = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\mu},\overline{\delta}}. \tag{3}$$

Далее, вычисляя $\Delta(|K|^2) = g^{\lambda\overline{\varepsilon}}(K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}})_{,\lambda\overline{\varepsilon}}$, получаем

$$\Delta(|K|^2) = g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\lambda\overline{\varepsilon}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} + g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\lambda\overline{\varepsilon}} + K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A}. \tag{4}$$

Для первого слагаемого в правой части (4) с учетом (2), (3) и того, что координаты тензора Риччи $K_{\alpha\overline{\delta}} = K_{\gamma\overline{\omega}} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,&K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\lambda\overline{\varepsilon}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,K_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\delta},\gamma\overline{\varepsilon}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}\\
&= g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\big(K_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\delta},\overline{\varepsilon}\gamma} + K^{\cdot\,\cdot\,\omega\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\alpha}K_{\omega\overline{\beta}\lambda\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\beta}}K_{\alpha\overline{\nu}\lambda\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\cdot\,\omega\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\lambda}K_{\alpha\overline{\beta}\omega\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\delta}}K_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\nu}}\big)K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}\\
&= g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\big(K_{\alpha\overline{\varepsilon}\lambda\overline{\delta},\overline{\beta}\gamma} + K^{\cdot\,\cdot\,\omega\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\alpha}K_{\omega\overline{\beta}\lambda\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\beta}}K_{\alpha\overline{\nu}\lambda\overline{\delta}} + K_{\gamma\overline{\varepsilon}\overline{\omega}\lambda}K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\omega}\,\cdot}_{\alpha\overline{\beta}\,\cdot\,\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\gamma\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\delta}}K_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\nu}}\big)K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}\\
&= K_{\alpha\overline{\delta},\overline{\beta}\gamma}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\lambda\omega\,\cdot}_{\gamma\,\cdot\,\cdot\,\alpha}K^{\cdot\,\beta\,\cdot\,\delta}_{\omega\,\cdot\,\lambda\,\cdot}K^{\alpha\,\cdot\,\gamma\,\cdot}_{\cdot\,\beta\,\cdot\,\delta} + K^{\cdot\,\lambda\overline{\nu}\,\cdot}_{\gamma\,\cdot\,\cdot\,\overline{\beta}}K_{\alpha\overline{\nu}\lambda\overline{\delta}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}\\
&\qquad + K_{\gamma\overline{\omega}}K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\omega}\,\cdot}_{\alpha\overline{\beta}\,\cdot\,\overline{\delta}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} + K^{\cdot\,\lambda\overline{\nu}\,\cdot}_{\gamma\,\cdot\,\cdot\,\overline{\delta}}K_{\alpha\overline{\beta}\lambda\overline{\nu}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}\\
&= -2T_1 + T_2.
\end{aligned}$$

Аналогично, для второго слагаемого в правой части (4) получаем

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,&K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\lambda\overline{\varepsilon}} = g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\lambda,\delta\overline{\varepsilon}}\\
&= g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}\big(K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\lambda,\overline{\varepsilon}\delta} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\alpha}}K_{\overline{\nu}\beta\overline{\gamma}\lambda} + K^{\cdot\,\cdot\,\omega\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\beta}K_{\overline{\alpha}\omega\overline{\gamma}\lambda} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\gamma}}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\nu}\lambda} + K^{\cdot\,\cdot\,\omega\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\lambda}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\omega}\big)\\
&= g^{\lambda\overline{\varepsilon}}\,K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}\big(K_{\overline{\varepsilon}\beta\overline{\gamma}\lambda,\overline{\alpha}\delta} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\alpha}}K_{\overline{\nu}\beta\overline{\gamma}\lambda} + K^{\cdot\,\cdot\,\omega\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\beta}K_{\overline{\alpha}\omega\overline{\gamma}\lambda} + K^{\cdot\,\cdot\,\overline{\nu}\,\cdot}_{\delta\overline{\varepsilon}\,\cdot\,\overline{\gamma}}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\nu}\lambda} + K_{\delta\overline{\varepsilon}\overline{\omega}\lambda}K^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\overline{\omega}}_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\,\cdot}\big)\\
&= K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\beta\overline{\gamma},\overline{\alpha}\delta} + K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\delta\overline{\varepsilon}\nu\overline{\alpha}}K^{\nu\,\cdot\,\cdot\,\overline{\varepsilon}}_{\cdot\,\beta\overline{\gamma}\,\cdot} + K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\delta\overline{\varepsilon}\overline{\omega}\beta}K^{\cdot\,\overline{\omega}\,\cdot\,\overline{\varepsilon}}_{\overline{\alpha}\,\cdot\,\overline{\gamma}\,\cdot}\\
&\qquad + K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\delta\overline{\varepsilon}\nu\overline{\gamma}}K^{\cdot\,\cdot\,\nu\overline{\varepsilon}}_{\overline{\alpha}\beta\,\cdot\,\cdot} + K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\delta\overline{\omega}}K^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\overline{\omega}}_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\,\cdot}\\
&= -2T_1 + T_2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta(|K|^2) = -4T_1 + 2T_2 + K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A}. \tag{5}$$

Далее, используя $K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = -K_{\overline{\beta}\alpha\gamma\overline{\delta}} = -K_{\alpha\overline{\beta}\overline{\delta}\gamma}$ и переставляя α с ω, β с ν, γ с ρ, δ с ε, получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}^2(|K|^2) &= g^{\mu\overline{\lambda}}(|K|^2)_{\,,\,\mu}(|K|)^2_{\,,\,\overline{\lambda}}\\
&= g^{\mu\overline{\lambda}}(K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\mu}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} + K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}{}_{,\,\mu})(K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} + K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}}\,K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}}{}_{,\,\lambda})\\
&= (K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} + K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\overline{\lambda}})(K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} + K^{\overline{\omega}\nu\overline{\rho}\varepsilon}K_{\overline{\omega}\nu\overline{\rho}\varepsilon,\overline{\lambda}})\\
&= 2K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\overline{\lambda}}2K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} = 4K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}}K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}}K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}.
\end{aligned}$$

Введем тензор A с координатами

$$A_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta\overline{\lambda}\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} = K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}}K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} - K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
|A|^2 &= A_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta\overline{\lambda}\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} A^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta\overline{\lambda}\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} \\
&= (K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} - K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}})(K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}} - K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}) \\
&= 2|K|^2 K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} - 2K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} K_{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon}}\, K^{\omega\overline{\nu}\rho\overline{\varepsilon},\overline{\lambda}}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
2K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} = \frac{1}{|K|^2}\biggl(|A|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{grad}^2(|K|^2)\biggr). \tag{6}
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
&K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} = K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\lambda} K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\lambda}, \\
&K_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} K^{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta,\overline{\lambda}} = K_{\beta\overline{\alpha}\delta\overline{\gamma},\overline{\lambda}} K^{\beta\overline{\alpha}\delta\overline{\gamma},\overline{\lambda}} = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\overline{\lambda}} K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},\overline{\lambda}},
\end{aligned}
$$

то (6) можно переписать в виде

$$
K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A} K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A} = \frac{1}{|K|^2}\biggl(|A|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{grad}^2(|K|^2)\biggr).
$$

Подставляя в (5), получаем

$$
\Delta(|K|^2) = -4T_1 + 2T_2 + \frac{1}{|K|^2}\biggl(|A|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{grad}^2(|K|^2)\biggr). \tag{7}
$$

Теперь оценим $|T_1|$ через $|K|$. Следуя замечанию Бессе [6; гл. 2, § C], рассмотрим тензор кривизны как поле симметрических эндоморфизмов $\wedge^{1,1}M$. Они задаются симметричной матрицей $\mathcal{A}$ с элементами $\mathcal{A}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = K^{\alpha\overline{\beta}}{}_{..\gamma\overline{\delta}}$, где $\mathfrak{a} = (\alpha\overline{\beta})$, $\mathfrak{b} = (\gamma\overline{\delta})$. Тогда

$$
|K|^2 = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = K^{\alpha\overline{\beta}}{}_{..\gamma\overline{\delta}} K^{\gamma\overline{\delta}}{}_{..\alpha\overline{\beta}} = \mathcal{A}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} \mathcal{A}^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}} = \operatorname{Sp}\mathcal{A}^2.
$$

Аналогично, $T_1 = \operatorname{Sp}\mathcal{A}^3$. Отсюда легко получаем

$$
|T_1| \leqslant |K|^3. \tag{8}
$$

Чтобы оценить $|T_2|$, рассмотрим поле эндоморфизмов $\wedge^{2,0}M$ с матрицей

$$
\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}) = (K_{\alpha\,.\,\gamma\,.}^{\,.\,\beta\,.\,\delta}), \qquad \text{где} \quad \mathfrak{a} = (\beta\delta), \quad \mathfrak{b} = (\alpha\gamma).
$$

Тогда $T_2 = \operatorname{Sp}\mathcal{B}^3$. При этом

$$
\operatorname{Sp}\mathcal{B}^2 = K_{\alpha\,.\,\gamma\,.}^{\,.\,\beta\,.\,\delta} K_{\beta\,.\,\delta\,.}^{\,.\,\alpha\,.\,\gamma} = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} K^{\overline{\beta}\alpha\overline{\delta}\gamma} = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} = |K|^2.
$$

Отсюда получаем

$$
|T_2| \leqslant |K|^3. \tag{9}
$$

Из (7)–(9) с учетом $|A|^2 \geqslant 0$ получаем (1). Теорема 1 доказана.

Неравенство, аналогичное (1), с невычисленными явно коэффициентами и содержащее ковариантную производную тензора кривизны, имеется в [7; с. 334].

Получим еще одну оценку. Пусть $K_\sigma(x)$ – голоморфная секционная кривизна в точке $x \in M$ в направлении голоморфной 2-плоскости σ, т.е. 2-плоскости, инвариантной относительно комплексной структуры J. Обозначим

$$H(x) = \max_{\sigma=J(\sigma)} |K_\sigma(x)|,$$

где максимум берется по всем голоморфным 2-плоскостям в касательном пространстве T_xM.

Всякая форма типа $(1,1)$ из $\wedge^{1,1}M$ является J-инвариантной относительно комплексной структуры J. Так как имеется отождествление с помощью метрики g расслоений TM и TM^* (подъем и опускание индексов), то всякой форме типа $(1,1)$ из $\wedge^{1,1}M$ соответствует бивектор, определяющий J-инвариантную 2-плоскость σ. Значит, значение квадратичной формы с матрицей $\mathcal{A}$ можно отождествить с голоморфной секционной кривизной в направлении σ. Из экстремальных свойств квадратичной формы получаем

$$H(x) = \max_{\mathfrak{a}} |\lambda_{\mathfrak{a}}(x)|,$$

где $\lambda_{\mathfrak{a}}(x)$ – собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ в точке x.

Так как $|K|^2 = \operatorname{Sp}\mathcal{A}^2$ и $\mathfrak{a}$ принимает n^2 значений, то

$$\frac{|K|^2}{n^2} \leqslant H^2 \leqslant |K|^2. \tag{10}$$

3. Следствия из основных соотношений.

Теорема 2. *Многообразие Калаби–Яу является комплексным тором тогда и только тогда, когда для его метрики Калаби–Яу выполнено* $T_1 = T_2 = 0$.

Доказательство. Пусть на многообразии Калаби–Яу (M, g) метрика g является Риччи-плоской. Если $T_1 = T_2 = 0$, то из (5) получаем

$$\Delta(|K|^2) = K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A} K^{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A} \geqslant 0.$$

Отсюда в силу компактности многообразия M получаем, что функция $|K|^2$ является константой, следовательно, все ковариантные производные $K_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta},A} = 0$. Значит, M – локально симметрическое пространство, тогда его универсальная накрывающая является симметрическим пространством [6; теорема 10.72]. Риманово симметрическое пространство однородно [6; предложение 7.65]. Однородное Риччи-плоское многообразие является плоским [6; теорема 7.61]. Значит, M имеет плоскую метрику и по [8], [9] является комплексным тором. Теорема доказана.

Теперь применим теорему 1 для изучения поведения кривизн на Риччи-плоских кэлеровых многообразиях. Пусть M – Риччи-плоское кэлерово многообразие (не обязательно компактное). Пусть в некоторой области $D \subset M$ для функции f выполняется неравенство

$$\Delta f \leqslant -6f^{3/2} + \frac{\operatorname{grad}^2 f}{2f}\,. \tag{11}$$

Вычитая почленно из неравенства (11) неравенство (1), получаем

$$\Delta(f-|K|^2) \leqslant -6(f^{3/2}-|K|^3) + \frac{\operatorname{grad}^2 f}{2f} - \frac{\operatorname{grad}^2 |K|^2}{2|K|^2}\,.$$

Значит, функция $f-|K|^2$ не может в области D достигать положительного минимума. Действительно, в точке минимума $\operatorname{grad}(f-|K|^2)=0$; следовательно, $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}|K|^2$ и $\operatorname{grad}^2 f = \operatorname{grad}^2|K|^2$. Тогда из $f>|K|^2$, $f^{3/2}-|K|^3>0$ получаем, что в точке положительного минимума $\Delta(f-|K|^2)<0$. Противоречие с тем, что в точке минимума $\Delta(f-|K|^2)\geqslant 0$.

Теперь построим функции для сравнения.

Пусть $O\in M$, $r(x)$ – расстояние от точки O до точки x. Если x^i – вещественные координаты в окрестности точки x, то сужение $r_{,ij}$ на сферу с центром O будет второй квадратичной формой этой сферы. Из [10; п. 11.8] следует, что форма $r_{,ij}(x)$ положительно определенная, если шар $B(O,\delta)$ с центром в точке O радиуса $\delta=r(x)$ является строго локально выпуклым. В этом случае значение оператора Лапласа–Бельтрами от $r(x)$ будет положительным, значит, $\Delta r(x)>0$.

Пусть $y(t)$ – решение дифференциального неравенства

$$y'' \leqslant -24y^{3/2} + \frac{{y'}^2}{2y}\,, \tag{12}$$

для $t\geqslant 0$, которое удовлетворяет условиям

$$y(0)=c_0>0, \qquad y'(0)=0, \qquad y'(t)\leqslant 0. \tag{13}$$

Тогда для функции $f(x)=y(r(x))$ получаем

$$\operatorname{grad}^2 f = g^{\alpha\overline{\beta}} f_{,\alpha} f_{,\overline{\beta}} = g^{\alpha\overline{\beta}} y' r_{,\alpha} y' r_{,\overline{\beta}} = \frac{1}{4}\,{y'}^2.$$

Поэтому

$$\Delta f = \frac{1}{4}\,y'' + y'\Delta r \leqslant \frac{1}{4}\,y'' \leqslant -6f^{3/2} + \frac{\operatorname{grad}^2 f}{2f}$$

при условии, что рассматриваемая точка лежит в строго локально выпуклом шаре $B(O,\delta)$. Из [10; гл. 11, теорема 13] следует, что шар $B(O,\delta)$ будет строго локально выпуклым при $\delta\leqslant(\pi/2)(\max_{x,\sigma}K(\sigma))^{-1/2}$, если $\max_{x,\sigma}K(\sigma)>0$ и при любом δ в противном случае. Здесь $K(\sigma)$ – секционная кривизна в точке x в двумерном направлении $\sigma\in T_xM$, максимум берется по всем точкам $x\in B(O,\delta)$ и всем двумерным плоскостям σ (не обязательно голоморфным).

Построенная функция f в точке O, вообще говоря, не будет иметь класс C^2. Поэтому неравенство (11) для нее нужно рассматривать в обобщенном смысле, как в работе [11].

Оценим $K(\sigma)$ через $H(x)$. Из [5; примечание 23] получаем

$$K(\sigma) = \frac{1}{32}\bigl[3Q(X+JY)+3Q(X-JY)-Q(X+Y)-Q(X-Y)-4Q(X)-4Q(Y)\bigr],$$

где X, Y – ортонормированный базис 2-плоскости σ, $Q(Z)=K_{\sigma(Z,JZ)}|Z|^4$, $\sigma(Z,JZ)$ – голоморфная 2-плоскость, натянутая на векторы Z, JZ. Тогда

$$\begin{aligned} K(\sigma) \leqslant \frac{1}{32}\bigl[&3H(x)|X+JY|^4 + 3H(x)|X-JY|^4 \\ &+ H(x)|X+Y|^4 + H(x)|X-Y|^4 + 4H(x)|X|^4 + 4H(x)|Y|^4\bigr]. \end{aligned}$$

Так как базис X, Y ортонормированный, то $|X+Y| = |X-Y| = \sqrt{2}$. Максимум в правой части последнего неравенства достигается при $|X+JY| = |X-JY| = \sqrt{2}$. Поэтому

$$\max_{x,\sigma} K(\sigma) \leqslant \frac{5}{4} \max_{x} H(x).$$

Если O – точка локального максимума функции $|K|$, а $c_0 > |K|^2(O)$, то из (10) радиус шара $B(O,\delta)$ может быть любым числом, не превосходящим $2\pi/(5c_0^{1/2})$.

Наиболее простой функцией, удовлетворяющей (12) является

$$y(t) = c_0 - c_1 t^2, \qquad c_1 \geqslant 12 c_0^{3/2}.$$

Наилучшей же функцией будет решение дифференциального уравнения

$$y'' = -24 y^{3/2} + \frac{{y'}^2}{2y}$$

для $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/5c_0^{1/2}$ с начальными условиями

$$y(0) = c_0 > 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Легко проверить, что здесь $y'(t) < 0$ при $t > 0$.

Таким образом, функция $|K|^2$ в шаре $B(O,\delta)$, $\delta \leqslant 2\pi/(5c_0^{1/2})$ не может убывать быстрее функции $f(x) = y(r(x))$, где $y(t)$ – решение неравенства (12). То есть функция $|K|^2$ не может иметь больших “всплесков”.

Для функции $H(x)$ имеет место следующая

Теорема 3. *Не существует такого шара $B(O,\delta)$ с центром в точке $O \in M$ радиуса $\delta \leqslant 2\pi/(5\sqrt{H(O)}\,)$, что для всех внутренних точек $x \in B(O,\delta)$ выполняется $H^2(x) < f(x)$, а для всех граничных точек $y \in \partial B(O,\delta)$*

$$f(O) - H^2(O) \leqslant f(y) - n^2 H^2(y).$$

Доказательство. Если такой шар найдется, то он будет строго локально выпуклым. Тогда из (10) получаем

$$f(O) - |K|^2(O) \leqslant f(y) - |K|^2(y).$$

Значит, функция $f - |K|^2$ достигает положительного минимума внутри шара $B(O,\delta)$, что противоречит предыдущим утверждениям.

Таким образом, функция $H(x)$ также не может иметь слишком больших “всплесков”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Н. Кокарев, “О кривизне Риччи-плоских кэлеровых многообразий”, *Международная научная конференция “Современная геометрия и ее приложения”*, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2017, 73–75.

[2] S. T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampére equation I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.

[3] E. Calabi, “Improper affine hyperspheres of convex type and generalization of a theorem by K. Jörgens”, *Michigan Math. J.*, **5** (1958), 105–126.

[4] R. S. Hamilton, “Three manifolds with positive Ricci curvature”, *J. Differential Geom.*, **17**:2 (1982), 255–306.

[5] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 2, Наука, М., 1981.

[6] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Т. I, II, Мир, М., 1990.

[7] S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, “On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth”, *Invent. Math.*, **97**:2 (1989), 313–349.

[8] L. Bieberbach, “Über die Bewegungsgruppen des Euklidischen Räume”, *Math. Ann.*, **70**:3 (1911), 297–336.

[9] L. Bieberbach, “Über die Bewegungsgruppen des Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich”, *Math. Ann.*, **72**:3 (1912), 400–412.

[10] Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967.

[11] E. Calabi, “An extension of E. Hopf’s maximum principle with an application to Riemannian geometry”, *Duke Math. J.*, **25** (1958), 45–56.

В. Н. Кокарев
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
E-mail: ko1949@yandex.ru

Поступило
19.03.2018
После доработки
11.07.2018
Принято к публикации
27.06.2018