Современная математика и ее приложения. Том 88 (2013). С. 20–29

УДК 517.925

ФИНСЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА, БИНГЛЫ, ПОЛИИНГЛЫ И ИХ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ

© 2013 г. **Р. Р. АЙДАГУЛОВ, М. В. ШАМОЛИН**

В [4] дано определение бинглов и тринглов в пространстве H_3. Определение базируется на важном принципе аддитивности. Однако сам принцип аддитивности применим только при некотором условии «компланарности». Соответственно, исходя только из этого принципа, нельзя сравнивать бинглы (тринглы и т.д.) между несравнимыми углами, т.е. остаётся возможность выбора недостающего коэффициента пропорциональности разным для разных направлений, сохраняя выполнение принципа аддитивности.

Для определения бинглов, принятого в [4], имеет место странное свойство: для любых двух векторов a, b из одного октанта, существуют такие векторы c из того же октанта, что бинглы между a, c и c, b равны нулю. Было бы желательным для определения бинглов также выполнение следующего свойства: если бингл между a, b равен нулю, то эти векторы пропорциональны. В таком случае исключается выполнение странного свойства для любых не пропорциональных векторов. Соблюдая принцип аддитивности, можно определить бинглы так, чтобы выполнялись более сильные свойства метричности:

1) $\varphi(a,b) \geqslant 0$;
2) $\varphi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$;
3) $\varphi(a,b) \leqslant \varphi(a,c) + \varphi(c,b)$.

Начнём рассмотрение принципа аддитивности с самого общего случая. Пусть задано гладкое многообразие X. Изучение категорий гладких многообразий можно отнести к дифференциальной топологии. Геометрия начинается, когда мы вводим способ вычисления длин, площадей, объёмов и т.д., как аддитивных функционалов на одномерных, двумерных, трёхмерных и т.д., подмногообразиях многообразия X.

Рассмотрим вначале одномерный случай (длины). Пусть задана гладкая кривая

$$x(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

на многообразии X. Тогда аддитивность длины означает, что

$$L(x(\tau)) = L(x_1(\tau)) + L(x_2(\tau)), \tag{1}$$

когда кривая

$$x(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$$

является суммой этих кривых. Последнее означает, что для некоторого числа $0 < \theta < 1$ выполняется

$$x(\tau) = x_1\left(\frac{\tau}{\theta}\right),\ 0 \leqslant \tau \leqslant \theta, \quad x(\tau) = x_2\left(\frac{\tau-\theta}{1-\theta}\right),\ \theta \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Естественно, что длина кривой не должна зависеть от её параметризации. Из этих двух требований получается, что

$$L(x(\tau)) = \int\limits_0^1 ds, \quad ds = g(x, dx), \quad g(x, a\,dx) = a\,g(x, dx),\ a > 0. \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00020-а).

ISSN 1512–1712 © Национальная Академия Наук Грузии, 2013

В финслеровой геометрии требуется также возможность выразить скорости (векторы единичной длины касательного пространства) через импульсы (касательные гиперплоскости к единичной сфере), являющиеся элементами кокасательного расслоения, и обратно. Соответствующие функции от скоростей становятся функциями от импульсов, при этом последние связаны преобразованиями Лежандра, являющимися тропическими аналогами преобразований Фурье.

Как известно, преобразования Лежандра [1] сопоставляют функции от переменной x функцию от другой переменной p по следующему правилу:

$$f^*(p) = \max_x (px - f(x)). \tag{3}$$

Так как максимум в последнем выражении достигается именно в точке x, где касательная гиперплоскость к функции $f(x)$ перпендикулярна вектору p, то преобразование Лежандра можно интерпретировать как переход к тангенциальным переменным. Обратное преобразование определяется по той же формуле, меняя роли переменных x и p. Конечно, здесь переменные x и p могут быть и многомерными, тогда переменная p — из сопряжённого пространства и

$$px = \sum_i p_i x^i.$$

Возможно даже рассмотрение, когда p, x — элементы из функциональных пространств, соответственно, в качестве функций выступают функционалы. В классической механике, как известно, этими преобразованиями связаны функции Лагранжа, выражаемые через скорости, и функции Гамильтона, выражаемые через импульсы. Однако там используются в основном кинетические энергии, квадратичные от скоростей, при этом переход от функции Лагранжа к функции Гамильтона осуществляется сравнительно просто, даже без знания того, что это есть преобразование Лежандра. В чистой же математике они используются, в частности, для получения разного рода неравенств. Так, если величины $f(x)$ и $f^*(p)$ связаны преобразованиями Лежандра, то имеет место неравенство

$$\sum_i p_i x^i \leqslant f(x) + f^*(p)$$

при любых x, p. Например, если (финслерова) метрика задана как

$$f(x) = \frac{\sum_i x_i^a}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(здесь для простоты записи индекс i опустим), то соответствующая метрика в сопряжённом пространстве задаётся как

$$f^*(p) = \frac{\sum_i p_i^b}{b}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \ b \in \mathbb{R},$$

и для любых вектора x и ковектора p имеет место соответствующее неравенство.

Сама возможность таких преобразований туда и обратно требует, чтобы функция была выпуклой или вогнутой. Для того, чтобы при этом ещё совпадали размерности области изменения соответствующих переменных для гладких функций, необходима и достаточна строгая выпуклость или строгая вогнутость.

Тропическая математика базируется на замене операции умножения сложением и замене операции сложения бинарной операцией $\min(a, b)$ или $\max(a, b)$, при этом дистрибутивность не нарушается. Хотя эта необычная математика ничего нового не дала для обычной математики, тем не менее, она заслуживает внимания, в связи с новыми ракурсами взгляда на обычные вещи. Например, спектральное разложение Фурье в тропической математике сводится к преобразованию Лежандра.

Вполне может оказаться, что именно в финслеровой геометрии она может дать новые результаты. Первый случай (выпуклости метрики) реализуется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство треугольника:

$$g(x, a + b) \leqslant g(x, a) + g(x, b), \tag{4}$$

и строгое равенство выполняется только в случае параллельности векторов a, b. И теперь становится понятным: для того, чтобы длина определяла метрику, необходимо ещё добавить условие положительности функции $g(x,a)$ для любых ненулевых векторов a. Тогда финслерова геометрия станет соответствующим обобщением евклидовой геометрии.

Второй случай реализуется тогда и только тогда, когда выполняется обратное неравенство к неравенству треугольника для любых двух измеримых векторов из одной компоненты связности:

$$g(x,a+b) \geqslant g(x,a) + g(x,b), \tag{5}$$

и строгое равенство выполнено только для параллельных векторов с ненулевыми длинами. Именно второй случай является финслеровым обобщением пространства Минковского и представляет больший интерес со стороны физики.

Заметим, что неравенство (5) не может выполняться для всех векторов. Поэтому в каждой точке x определяется множество допустимых векторов, в дальнейшем называемых измеримыми.

На множество измеримых векторов накладываются следующие требования.

1) Если векторы a и b измеримы, то и для любых положительных чисел x и y вектор $xa+yb$ также измерим.
2) Множество измеримых векторов имеет максимальную размерность, т.е. существует базис векторов, состоящих только из измеримых векторов.

Из первого условия, в частности, следует, что множество измеримых векторов образует выпуклый конус. В неравенстве (5) приходится дополнительно оговаривать, что строгое равенство невозможно в случае непараллельных измеримых векторов ненулевой длины (соответственно, из внутренней области измеримых векторов). Или считать граничные векторы с нулевой длиной неизмеримыми или параллельными ко всем измеримым (расширяя тем самым понятие параллельности).

Интересно также заметить, что при финслеровом обобщении не получаются обобщения других псевдоевклидовых метрик с другими сигнатурами. В этом случае можно считать, что измеримость определена только для «положительных» векторов, ограничившись одной компонентой связности, где определено измерение, и назвать их времениподобными векторами. Соответственно длины определены только в случае времениподобных мировых линий.

Выполнение условий (4) или (5) необходимо также для существования и единственности геодезической, исходящей из заданной точки в заданном измеримом направлении. При этом в первом случае на геодезических достигается минимум, а во втором случае — максимум.

В качестве примера рассмотрим метрики, ассоциированные с гиперкомплексными числами H_n. Под такими метриками мы подразумеваем метрики, сохраняющиеся при автоморфизмах алгебры чисел H_n, совпадающей с симметрической группой S_n. Сюда относятся метрики, заданные симметричными многочленами k-го порядка от n переменных. Оказывается, что все невырожденные метрики такого рода относятся к первому случаю, где выполняется неравенство треугольника, или ко второму случаю, когда выполняется свойство (5). В общем случае доказать это сложно, поскольку требуется использовать постепенные повороты бингла между a и b.

Проверим последнее для случая метрики Бервальда—Моора. В этом случае измеримые векторы — это n положительных чисел, и неравенство (5) эквивалентно известному неравенству Минковского [2]:

$$\left(\prod_i (a_i+b_i)\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_i a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_i b_i\right)^{1/n}.$$

Известно также неравенство для симметричной метрики

$$|a| = \left(\sum_i |a_i|^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

а именно,

$$(1-\alpha)\big[(a+b)-|a|-|b|\big] \geqslant 0,$$

и равенство (для положительных векторов) только в случае пропорциональности (параллельности) векторов. При этом при переходе с евклидовой финслеровой геометрии ($\alpha > 1$) к геометрии типа Минковского ($\alpha < 1$) неравенство треугольника переходит в обратное, но только при ограничении на векторы с положительными компонентами, а точнее, когда

$$a_i b_i \geqslant 0 \ \forall i.$$

Если метрику сократить на постоянный множитель $n^{1/\alpha}$ и устремить α к нулю, то как раз получится метрика Бервальда—Моора как частный случай такой метрики при $\alpha = 0$. К сожалению, в уже вышедшей монографии по финслеровой геометрии [3] отсутствует выделение двух специальных типов финслеровых пространств, упомянутых выше, и соответствующих им неравенств треугольника (4), (5). В первом случае сигнатура метрики (определяемая даже для не квадратичных метрик) определяется n плюсами, во втором — одним плюсом и $n-1$ минусами.

Для демонстрации того, что другие сигнатуры неприемлемы, рассмотрим простейшую псевдоевклидову метрику с другой сигнатурой:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2.$$

Индикатриса этой метрики — однополостный гиперболоид — не выпуклая и не вогнутая поверхность. Вычислим координаты сопряжённого пространства, согласно [3]:

$$p_1 = \frac{dx_1}{ds}, \quad p_2 = \frac{dx_2}{ds}, \quad p_3 = -\frac{dx_3}{ds}, \quad ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2}. \tag{6}$$

Легко проверить, что между координатами имеется единственная функциональная зависимость

$$p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 1,$$

и это пространство полностью соответствует определению финслерова пространства согласно [3]. Однако в таком пространстве не определены геодезические. От точки с координатами $(0,0,0)$ до точки с координатами (x_1, x_2, x_3) можно добираться многими способами, даже не выходя за пределы вертикальной плоскости, содержащей начальную и конечную точку, при этом длина кривой может быть равна нулю. Т.е. данное пространство не является финслеровым евклидова типа.

Легко также проверяется также, что существуют пути сколь угодно длинные, т.е. пространство не является финслеровым пространством типа Минковского.

На самом деле это относится ко всем псевдоевклидовым геометриям с сигнатурами, отличными от евклидова пространства и пространства Минковского. Интересно, что в курсах геометрии и физики не упоминается этот элементарный факт непригодности геометрий других сигнатур для определения геодезических из вариационного принципа. Таким образом, вариационный метод определения расстояний, базирующийся на аддитивном принципе (определение минимума или максимума некоторого интеграла, взятого по кривой, соединяющей две точки), приводит к выпуклости или вогнутости индикатрисы. Условие единственности геодезической требует строгой выпуклости или вогнутости, что может быть задано неравенствами треугольника (4), (5) с условиями равенства только для параллельных векторов. К тому же, для (дважды) гладких индикатрис эти условия обеспечивают также выполнение требований совпадения размерности тангенциальных переменных на сфере размерности $n-1$.

В школе Д. Г. Павлова концентрируются на изучении коммутативных поличисловых финслеровых геометрий. При этом все коммутативные поличисла являются прямыми суммами некоторого количества действительных чисел и некоторого количества комплексных чисел. Покажем, что если комплексные числа входят в поличисла как собственная подалгебра, то в поличислах не может быть определена ни финслерова геометрия евклидового типа, ни геометрия типа Минковского.

Рассмотрим в сумме $\mathbb{R}+\mathbb{C}$ два вектора. Пусть ненулевой вектор $a = (1, a_2+ia_3)$ измерим. Тогда вектор $b = (b_1, a_2 + ia_3)$ также будет измеримым ненулевым вектором, когда b_1 мало отличается от 1. Соответственно, при любом положительном t вектор

$$a + tb = (t + 1)a + (b_1 - 1, 0 + i0)$$

также измерим и имеет длину

$$l(t) = \sqrt[3]{(1 + tb_1)(t + 1)^2 \left(a_2^2 + a_3^2\right)}.$$

Учтём также, что

$$|a| = \sqrt[3]{a_2^2 + a_3^2}, \quad |b| = c|a|, \quad c = \sqrt[3]{b_1}.$$

Тогда при больших t имеем:

$$l(t) = t|b| + \frac{1 + 2c^3}{3c^3}|a| + \underline{O}\left(\frac{1}{t}\right),$$

а при малых t

$$l(t) = |a| + \frac{2 + c^3}{3c}|b| + \underline{O}(t).$$

Отсюда видно, что если $c < 1$, то при больших t выполняется неравенство треугольника, а при малых t — антинеравество треугольника. При $c > 1$ дело обстоит наоборот.

Несложно показать, что последнее свойство имеет место для любой алгебры коммутативных поличисел, содержащей комплексные числа как собственную подалгебру.

Таким образом, финслерова геометрия типа Минковского реализуется только на прямой сумме нескольких (конечно, больше одной) алгебр действительных чисел, а евклидова типа — на неразложимых алгебрах без делителей нуля действительных чисел, комплексных чисел и в случае некоммутативности на алгебре кватернионов. Сразу же заметим, что в данном случае неассоциативные алгебры не рассматриваются.

Подытожим обсуждение финслеровых пространств, указывая на новую терминологию: метрическим финслеровым пространством называется гладкое многообразие, на котором определена длина кривой по формуле (2), имеющая всегда положительное значение. При этом метрическая функция $g(x, a)$ равна нулю только при $a = 0$ и удовлетворяет неравенству треугольника (4), с равенством только лишь для параллельных векторов (поскольку из однородности следует равенство

$$g(x, a + b) = g(x, a) + g(x, b)$$

при $b = ra$, $r > 0$).

Пространством Финслера—Минковского называется гладкое многообразие, где определена длина кривой по формуле (2). При этом метрическая функция удовлетворяет «антинеравенству» треугольника (5), с равенством только для векторов положительной длины a, b, отличающихся на положительный множитель. Именно эти пространства важны с точки зрения физики.

Рассмотрим теперь общее финслерово пространство, выделим одну координату вектора a_0 и обозначим отношение других координат к этой координате как

$$v_i = \frac{a_i}{a_0}, \ i = 1, \ldots, n - 1.$$

Тогда из (2) получаем разложение:

$$g(x, a) = c(x)a_0 + c_1(x)v_1 + \cdots + c_{n-1}(x)v_{n-1} + f(x, v). \tag{7}$$

Переходя к собственному времени

$$dt = c(x)dx_0 + \sum_i c_i(x)dx_i,$$

избавляемся от компонент скорости в разложении первого порядка. Далее, считая, что гессиан невырожден, мы однозначно выделим пространственные координаты так, что в первом случае метрика будет иметь вид

$$g(x, dx) = dt\left(1 + \frac{v^2}{2} + \underline{O}\left(v^3\right)\right), \tag{8}$$

а во втором случае — вид

$$g(x, dx) = dt\left(1 - \frac{v^2}{2} + \underline{O}\left(v^3\right)\right). \tag{9}$$

Других сигнатур не может появиться из-за выполнения условий (4) или (5). Все другие координаты, которые приводят метрику к такому же виду, связаны с поворотами в первом случае и лоренцевыми поворотами во втором случае.

Изометрии с точностью до третьего порядка всегда существуют. Более точные изометрии, вообще говоря, становятся анизотропными и возможно нелинейными, а могут и вообще отсутствовать, за исключением тождественного. Соотношения (8), (9) получаются локально около любого направления, заданного вектором единичной длины, а, только в отличие от квадратичной метрики, надо иметь в виду, что координаты гиперплоскости

$$\sum_i p_i da_i = 0$$

не соответствуют координатам вектора a. Например, для метрики ранга k координаты гиперплоскости определяются как многочлены степени $k-1$ от координат вектора

$$p_i = g_{j_1 \dots j_{k-1} i} a^{j_1} \dots a^{j_{k-1}}$$

(как всегда по повторяющимся индексам снизу и сверху подразумевается суммирование).

Понятие локальности здесь существенно отличается от традиционного, которое подразумевает рассмотрение вблизи некоторой точки. Здесь все векторы выходят из одной точки, и локальность относится к рассматриваемому множеству векторов с направлениями вблизи от заданного направления a. Именно поэтому финслерова геометрия имеет бесконечную степень свободы в каждой точке. Соответственно, такая геометрия может служить мостом к объединению общей теории относительности (ОТО) с квантовой механикой.

Нормировка евклидовой метрики на касательном пространстве сферы в условиях (8), (9) определяется нормировкой, наследуемой от финслерова пространства, что длина вектора a равна 1. Это позволяет определить длину кривой на сфере. При этом в метрическом случае длина определяется по формуле

$$dr^2 = g^2(x, dx) - dt^2, \quad |dx| \ll dt,$$

и геодезические совпадают с геодезическими, определяемыми по индуцированной метрике. В финслеровых пространствах типа Минковского получается следующее:

$$dr^2 = dt^2 - g^2(x, dx), \quad dt = 1,\ |dx| \ll 1,$$

и геодезические на сфере будут определяться через минимум такого нового функционала на сфере, ставшей римановым пространством. Здесь первый аргумент — константа (точка не меняется), а сфера определяется концом векторов направлений dx.

Рассмотрим теперь понятие k-мерных объёмов для k-мерных подмногообразий X. Тогда параметры, задающие поверхность, можно считать пробегающими симплекс

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k = 1, \quad \tau_i \geqslant 0.$$

Если вершины симплекса обозначить через $A_0, A_1, \dots, A_k$ и взять некоторую точку O из симплекса, то условие аддитивности можно записать в виде

$$V_k(A_0, A_1, \dots, A_k) = \sum_{i=0}^{k} V_k(\dots, A_{i-1}, O, A_{i+1}, \dots). \tag{10}$$

Слева вычисляется сумма k-мерных объёмов разбиений симплекса, когда i-я вершина заменяется на точку O. Используя также естественное условие независимости k-мерных объёмов от параметризации, получим, что k-мерные объёмы вычисляются как интегралы

$$V_k = \int dv_k, \quad dv_k = g(x, J_k) d\tau_1 \wedge d\tau_2 \cdots \wedge d\tau_k. \tag{11}$$

Здесь J_k — множество k-мерных миноров $\partial x_i / \partial \tau_j$, относительно которых g_k является однородной функцией первой степени (как и в случае $k = 1$).

В римановой геометрии задание длин для кривых автоматически определяет и меры для площадей, объёмов и т.д. В данной работе ограничимся рассмотрением только двумерного случая (площади). Объёмы в высших размерностях определяются аналогично.

Площадь, как известно, есть сумма модулей значений некоторой билинейной кососимметрической формы на элементарных парах векторов. Все кососимметрические формы от n векторов в n-мерном пространстве определяются с точностью до постоянного множителя. В римановом случае этот коэффициент выбирается так, чтобы для ортонормированного базиса площадь становилась равной 1. Но в этом случае, уже в пространстве Минковского, возникают проблемы. Вектор, ортогональный другому вектору с концами на сфере, может оказаться не измеримым. Мало того, например, все векторы, ортогональные вектору времени $(1, 0, 0, 0)$, не измеримы. Измеряя векторы, касательные к индикатрисе, с помощью изометрии, согласно [4], приводим к измерению именно длин таких не измеримых векторов. В этом смысле, при подсчёте бингла мы скорее считаем площадь сектора единичной сферы между векторами a и b, а не длину дуги геодезической на сфере, соединяющей их.

Заметим, что при подсчёте углов (бинглов, тринглов, и т.д.) между векторами, находящимися в одной точке, мы можем считать, что имеем дело с плоским финслеровым пространством, когда метрика инвариантна относительно трансляций. При этом единичная сфера имеет только условный характер, так как мы не считаем индуцированные расстояния на сфере с рассматриваемого финслерова пространства, а считаем углы поворота между векторами в одной точке.

Начнём с рассмотрения бинглов. Как уже упоминалось ранее, мы можем считать, что финслерово пространство плоское. При этом сфера определяется из условий

$$g^2(x, dx) = f(y) = 1, \quad y = dx.$$

Соответственно, направление dx становится положением точки на сфере y, и на сфере вышеизложенным образом определяется риманова метрика. Для точного описания этой метрики вблизи направления вектора a длины 1 введём ковектор, определяющий касательную гиперповерхность в точке a:

$$p = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y^i} \right) \bigg|_{y=a}.$$

Касательные векторы z к сфере в точке a аннулируются этим ковектором:

$$p_i z^i = 0.$$

ddd

Перейдём к системе координат, где вектор y представляется в виде суммы

$$y = at + z^i e_i,$$

где e_i — касательные к сфере векторы (в количестве $n - 1$ штук). Разлагая функцию $f(y)$ в ряд до второго порядка включительно, получаем:

$$1 = f(y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^i z^j} dz^i dz^j.$$

Это определяет риманову метрику на сфере в локальных координатах:

$$dr^2 = g_{ij} dz^i dz^j, \; g_{ij}(a) = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^i z^j}.$$

В последнем выражении берётся знак «плюс» в метрическом финслеровом случае, и знак «минус» — в случае пространств Финслера—Минковского. Таким образом, метрика на сфере, необходимая для определения углов (бинглов, тринглов, и т.д.), — всегда положительно определённая риманова метрика.

С помощью бинглов можно ввести новые координаты на сфере. Делая ту же процедуру на сфере или псевдосфере, мы получаем локальные изоморфизмы между ними

$$A : \mathbf{S}_\Phi \to \mathbf{S}_*,$$

где $\mathbf{S}_\Phi$ — сфера направлений финслерова пространства, $\mathbf{S}_*$ — $n-1$-мерная сфера (для метрического финслерова пространства) или псевдосфера (для пространств Финслера—Минковского).

Любая изометрия финслерова пространства (можно говорить только об изометрии направлений в заданной точке) изометрично преобразует сферу. Поэтому при таком преобразовании сохранятся все углы (бинглы, тринглы, и т.д.). При масштабировании метрики они также не меняются по их определению.

Обозначим через G_k группу преобразований, сохраняющих k-инглы. Тогда для преобразований F, порождаемых малыми перемещениями, получаем локальное преобразование сферы или псевдосферы AFA^{-1}, сохраняющее $k-1$-мерные площади. Поэтому в случае $k < n$ это совпадёт с группой движений сферы в метрическом случае или псевдосферы (т.е. с группой Лоренца) в случае пространств Финслера—Минковского.

Для n-инглов, когда измеряются $n-1$-мерные объёмы в $n-1$-мерной сфере (псевдосфере), эта группа существенно шире. Последнее происходит, поскольку любое бездивергентное поле на такой сфере создаёт преобразование, сохраняющее такие объёмы. Соответственно, оно бесконечномерное. Дополнительно можно использовать ещё преобразования масштабирования, преобразующие каждый вектор a в $c(a)a$ (умножение на положительный множитель, зависящий от самого вектора). Тем не менее, среди них может не оказаться линейных преобразований, сохраняющих бинглы, тринглы, и т.д., кроме тождественного преобразования.

Есть ещё один способ определения тринглов и высших инглов в произвольных финслеровых пространствах. Для этого надо разложить величину $g^k(x, dx)$ до k-ой степени включительно и получить форму k-ой степени от перемещений в касательном пространстве. Считать k-мерные объёмы секторов с помощью такой метрики k-го ранга. За счёт того, что при изометрии совпадут все степени разложения, такие k-инглы также будут конформно инвариантными. Они также обладают свойством аддитивности. При этом одноинглы определяются линейными разложениями и совпадают с длинами векторов.

Бинглы, как и ранее, определяются квадратичной формой на касательных к сфере векторов, а, точнее, пропорциональны им с точностью до некоторой постоянной. Однако группа изометрий для высших k-инглов может оказаться меньше, чем для предшествующего определения, основанного на римановой метрике на сфере.

Рассмотрим теперь конкретную метрику пространства Бервальда—Моора, являющегося пространством Финслера—Минковского. В этом случае умножение на гиперкомплексные числа с нормой 1 является изометрией. Соответственно, сфера является коммутативной группой Ли размерности $n-1$. В соответствии с построением метрика инвариантна относительно действия этой группы. Для метрики, задаваемой метрическим тензором ранга k, получается следующее:

$$f(y) = \left(1 + k(a, a, \ldots, dy) + \frac{k(k-1)}{2}(a, a, \ldots, dy, dy)\right)^{2/k} + \underline{O}\left(dy^3\right) =$$
$$= 1 + 2(a, a, \ldots, dy) + (k-1)(a, a, \ldots, dy, dy) + (2-k)(a, a, \ldots, dy)^2 + \underline{O}\left(dy^3\right).$$

Отсюда видно, что риманова метрика для такого пространства Финслера—Минковского имеет вид

$$dr^2 = g_{ij} dz^i dz^j = -(k-1)(a, a, \ldots, e_i, e_j). \tag{12}$$

Здесь e_i — базисные векторы в касательном пространстве к сфере в точке a.

Заметим, что если начальная метрика была квадратичной ($k = 2$), то она совпадала с соответствующей индуцированной метрикой на касательное пространство с точностью до знака и не зависела от точки a. Считая далее, что $k = n$ (n — размерность пространства) и, используя метрику Бервальда—Моора, получаем инвариантность рассматриваемой метрики.

Найдём координаты ортонормированной системы касательных векторов в точке $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. С точностью до множителя можно взять

$$e_i = c[(1, 1, \ldots, 1) + d(1, 0, \ldots, 0) + r(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)].$$

Из ортогональности системы векторов получаем:

$$d = \pm\sqrt{n-1}, \quad r = -n - d, \quad c = \sqrt{\frac{n}{n^2 + n - 2 + 2nd}}.$$

Тогда для нахождения бингла между двумя положительными векторами a и b, приведёнными к одинаковой норме, достаточно представить их в виде

$$b = a\exp(c), \quad c = \left(\ln\frac{b_1}{a_1},\ \ln\frac{b_2}{a_2},\ \ldots,\ \ln\frac{b_n}{a_n}\right),$$

и вычислить евклидову длину c как квадратный корень суммы квадратов координат в ортонормированном базисе e_i.

Аналогично вычисляются тринглы как площади треугольников в логарифмических координатах и полиинглы как соответствующие объёмы в этом пространстве логарифмов. Группа симметрий бинглов и т.д. без учёта масштабирования совпадает с группой Лоренца. Для n-инглов группа симметрий бесконечномерна, как и выше [5–27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
2. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. — М.: УРСС, 2007.
3. *Гарасько Г. И.* Начала Финслеровой геометрии для физиков. — М.: Тет-ру, 2009.
4. *Павлов Д. Г., Кокарев С. С.* Полиуглы и их симметрии// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2009. № 11.
5. *Anastasiei M., Miron R.* Preface for generalized Finsler metrics// Finsler Geom.: J. Summer Res. Conf., Seattle, Wash., July 16–20, 1995. — Providence (R. I.), 1996. — С. 157–159.
6. *Aringazin A. K., Asanov G. S.* Problems of finslerian theory of gauge fields and gravitation// Reports on Mathematical Physics. Warshava. — 1988. — *25*. — С. 183–241.
7. *Binh T. Q.* Cartan type connections and connection sequences// Publ. Math. — 1985. — *35*, № 3–4. — С. 221–229.
8. *Grey A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants// Annals Math., Pure and Appl. — 1980. — *123*, № 4. — С. 35–58.
9. *Hashiguchi M.* On generalized Finsler spaces// An. Sti. Univ. Iasi. Sec. la. — 1984. — *30*, № 1, — С. 69–73.
10. *Hashiguchi M.* Some topics on Finsler geometry// Conf. Semin. Mat. Univ. Bari. — 1986. — *210*.
11. *Ikeda S.* On the Finslerian metrical structures of the gravitational field// An. Sti. Univ. Iasi. Sec. 1a. — 1984. — *30*, № 4. — С. 35–38.
12. *Ikeda S.* Theory of Fields in Finsler Spaces// Semin. Mec. Univ. Timisoara. — 1988. — № 8. — С. 1–43.
13. *Ikeda S.* On the theory of gravitational field in Finsler spaces// Tensor. — 1991. — *50*, № 3. — С. 256–262.
14. *Kikuchi S.* On metrical Finsler connections of generalized Finsler spaces// Proc. 5th Nat. Semin. Finsler and Lagrange Spaces in honour 60th birth day Prof. Doct. Radu Miron, Brasov, 10–15 Febr. 1988. — Brasov, 1989. — С. 197–206.
15. *Knebelman M. S.* Collineations and motions in generalized space// Amer. J. Math. — 1929. — *51*. — С. 527–564.
16. *Matsumoto M.* On Einstein's gravitational field equation in a tangent Riemannian space of a Finsler space// Reports Math. Phys. — 1975. — *8*, № 1. — С. 103–108.
17. *Matsumoto M.* Foundation of Finsler geometry and special Finsler spaces. Kais. Press. Otsu. Ipan, 1986.

18. *Matsumoto M.* The Tavakol van den Bergh conditions in the theories of gravity and projective changes of Finsler metrics// Publ. Math. Debrecen. — 1993. — *42*, № 1–2. — С. 155–168.
19. *Miron R.* Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections// J. Math. Kyoto. Univ. — 1983. — *23*. — С. 219–224.
20. *Miron R.* On the Finslerian theory of relativity// Tensor. — 1987. — *44*, № 1. — С. 63–81.
21. *Miron R., Tavakol R. K., Balan V., Roxburgh I.* Geometry of space time and generalized Lagrange gauge theory// Publ. Math. Debrecen. — 1993. — *42*, № 3–4. — С. 215–224.
22. *Moor A.* Entwicklung einer Geometrie der allgemeiner metrischen Linienelement raume// Acta Scient. Math. — 1956. — *17*, № 1–2. — С. 85-—120.
23. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, I// Tohoku Math. J. — 1958. — *10*, № 3. — С. 338–354.
24. *Tashiro I.* A theory of transformation groups on generalized spaces and applications to Finsler and Cartan spaces// J. Math. Soc. Japan. — 1959. — *11*, № 11. — С. 42–71.
25. *Wang H. S.* On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing// J. London Math. Soc. — 1947. — *22*. — С. 5–9.
26. *Watanabe S.* Generalized Finsler spaces conformal to a Riemannian space and the Cartan like connections// An. Sti. Univ. Iasi. Sec. 1a. — 1984. — *30*, № 4. — С. 95–98.
27. *Yano K., Davies E. T.* On the tangent bundles of Finsler and Riemannian manifolds// Rend. Circ. Math. — 1963. — *12*, № 2. — С. 211–228.

Р. Р. Айдагулов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: a_rust@bk.ru

М. В. Шамолин
Институт механики Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: shamolin@imec.msu.ru