УДК 519.112; 519.176; 519.852

ДИСКРЕТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

*В. К. Леонтьев**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Термин «дискретные экстремальные задачи» (д. э. з.) включает в себя довольно широкий класс задач оптимизации, отличительной чертой которого является «дискретность» или конечность области задания «экстремизируемых» функций.

Однако при таком выборе объекта описания и при современном уровне понимания проблем дискретной оптимизации обзор этого направления в целом выродился бы в перечисление длинного ряда различного рода утверждений, относящихся к той или иной частной проблеме. Следует отметить, что число работ по дискретной оптимизации достигло весьма значительных размеров. Хорошая библиография по этой тематике, содержащая более четырех тысяч наименований, приведена в [135].

Поэтому естественно было сделать определенный выбор и остановиться на менее широкой и более цельной области задач дискретной оптимизации с тем, чтобы выделить основные проблемы, очертить круг методов и установить связи с другими разделами дискретной математики.

Класс задач, которыми мы занимаемся в настоящей работе, по-видимому, правильней всего было бы назвать задачами комбинаторного программирования. Это так называемые «комбинаторные задачи с весами». Сюда относятся такие хорошо известные задачи, как задача коммивояжёра, задача о назначениях, задача о максимальном паросочетании в графе, «взвешенные» задачи об упаковке и покрытии, задачи на перестановках, ряд задач теории расписаний и т. д.

Следует отметить, что обычно весь круг работ, относящихся к той или иной проблеме дискретной оптимизации, можно условно разделить на две части: работы, в которых предлагаются точные или эвристические алгоритмы для решения проблемы, и работы, содержащие некоторые теоретические результаты, характеризующие ту или иную сторону проблемы. Не

* В работе над §§ 3, 4, 5 и библиографий непосредственное участие принимал С. П. Тарасов.

всегда между этими классами работ можно провести точную грань, но обычно это удается сделать.

Мы в основном занимаемся лишь работами второго типа, уделяя внимание алгоритмам лишь постольку, поскольку они как-то характеризуют структуру задачи.

Ряд интересных проблем комбинаторного программирования остается практически вне рамок этой статьи только в связи со своей автономностью. Это, в частности, относится к задачам, связанным с потоками в сетях. В этих случаях мы иногда ограничиваемся лишь ссылками на соответствующую литературу.

Первая часть работы, в которой обсуждаются точные и эвристические алгоритмы решения различных классов дискретных экстремальных задач, носит вводный характер.

Во второй части работы подробно прослеживается связь между классом д. э. з. с линейной целевой функцией и линейным программированием. Центральной в этой части работы является задача об описании многогранников, имеющих только целочисленные вершины, в терминах линейных неравенств, их определяющих. Здесь же рассматривается задача о нахождении граней многогранника, вершины которого задаются условиями данной д. э. з.

Далее обсуждается так называемая обратная задача дискретной оптимизации, состоящая в описании всех параметров данного класса задач, имеющих фиксированную оптимальную «траекторию». Эта задача является важной с точки зрения понимания структуры оптимального решения. Именно при решении обратной задачи оптимизации наиболее отчетливо проявляется «индивидуальность» данной д. э. з.

В третьей части работы обсуждаются д. э. з. в связи с построенной Куком и Карпом теорией полиномиальной полноты.

В заключение рассматривается один класс задач оптимизации на узкие места и устойчивость в д. э. з. с линейной целевой функцией.

Кроме этого, в обзоре содержится ряд частных результатов, связанных с нижними оценками сложности д. э. з. в некоторых классах алгоритмов, а также рассмотрены оптимизационные задачи на матроидах.

Автор выражает благодарность О. Б. Лупанову, Н. Н. Кузюрину, В. С. Танаеву, М. М. Ковалеву за полезное обсуждение ряда вопросов, относящихся к проблематике этой статьи.

§ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Все алгоритмы, предназначенные для решения д. э. з., можно разделить на два класса: точные и эвристические.

1. Точные алгоритмы. Точные алгоритмы характеризуются тем, что после окончания их работы получается решение задачи.

Ниже кратко перечисляются основные точные алгоритмы решения д. э. з.

1) Методы динамического программирования. В основе этих методов лежит принцип оптимальности Р. Беллмана и соответствующее ему функциональное уравнение, позволяющее свести решение многомерной оптимизационной задачи к решению последовательности одномерных экстремальных задач.

Динамическому программированию посвящено значительное число монографий и статей. Этот метод в ряде случаев с успехом применялся к решению конкретных д. э. з.: к задаче о ранце, к задаче коммивояжёра, общей задаче целочисленного линейного программирования. Однако практически успех достигался лишь в случае небольшой размерности указанных задач.

Говоря о характеристике метода динамического программирования для решения д. э. з., следует отметить, что применение этого метода в общем случае существенно снижает порядок перебора и поэтому было, безусловно, оправдано на первом этапе изучения д. э. з. Однако, находясь в рамках только этого метода, трудно учесть специфику конкретной д. э. з., что и является естественной границей его использования. Отметим также, что метод динамического программирования является частным случаем более универсального и гибкого метода последовательного анализа вариантов, предложенного В. С. Михалевичем [51, 52]. Этот метод был с успехом применен к решению ряда дискретных задач календарного планирования и других практически важных проблем.

2) Методы ветвей и границ. Методы ветвей и границ представляют собой направленный перебор с отсеиванием «бесперспективных» вариантов. Каждый конкретный метод ветвей и границ характеризуется способом организации перебора (ветвлением) и способом оценки перспективности варианта (границей). Если зафиксировать эти два параметра, то будет определен метод ветвей и границ. Формальное описание этого метода для решения дискретной задачи оптимизации вида

$$\min_{x \in \Omega} f(x),$$

где Ω — конечное множество, множество допустимых решений, имеется в монографии [35].

Общий обзор истории метода ветвей и границ, описания его различных схем и алгоритмов, их реализующих, имеется в ряде существующих статей и монографий (см., например, [16, 17, 31, 33, 77]). Поэтому мы ограничимся лишь некоторыми общими соображениями и имеющими к ним отношение конкретными результатами. Положительной чертой метода ветвей и границ является его гибкость, позволяющая учитывать специфику конкретных д. э. з. и использовать в той или иной мере внутри метода ветвей и границ и другие методы решения д. э. з.

Большую часть работ по методу ветвей и границ можно классифицировать следующим образом:

1) Работы по применению метода ветвей и границ к конкретным д. э. з. В работах этого типа обычно приводится описание алгоритмов и результаты машинного эксперимента по размерности задачи, величине памяти и времени счета на ЭВМ. Сравнения разного рода реализаций метода ветвей и границ, проводимые в рамках такого эксперимента, имеют лишь ограниченный интерес, в силу нетождественности условий проведения (разные ЭВМ, разные языки, разного класса программы и, самое главное, разные задачи).

2) Работы по оценкам сложности метода ветвей и границ. В. К. Коробковым было, по-видимому, впервые отмечено, что можно построить несложные примеры д. э. з., в которых точные методы решения будут близки к полному перебору. Соответствующие контрпримеры к алгоритму Балаша были опубликованы им в приложении к переводу статьи Балаша [36]. В дальнейшем появились работы [14, 15, 159], в которых были построены «патологические» примеры задач для конкретных методов ветвей и границ. «Патологичность» этих задач состоит в том, что объем вычислений, требуемых для их решения, близок к полному перебору.

Например, в [14] было показано, что в классе задач следующего типа

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \ldots, n,$$

определяемым набором параметров, удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$c_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n,$$

$$c_r \geqslant \sum_{j>r} c_j, \quad r=1, \ldots, n-1,$$

$$a_{i1} \geqslant a_{i2} \geqslant \ldots \geqslant a_{in}, \quad i=1, \ldots, n,$$

существует задача, для которой число итераций алгоритма Балаша имеет порядок $\frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Так как область определения всех задач указанного типа содержит 2^n точек, то ясно, что сложность решения такой задачи алгоритмом Балаша близка к полному перебору. Этим же автором [15] было показано, что «среднее» число итераций алгоритма Балаша на указанном классе задач по области:

$$c_j \geqslant \sum_{k=j+1}^{n} c_k \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n,$$

$$0 < a_{in} \leqslant a_{in-1} \leqslant \ldots \leqslant a_{i1} \leqslant a_i, \quad a_i \text{ — фиксированные числа,}$$

$$0 \leqslant b_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i=1, \ldots, m,$$

также экспоненциально растет с ростом n.

Следует отметить, что, хотя теоретическое исследование эффективности алгоритмов ветвей и границ для задач типа задачи коммивояжёра не проводилось, построить примеры патологических задач не так уж трудно. По-видимому, задачи коммивояжёра, для которых длины всех гамильтоновых циклов мало отличаются друг от друга, являются такими «патологическими» примерами для всех методов ветвей и границ.

В целом не представляется удивительным существование «патологических» примеров для большинства интересных дискретных задач: если подавляющее большинство допустимых планов очень близко к оптимальному, трудно надеяться «отсечь» многие из них, не просмотрев ситуацию до конца.

3) Методы отсечения. Сюда относятся методы решения целочисленной задачи линейного программирования путем сведения ее к решению последовательности обычных задач линейного программирования, каждая из которых получается из исходной путем «отсечения» некоторых нецелочисленных вершин. По методам отсечения имеется ряд обзоров [34, 119], и мы, согласно нашей основной концепции, на них останавливаться не будем.

4) Методы решения специальных задач. В этот класс методов мы относим методы, разработанные для решения дискретных экстремальных задач со специфическим видом функционала или ограничений.

а) Транспортные задачи. Сюда относятся многочисленные задачи о перевозках как в терминах линейного программирования, так и в сетевой постановке. Специфичным в этих задачах является вид ограничений. Транспортным задачам посвящена значительная литература (см., например, [13, 68]).

б) Метод последовательных расчетов. Этот метод был предложен В. П. Черениным [69] для нахождения максимума функции $f(\omega)$, определенной на всех подмножествах конечного множества Ω и удовлетворяющей условию

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \geqslant f(\omega_1 \cup \omega_2) + f(\omega_1 \cap \omega_2).$$

Задачи с такого рода целевыми функциями встречаются в ряде исследований, посвященных проблемам размещения и в других прикладных вопросах. Связь условия Черенина (в терминологии статьи [106] — субмодулярность целевой функции) с «жадными» алгоритмами была установлена в работах Эдмондса.

в) Задачи календарного планирования. Простейшая из задач этого класса формулируется следующим образом. Даны два станка и n деталей, каждая из которых должна пройти обработку на каждом из этих станков. Время обработки i-й детали на станках характеризуется парой чисел (a_i, b_i). Требуется выбрать такую очередность обработки деталей, при которой суммарное время на их обработку является минимальным. Эта задача носит название задачи Джонсона о двух станках и является собой пример «хорошо» решаемой задачи дискретной оптимизации [133]. Некоторые обобщения и усложенения условий этой задачи приводят к задачам календарного планирования [32, 66].

г) Задачи на перестановках. Пусть S_n — симметрическая группа порядка n и f — линейная форма

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Если $s \in S_n$, то через $s(f)$ обозначим следующую линейную форму

$$s(f)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_{\alpha_i},$$

где $s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Пусть $H \subseteq S_n$. Тогда экстремальная задача на множестве перестановок H при фиксированном векторе $\bar{x}=(x_1 x_2 \dots x_n)$ формулируется следующим образом: найти в H такую перестановку t, чтобы было справедливо неравенство

$$t(f) \leqslant s(f)$$

для всех $s \in H$.

В работе Д. А. Супруненко [63] показано, что задача на перестановках является достаточно широкой. Например, ее частным случаем является задача коммивояжёра. В ряде работ Д. А. Супруненко и его учеников при наложении определенных условий на множество H и на векторы $\bar{a}=(a_1 a_2 \dots a_n)$ и $\bar{x}=(x_1 x_2 \dots x_n)$ получено значительное число интересных результатов, характеризующих вид экстремальных перестановок ([30, 62, 64, 65]).

д) Дискретные экстремальные задачи на графах. Это чрезвычайно широкий и интересный класс задач. Для сколько-нибудь полного описания результатов, относящихся к этому классу задач, потребовалась бы солидная обзорная статья. Ряд д.э.з. на графах входит в нашу тематику (задача о коммивояжёре, задача о максимальном паросочетании и т. д.), и мы им уделяем внимание. Другие же задачи на графах (задача о хроматическом числе, задача о числах внутренней и внешней устойчивости графа и т. д.) являются в нашем смысле «чисто» комбинаторными задачами (без весов), и мы их практически не рассматриваем, что, безусловно, связано лишь с выбором темы.

е) Задачи стандартизации. Задачи этого типа возникают в промышленных отраслях народного хозяйства при выборе оптимальных значений параметров производимых изделий. Точные математические постановки таких задач и методы их решения содержатся в монографии [3] (см. также обзор [143]).

2. Эвристические алгоритмы. В этот класс алгоритмов мы будем относить такие алгоритмы, которые после окончания своей работы приводят к некоторому допустимому решению, которое, вообще говоря, не является оптимальным. При таком определении к классу эвристических алгоритмов относятся и все приближенные алгоритмы, но мы хотели бы подчеркнуть разницу этих двух типов алгоритмов. Обычно в приближенном алгоритме известна какая-нибудь информация об оценке отклонения от оптимума, скорости сходимости и т. д. Для эвристических алгоритмов эта информация, по определению, отсутствует. Ясно, что по мере изучения некоторые эвристические алгоритмы могут стать приближенными или даже просто точными.

Одним из известных классов эвристических алгоритмов являются так называемые локально оптимальные или градиентные алгоритмы. В основе этих алгоритмов лежит «пошаговое» построение допустимого решения. При этом на каждом шаге ищется экстремум некоторой функции, зависящей от определенного числа компонент, составляющих допустимое решение. Общая теория такого рода алгоритмов была построена Ю. И. Журавлевым [24—26].

Хорошо известным примером такого типа алгоритмов является алгоритм типа «иди в ближайшую, не пройденную еще вершину» в задаче коммивояжёра. Этот, в каком-то смысле простейший эвристический алгоритм работает по окрестности первого порядка и имеет трудоемкость порядка n^2, где n — число точек в задаче коммивояжёра. Легко устанавливается, что этот алгоритм не гарантирует оптимального решения задачи коммивояжёра. В работе [42] установлено, что алгоритм «иди в ближайшую, еще не пройденную вершину» или незначительная его модификация всегда гарантирует для симметричной задачи коммивояжёра путь, длина которого не превосходит средней длины пути для данной задачи. При этом средняя длина пути $\overline{\tau}(A)$ определяется как сумма длин всех путей, деленная на их число. Для задачи коммивояжёра эта величина выражается следующей формулой (A — матрица весов полного графа):

$$\overline{\tau}(A)=\frac{\sum\limits_{r_{ij}\in A} r_{ij}}{n-1}.$$

Полученные в работе [42] оценки являются достижимыми и решают вопрос о точности градиентного алгоритма относительно средней длины пути.

Задача о построении алгоритма, который всегда гарантирует значение оптимизируемого функционала, не превышающее его среднего значения для ряда задач оптимизации, рассматривалась в работах [6, 58].

В [58] показано, что ряд известных эвристических алгоритмов решения задачи коммивояжёра дают путь, длина которого не превышает средней длины пути, а некоторые из алгоритмов можно модифицировать таким образом, чтобы они обладали указанным свойством.

В [6] построен алгоритм, дающий значение оптимизируемого функционала, не превышающее его среднего значения для класса так называемых задач очередности.

В работе [179] было исследовано поведение отношения длины минимального пути $\tau_{\min}$ коммивояжёра (для матрицы расстояний, элементы которой удовлетворяют неравенству треугольника) и длины пути $\tau_{гр}$, полученного с помощью градиентного алгоритма. В ней доказано следующее неравенство

$$\frac{\tau_{гр}}{\tau_{\min}} \leqslant \frac{[\lg n]}{2} + \frac{1}{2},$$

где n — число точек или размерность матрицы расстояний.

Там же построена последовательность графов, для которых это отношение удовлетворяет неравенству

$$\frac{\tau_{гр}}{\tau_{\min}} > \frac{\lg (n+1)}{3} + \frac{4}{9}.$$

Кроме того, уже давно известны простые процедуры построения пути коммивояжёра, отличающиеся от минимального не более чем в два раза.

В настоящее время известен алгоритм, дающий приближенное решение задачи о коммивояжёре, которое отличается от оптимума не более чем в 1,5 раза при условии, что элементы матрицы расстояний удовлетворяют неравенству треугольника. При этих условиях оценка точна. Алгоритм крайне прост: сначала ищется минимальное остовное дерево, а затем находится минимальное паросочетание всех вершин нечетной степени в дереве. В полученном мультиграфе (остовное дерево плюс паросочетание) строится произвольный эйлеров цикл, который записывается в виде последовательности посещаемых вершин $(v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}, v_{i1})$, после чего повторяющиеся вершины, кроме начала, вычеркиваются. Полученный таким образом гамильтонов цикл является искомым [99].

По-видимому, все приведенные выше результаты построения алгоритмов, дающих значение целевой функции не хуже, чем фиксированная граница, можно рассматривать как самые первые подходы к исследованию важной проблемы о соотношении сложности и точности алгоритмов.

В частности, по отношению к задаче коммивояжёра алгоритм, гарантирующий длину пути, не превышающую «среднее значение» (градиентный или его модификация), имеет сложность n^2. Однако неизвестно, существуют ли алгоритмы с меньшей по порядку сложностью, обладающие этим же свойством. Приводящиеся обычно аргументы в пользу несуществования таких алгоритмов, состоящие в том, что сама информация, определяющая задачу, требует n^2 ячеек памяти, не представляются убедительными.

В дискретной математике уже довольно давно известно, что многие закономерности проявляются лишь при удалении из всего множества задач некоторого подмножества нулевой меры. На этом же подмножестве возможны любые реализации.

Такие факты были установлены в теории синтеза схем, теории дизъюнктивных нормальных форм и в других областях дискретного анализа [49, 50, 72].

Ряд аналогичных закономерностей проявляется и в д.э.з. В цикле работ В. А. Перепелицы и Э. Х. Гимади было введено и изучено понятие статистически эффективного алгоритма [9, 10, 57].

Статистически эффективный алгоритм гарантирует построение с вероятностью, близкой к единице, асимптотически оптимального решения на некотором классе задач с введенной на нем вероятностной мерой.

Применительно к задаче коммивояжёра, полученные В. А. Перепелицей и Э. Х. Гимади результаты имеют следующий характер.

Пусть $\mathfrak{A}_n$ — класс квадратных матриц порядка n с заданной на нем вероятностной мерой. Через L обозначим алгоритм, который каждой матрице $A \in \mathfrak{A}_n$ ставит в соответствие некоторый гамильтонов цикл τ, а через $\mathcal{L}_A$ — длину этого гамильтонова цикла.

Определение. Алгоритм L для решения задачи коммивояжёра на классе матриц $\mathfrak{A}_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ называется асимптотически оптимальным, если существуют такие последовательности чисел $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, что справедливо неравенство

$$P\{\mathcal{L}_A \leqslant (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}_{\min}(A)\} \geqslant 1-\delta_n.$$

Здесь $\mathcal{L}_{\min}(A)$ — длина оптимального гамильтонова цикла в полном графе с матрицей расстояний A, $P\{\ldots\}$ — вероятность события, заключенного в скобках.

Таким образом, качественными характеристиками указанных выше понятий служит вид вероятностного распределения и описание алгоритма L.

Первая (прямая) задача состоит в нахождении условий на вероятностное распределение, при котором заданный алгоритм L является асимптотически оптимальным.

В работе [10] были указаны некоторые достаточные условия на распределение, при которых алгоритм L_0 «иди в ближайшую, еще не пройденную вершину» является асимптотически оптимальным.

Пусть элементы a_{ij} матрицы $A=\|a_{ij}\|\in\mathfrak{A}_n$ представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями из отрезка $[a, b]$ при $a>0$ и функцией распределения $F(x)$. Обозначим через γ_n корень уравнения: $F(\gamma)=\frac{1}{n}$, а через I_n — значение интеграла $I_n=\int\limits_{\gamma_n}^{1}\frac{dx}{F(x)}$.

Теорема [10]. Пусть для некоторой растущей функции $\psi(n)$ выполнено неравенство

$$\frac{b}{a}\leqslant\frac{1}{\psi(n)}\min\left\{\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{I_n}\right\}.$$

Тогда алгоритм L_0 является асимптотически оптимальным.

Следствие. Если F — равномерное распределение и

$$\frac{b}{a}\leqslant\frac{n}{\ln n}\frac{1}{\psi(n)},$$

то L_0 является асимптотически оптимальным алгоритмом.

В работах этих же авторов а также в ряде других работ были получены аналогичные результаты при изучении задачи о покрытии полного взвешенного графа ребрами, задачи о совершенном паросочетании на полном взвешенном графе, задачи о назначениях и в некоторых других д.э.з. [54, 60].

В работе [8] был исследован ряд эвристических алгоритмов решения задачи коммивояжёра и доказана их асимптотическая оптимальность.

Следует отметить, что, по-видимому, алгоритм L_0 — «иди в ближайшую, еще не пройденную вершину» — является самым «слабым» из естественных эвристических алгоритмов решения задачи коммивояжёра. Поэтому все другие «разумные» эвристические алгоритмы также должны обладать свойством асимптотической оптимальности при одинаковых распределениях. Точных результатов на эту тему неизвестно.

Вторая (обратная) задача, связанная со статистически эффективными алгоритмами, состоит в построении асимптотически оптимального алгоритма при заданном вероятностном распределении $F(x)$. Некоторые частные результаты, связанные с этой задачей, можно извлечь из приведенных выше теорем.

Карпом [140, 141] был построен статистически эффективный алгоритм для решения плоской задачи коммивояжёра, который с вероятностью единица строит путь, длина L_s которого удовлетворяет неравенству:

$$\frac{L_s}{L_{\min}} < 1 + \varepsilon.$$

Число шагов этого алгоритма имеет порядок $c(\varepsilon)n + O(n \log n)$.

При этом предполагается, что пункты обхода являются независимыми, равномерно распределенными в некотором прямоугольнике точками. Результат Карпа существенно опирается на работу [80] (см. также [4]).

В работе [187] приведен пример алгоритма для поиска кратчайших путей в положительно взвешенном графе со средним временем работы $O(n^2 \lg^2 n)$. В работе [92] приведены численные эксперименты, подтверждающие эту оценку.

Заканчивая раздел, связанный с эвристическими алгоритмами, следует отметить, что в настоящее время предпринимается значительное число попыток создания новых вычислительных процедур для решения д.э.з. Некоторые из этих процедур, состоящих из последовательности эвристических алгоритмов, включают и участие человека на этапах перехода от алгоритма к алгоритму (см., например, [59, 145]).

В связи с этим существенное значение приобретает теоретическое исследование всего множества эвристических алгоритмов с целью создания из них точных или приближенных методов для решения широких классов д. э. з.

В самое последнее время важные результаты в этом направлении были получены в работах Ю. И. Журавлева [27—29].

§ 3. ДИСКРЕТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В настоящее время линейное программирование имеет репутацию классической области в теории оптимизации и, по существу, сводимость некоторой задачи к задаче линейного программирования уже указывает ее место в иерархии сложности. Оставаясь на этой точке зрения, в последующем ниже изложении мы обсуждаем некоторые результаты и возможности указанной редукции, оставляя при этом в стороне все характеристики сложности, относящиеся к «чисто» линейному программированию.

Замечание. Не входя в дальнейшее обсуждение, отметим, что в работе [142] был построен пример задачи линейного программирования, в которой симплекс-метод может работать экспоненциальное от размерности время. В тоже время этот метод является эффективным в большинстве практических приложений.

Пусть мы ищем экстремум действительной аддитивной функции множеств (x) на некотором семействе M подмножеств конечного множества X.

Сопоставив каждому подмножеству $A \in M$ характеристический $\{0, 1\}$-вектор в евклидовом пространстве $E^{|X|}$ и взяв выпуклую оболочку P этого множества векторов, мы сведем сформулированную выше задачу к стандартной задаче линейного программирования.

Однако, как правило, семейство M не имеет «хорошего» описания и в лучших случаях можно лишь надеяться, что M может быть представлено как множество целочисленных решений некоторой достаточно компактной системы линейных уравнений или неравенств.

Хорошо известным примером описанной ситуации является задача о назначениях, которую в терминах линейного программирования можно сформулировать следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \\
x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Как известно, последнее ограничение в (3.1) можно заменить на обычное требование неотрицательности переменных x_{ij} и, таким образом, задача о назначениях превращается просто в специальную задачу линейного программирования, допускающую к тому же существенно более простой способ решения, чем общая задача линейного программирования.

Ясно, что такая редукция стала возможной потому, что многогранник M, определенный условиями

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \\
x_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, \ldots, n,
\end{gathered}
$$

имеет только целочисленные вершины, совпадающие с искомыми характеристическими векторами.

Возможность сведения трудной комбинаторной задачи к задаче линейного программирования с небольшим числом ограничений представляется довольно заманчивой и изучение таких возможностей породило целую проблематику, в центре которой задача об описании многогранников, имеющих целочисленные вершины.

Таким образом естественный интерес вызывают две следующие задачи.

Задача I. Охарактеризовать системы линейных уравнений и неравенств, имеющие целочисленные экстремальные точки.

Задача II. Выразить комбинаторную структуру семейства подмножеств конечного множества в терминах выпуклой оболочки соответствующего множества характеристических векторов.

Вторая задача может быть также сформулирована как задача описания граней выпуклого многогранного множества P, исходя из комбинаторных свойств семейства подмножеств M.

Следующие понятия и результаты связаны с изучением первой задачи.

1) **Целочисленность вершин многогранника и свойство унимодулярности.**

Определение. Матрица A называется полностью унимодулярной, если величина любого ее минора принадлежит множеству $\{0, 1, -1\}$.

Теорема (Хоффман—Краскал [133]). Пусть A — целочисленная матрица. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) A полностью унимодулярна.

2) Экстремальные точки множества $X=\{\bar{x}: A\bar{x}\leqslant\bar{b},\ \bar{x}\geqslant 0\}$ целочисленны для любого целочисленного вектора $\bar{b}$.

3) Любая невырожденная подматрица матрицы A имеет целочисленную обратную.

Для целочисленности экстремальных точек множества неотрицательных решений системы линейных уравнений достаточно потребовать унимодулярность любого базиса, т. е. равенства 0 или ± 1 любого минора, множество столбцов которого имеет ранг, равный рангу матрицы системы.

Теорема (Вейнотт—Данциг [192]). Пусть A — целочисленная матрица, имеющая линейно независимые строки. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Любой базис A унимодулярен.

2) Экстремальные точки множества $X=\{\bar{x}: A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}\geqslant 0\}$ целочисленны для любого целочисленного вектора $\bar{b}$.

3) Любой базис матрицы A имеет целочисленный обратный.

Ниже приведено несколько критериев полной унимодулярности матрицы.

Пусть элементы матрицы A есть 0, ± 1.

Определение. Матрица A называется эйлеровой, если сумма элементов в каждой ее строке и в каждом столбце четна.

Теорема. Каждое из приведенных ниже условий является необходимым и достаточным для полной унимодулярности матрицы A.

1) Гуйя-Ури [121]. Пусть M — любое подмножество строк матрицы A. Обозначим через $E(M)$ максимальное подмножество столбцов матрицы A, каждый из которых пересекается со строками из множества M по четному числу ненулевых элементов.

Условие. Для любого непустого подмножества строк $M: |EM| \geqslant |M|$ существуют два подмножества строк M_1 и M_2 такие, что $M_1 \cup M_2 = M$ и $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. При этом для любого столбца j из EM справедливо равенство

$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} = \sum_{i \in M_2} a_{ij}.$$

2) Чандрасекаран [93]. Пусть для любой невырожденной $k \times k$-подматрицы B матрицы A выполнено условие:

Наибольший общий делитель чисел $\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{1j}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{2j}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{kj}\right)$ равен единице при любых $\lambda_j \in \{0; \pm 1\}$, не равных одновременно нулю.

3) Гомори [90]. Ни один из миноров матрицы A не равен по абсолютной величине двум.

4) Камьо [90] (см. также [169]).

а) Любая квадратная эйлерова подматрица матрицы A вырождена.

б) Сумма элементов любой квадратной эйлеровой подматрицы матрицы A кратна четырем.

Условие б) можно следующим образом выразить в терминах теории графов.

Сопоставим каждой матрице A с элементами $\{0, \pm 1\}$ взвешенный граф Γ таким способом: вершины графа Γ есть строки и столбцы A и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им линии пересекаются по ненулевому элементу, величина которого является весом рассматриваемого ребра.

Ясно, что при таком сопоставлении эйлеровым подматрицам матрицы A соответствуют эйлеровы подграфы графа Γ.

Условие б) теперь можно сформулировать следующим образом:

в) длина эйлерова цикла любого эйлерова подграфа графа Γ кратна четырем.

В следующих утверждениях приводится ряд достаточных признаков унимодулярности матрицы.

Теорема. Выполнение каждого из следующих условий влечет полную унимодулярность матрицы A.

а) [132]. Пусть элементы матрицы A принадлежат множеству $\{0, \pm 1\}$ и, кроме того, каждый столбец матрицы содержит не более двух ненулевых элементов, а строки могут быть разбиты на два непересекающихся подмножества таким образом, что два ненулевых элемента из одного столбца входят в одно подмножество строк тогда и только тогда, когда их знаки противоположны.

б) Хеллер [130]. Столбцы матрицы A представляют координаты ребер симплекса (со всевозможными ориентациями) по отношению к базису, состоящему из подмножества ребер этого симплекса.

в) [121]. Матрица инциденций схемы, состоящей из системы отрезков на прямой и некоторого множества точек, им принадлежащих, является полностью унимодулярной.

Из утверждения а) можно, в частности, вывести полную унимодулярность матрицы ограничений транспортной задачи.

Наряду с работами по описанию необходимых и достаточных условий унимодулярности матриц, часть близких по тематике работ была посвящена изучению комбинаторных и алгебраических объектов, в той или иной степени связанных с полностью унимодулярными матрицами.

Определение [130]. Будем говорить, что подмножество S линейного пространства унимодулярно, если два любых его базиса связаны унимодулярным (имеющим детерминант, равный по абсолютной величине единице) преобразованием.

Унимодулярность множества S эквивалентна так называемому свойству Данцига: координаты любого вектора $\bar{a} \in S$ в любом базисе S целочисленны.

Свойства унимодулярных множеств изучались в работах [130, 131].

В частности, в работе [130] доказаны следующие утверждения.

Теорема. Если рассматривать упорядоченность по включению, то число элементов в максимальном унимодулярном множестве $S \in R^n$ не превосходит $n(n+1)$, причем равенство достигается только на максимальных семействах, образованных из ребер n-симплекса, взятых со всевозможными ориентациями*.

Татт [190, 191] ввел другой алгебраический объект, связанный с унимодулярными матрицами. Им было определено понятие цепной группы и показано, что полностью унимодулярные матрицы могут быть описаны в терминах образующих и так называемых дендроидов цепных групп. При этом с каждым дендроидом связана полностью унимодулярная матрица, а с каж-

* В этой же работе построен пример максимального по включению унимодулярного множества в R^4, не являющегося симплексом.

дой полностью унимодулярной матрицей некоторая цепная группа, для которой строки этой матрицы являются образующими цепной группы.

Дальнейшее развитие идеи унимодулярности получили в работе [91]. Важное практическое приложение идей теории унимодулярности связано с транспортными задачами. Некоторые из этих приложений были уже упомянуты.

Ряд интересных результатов, связанных с комбинаторными и геометрическими характеристиками транспортных многогранников и многоиндексных транспортных многогранников, был получен в работах В. А. Емеличева и его учеников [18—23, 47, 48].

2) **Задачи о разбиении, покрытии и упаковке.** Следующий класс задач, связанных с изучением целочисленных многогранников, получается при наложении некоторых ограничений на матрицу A и вектор $\bar{b}$.

Рассмотрим три следующие задачи целочисленного линейного программирования:

$$\text{I)}\ \min_{A\bar{x}=\bar{e}}(\bar{c},\ \bar{x});\quad \text{II)}\ \max_{A\bar{x}\leqslant\bar{e}}(\bar{c},\ \bar{x});\quad \text{III)}\ \min_{A\bar{x}\geqslant\bar{e}}(\bar{c},\ \bar{x}).$$

Во всех трех случаях предполагается, что компоненты вектора $\bar{x}$ нули и единицы; $\bar{e}$ — вектор, целиком состоящий из единиц, A — матрица размеров $m\times n$, элементы которой нули и единицы.

Первая из задач носит название задачи о разбиении, вторая — задачи об упаковке, третья — задачи о покрытии.

Названия эти происходят из хорошо известной комбинаторной интерпретации приведенных задач, связанных с «разбиением» данного множества на непересекающиеся подмножества с минимальным суммарным весом, «вложением» в данное множество подмножеств, имеющих максимальный суммарный вес, и «покрытием» множества семейством его подмножеств, имеющим минимальный суммарный вес. При этом веса подмножеств представляются вектором $\bar{c}$ и могут быть любыми действительными числами. Во многих интересных задачах вес подмножества есть просто число его элементов.

Ниже приведен ряд фактов, связанных с изучением вершин многогранников, задач о разбиении, упаковке и покрытии.

Пусть $P(A,\ \bar{b})$ — множество решений системы линейных неравенств

$$A\bar{x}\leqslant\bar{b},$$

$$\bar{x}\geqslant 0.$$

Здесь A — $(m\times n)$-матрица и $\bar{b}\in R^m$.

Геометрически множество $P(A, \bar{b})$ представляет собой выпуклый многогранник или политоп.

Пусть $P_n(A, \bar{b})$ — множество целых точек политопа $P(A, \bar{b})$. Обозначим через $P_1(A, \bar{b})$ выпуклый многогранник, являющийся выпуклой оболочкой множества $P_n(A, \bar{b})$. Другими словами, $P_1(A, \bar{b})$ — это выпуклая оболочка всех точек с целочисленными координатами, принадлежащими $P(A, \bar{b})$.

Кроме этого, свяжем с произвольной $\{0, 1\}$-матрицей A граф пересечений $G(A)$, множество вершин которого соответствует множеству столбцов $\{a_i\}$ матрицы A, причем две вершины, отвечающие столбцам a_i и a_j, смежны тогда и только тогда, когда скалярное произведение (a_i, a_j) не меньше единицы.

Определение. (Берж [81])*. Матрица A из нулей и единиц называется уравновешенной, если она не содержит подматрицы нечетного порядка, у которой сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна двум.

По отношению к графу $G(A)$ приведенное условие означает отсутствие у него циклов нечетной длины большей двух без внутренних хорд.

Теорема (Берж [81], Фалкерсон, Хоффман, Оппенхейм [114], Падберг [167]). Следующие условия, наложенные на (0, 1)-матрицу A, эквивалентны:

1) A — уравновешенная матрица.

2**) Для любой подматрицы $A'' \subset A$ все вершины многогранного множества, определяемого системой линейных неравенств, связанных, соответственно, с задачами упаковки, разбиения или покрытия, т. е. с задачами

а) $A''\bar{x}'' \leqslant \bar{e}''$, $\bar{x}'' \geqslant 0$, $\bar{e}'' \subset \bar{e}$ и $\bar{x}''$ и $\bar{e}''$ — векторы подходящей размерности,

б) $A''\bar{x}'' = \bar{e}''$, $\bar{x}'' \geqslant 0$,

в) $A''\bar{x}'' \geqslant \bar{e}''$, $\bar{x}'' \geqslant 0$,

целочисленны.

Следует отметить, что свойство уравновешенности носит «комбинаторный» характер и потому предыдущая теорема представляет интересный пример связи свойства иметь целочисленные вершины с некоторым чисто комбинаторным свойством матрицы, определяющей выпуклый многогранник.

В частности, эта теорема оказалась тесно связанной с так называемой гипотезой о совершенных графах, выдвинутой Бержем в 1960 году и доказанной Ловашем в 1972 г. [155]. Смысл этой гипотезы и связь с приведенной теоремой состоит в следующем.

* См. также [1].

** На самом деле в перечисленных выше работах условие 2) сформулировано в несколько других терминах.

Для произвольного обыкновенного графа G через $\gamma(G)$ обозначим его хроматическое число, через $\omega_0(G)$ — плотность G, т. е. размер максимального полного подграфа, содержащегося в G, через $\alpha_0(G)$ — кликоматическое число G, т. е. минимальное число клик, покрывающих G, а через $\beta_0(G)$ — число внутренней устойчивости G.

Граф G называется γ-совершенным (α_0-совершенным), если $\gamma(g)=\omega_0(g)$ (соответственно, $\alpha_0(g)=\beta_0(g)$) для любого подграфа $g\subseteq G$. Если граф G одновременно является γ-совершенным и α_0-совершенным, то он называется просто совершенным.

До сих пор открытая сильная форма гипотезы о совершенных графах, доказанная пока только для плоских графов [189], утверждает, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда ни он, ни его дополнение $\overline{G}$ не содержат нечетного цикла без внутренних хорд длины, большей или равной пяти.

Связь вышеприведенной теоремы о целочисленности вершин многогранника, связанного с комбинаторными задачами покрытия, упаковки и разбиения, с теоремой о совершенных графах, ясно видна из следующего утверждения, доказанного впервые Ловашем [155].

Теорема [155]. Пусть для (0, 1)-матрицы A задача линейного программирования

$$\begin{gathered}\min(\overline{e}, \overline{x}),\\ \overline{x}A\geqslant\overline{b},\\ \overline{x}\geqslant 0,\end{gathered}\tag{2}$$

имеет целочисленное решение для любого (0, 1)-вектора $\overline{b}$. Тогда эта задача имеет целочисленное решение для любого неотрицательного целочисленного вектора $\overline{b}$.

В контексте теоремы о совершенных графах матрица A из условия предыдущей теоремы представляет матрицу инциденций максимальных клик и вершин графа $G(A)$. Сама задача (2) является двойственной к задаче об упаковке множеств.

В следующем утверждении устанавливается прямая связь между целочисленностью вершин многогранников специального вида и совершенными графами.

Теорема [96]. Пусть $A(G)$ — матрица инциденций клик и вершин графа G. Политоп $P=(A\overline{x}\leqslant\overline{e},\ \overline{x}\geqslant 0)$ имеет только целочисленные вершины тогда и только тогда, когда G — совершенный граф.

Фалкерсон доказал, что это утверждение эквивалентно теореме о совершенных графах. Доказательство Фалкерсона содержится в диссертации Троттера.

Падбергом [165, 166] было введено определение, естественно обобщающее понятие уравновешенной матрицы, и доказан ряд утверждений о целочисленности вершин многогранников в терминах комбинаторных свойств матрицы ограничений.

Определение (Падберг [167]). (0, 1)-матрица A размеров $m\times n$ называется совершенной, если равенство $P(A', \bar{e})=$ $=P_1(A', \bar{e})$ справедливо для любой $m\times k$-подматрицы A' матрицы A.

Определение (Падберг [165]). Будем говорить, что (0, 1)-матрица A размеров $m\times k$ обладает свойством $\pi_{\beta, k}$, если

1) A содержит невырожденную $k\times k$-подматрицу A'', имеющую сумму элементов в каждой строке и в каждом столбце, равную β;

2) остальные строки A, не входящие в A'', либо компонентно равны некоторым строкам A'', либо имеют сумму элементов, строго меньшую β.

В следующей теореме дано описание совершенных матриц в терминах свойства $\pi_{\beta, k}$.

Замечание. Всюду ниже мы предполагаем, что рассматриваемая нами (0, 1)-матрица A не содержит нулевых столбцов.

Теорема [165]. Произвольная $(m\times n)$-матрица A из нулей и единиц является совершенной тогда и только тогда, когда для любых натуральных $\beta\geqslant 2$ и $k\in[3, n]$ A не содержит $(m\times k)$-подматриц, обладающих свойством $\pi_{\beta, k}$.

Падбергом были также получены другие эквивалентные условия для совершенности матрицы [167] и, кроме того, он получил в этих же терминах характеристику почти совершенных матриц, т. е. матриц из нулей и единиц, с которыми ассоциируются упаковочные многогранники, имеющие ровно одну нецелочисленную вершину [168].

Графы пересечений, отвечающие почти совершенным матрицам, являются критическими несовершенными графами, т. е. удаление произвольной вершины и инцидентных ей ребер из такого графа приводит к совершенному графу.

Замечание. Описание совершенных матриц в форме запрещенных подграфов некоторого ассоциированного графа, аналогичное описанию полностью унимодулярных и уравновешенных матриц, пока неизвестно.

3) **Квазиунимодулярные матрицы и почти целочисленные многогранники.** В работе [144] было получено условие целочисленности вершин многогранного множества $M(A, \bar{b})=\{\bar{x}\in E^n/$ $/A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}\geqslant 0\}$ для того случая, когда элементы матрицы A принадлежат множеству $\{\pm 1\}$.

Определение [144]. Пусть элементы $(m\times n)$-матрицы A принадлежат множеству $\{\pm 1\}$. Матрица A называется квазиунимодулярной, если все ее невырожденные миноры порядка m равны $\pm 2^{m-1}$.

Теорема [144]. Для целочисленности вершин выпуклого многогранника $M(A, \bar{b})$ необходимо, чтобы все компоненты вектора $\bar{b}$ были одновременно четными или нечетными. В случае квазиунимодулярности матрицы A это условие является и достаточным.

Понятие квазиунимодулярной матрицы является частным случаем понятия матриц с постоянными детерминантами, т. е. матриц, все невырожденные миноры максимального ранга которых равны между собой. В этом случае для целочисленности всех вершин множества $M(A, \bar{b})$ достаточно потребовать целочисленности хотя бы одной из его вершин.

В заключение рассмотрим так называемые почти целочисленные многогранники.

Определение [67]. Многогранник M называется почти целочисленным, если множество ребер многогранника M_1, являющегося выпуклой оболочкой всех целых точек многогранника M, принадлежит множеству ребер многогранника M*.

Можно показать [67], что экстремальные задачи на почти целочисленных многогранниках можно решать с помощью алгоритмов, являющихся незначительными модификациями симплекс-метода. Этим обстоятельством и объясняется интерес к почти целочисленным многогранникам.

Теорема [67]. Пусть A — (0, 1)-матрица без нулевых столбцов. Тогда многогранник $P=\{A\bar{x}=\bar{e},\ \bar{x}\geqslant 0\}$ является почти целочисленным.

Замечание. Предыдущая теорема остается справедливой и в случае, когда A — неотрицательная целочисленная матрица [144].

Задача II. Выше мы изучали задачу о целочисленности вершин выпуклого многогранного множества, заданного фиксированной системой ограничений. Ниже мы рассматриваем задачу о «явном» виде самих этих ограничений при условии, что вершины многогранника известны. Такая ситуация не является надуманной и имеет место в ряде практических задач.

Например, в уже рассмотренной выше задаче о назначениях вершинами многогранника являются все подстановки степени n или соответствующие им матрицы перестановок. Для того, чтобы сформулировать эту задачу, как задачу линейного программирования, нам нужен явный вид граней многогранника, вершинами которого являются эти матрицы. Этот явный вид дается теоремой Биркгофа о бистохастических матрицах.

Пусть $P=\{\bar{x}\in E^n,\ A\bar{x}\leqslant\bar{e},\ \bar{x}\geqslant 0\}$ — многогранник задачи об упаковке множеств. Наша цель состоит в описании собственных граней максимальной размерности (фасет) многогранника P_1, являющегося выпуклой оболочкой целых точек многогранника P. В силу того, что размерности многогранников P и P_1

* В работе [67] любое множество вершин многогранника, обладающее свойством, указанным в приведенном определении, называется полным.

совпадают и равны n, каждой фасете P_1 можно сопоставить линейное неравенство $(\bar{a}, \bar{x}) \leqslant a_0$, справедливое при всех $\bar{x} \in P_1$ и обращающееся в точное равенство для n аффинно-независимых векторов $\{\bar{x}_i\}$ из P_1.

Одновременно с многогранником P_1 рассмотрим многогранник P_1^G, являющийся выпуклой оболочкой целочисленных решений задачи об упаковке графа $G(A)$. Другими словами, P_1^G — это выпуклая оболочка множества целочисленных решений системы линейных неравенств: $(A_g\bar{x} \leqslant \bar{e},\ \bar{x} \geqslant 0)$, где A_g — матрица инциденций графа пересечений $G(A)$. Ясно, что $P_1 = P_1^G$.

В последнее время были предприняты многочисленные попытки для описания всех фасет «упаковочного» многогранника в терминах различных характеристик графа $G(A)$. Несмотря на это, полное решение задачи остается пока недоступным. В то же время полученные в этом направлении результаты и методы представляют определенный интерес и мы уделим им некоторое внимание.

Следующее утверждение дает описание граней многогранника P_1, имеющих определенный вид.

Теорема [164]. Неравенство $\sum\limits_{x_i \in K} x_i \leqslant 1$ определяет грань P_1 тогда и только тогда, когда K — множество вершин некоторой клики графа $G(A)$.

Хваталом [96] было описано семейство фасет многогранника в терминах критических ребер. Некоторые другие семейства фасет были описаны в работах [161, 162, 164]. В них также были предложены некоторые рекуррентные процедуры порождения фасет.

В целом, полное комбинаторное описание граней многогранника $P_1(G)$ представляет, по-видимому, довольно сложную задачу. Косвенное подтверждение этого факта состоит в наличии значительного числа семейств попарно-неизоморфных граней (дополнительная информация по этому поводу содержится в работах [78, 170]).

Вопрос о том, для каких матриц A существует «хорошее» описание многогранника $P_1(A)$, не исследовался, за исключением нескольких частных случаев [96].

Хотя и не установлено прямой связи между «сложностью» строения многогранника $P_1(A)$ и существованием эффективного алгоритма для решения соответствующей задачи упаковки, некоторые имеющиеся результаты указывают на наличие определенной корреляции между этими свойствами. В качестве примера подобной связи мы рассмотрим одну специальную задачу о покрытии — задачу о максимальном паросочетании, в которой «хорошее» линейное описание многогранника $P_1(A)$ позволило построить эффективный полиномиальный алгоритм решения задачи. Излагаемые ниже результаты связаны с пионерской работой Эдмондса [105].

Напомним, что подмножество M ребер графа называется паросочетанием, если каждая вершина графа инцидентна не более чем одному ребру из M. Таким образом, задача об определении паросочетания максимального веса во взвешенном графе G эквивалентна рассмотренной выше задаче об оптимальной упаковке 2-элементных подмножеств конечного множества: $\{\max(\bar{c}, \bar{x})/A\bar{x}\leqslant\bar{e}, x=0, 1\}$. Здесь A — матрица инциденций вершин и ребер графа G, $\bar{c}$ — вектор весов ребер, а x_j — булевская переменная, сопоставленная j-му ребру G.

С другой стороны, задача о максимальном паросочетании является задачей об упаковке вершин реберного графа.

Пусть $\delta(v)$ — множество ребер графа G, инцидентных вершине v. Для любого подграфа $g \in G$ через $\gamma(g)$ обозначим множество ребер G, целиком принадлежащих g.

Теорема (Эдмондс [105]). Для произвольного графа $G=(V, E)$ следующая система линейных неравенств описывает выпуклую оболочку характеристических векторов паросочетаний:

1) $x_j \geqslant 0$ при $\lambda_j \in E$,

2) $\sum\limits_{j\in\delta(v)} x_j \leqslant 1$ при $v\in V$,

3) $\sum\limits_{j\in\gamma(g)} x_j \leqslant 1$ для любого подграфа g графа G, имеющего $(2k+1)$-вершину $(k>0)$.

Доказательство этой теоремы заключается в построении характеристического вектора паросочетания максимального веса для любого целочисленного вектора весов ребер $\bar{c}$ (см. также [174], где дано неприводимое описание многогранника паросочетаний).

Эдмондс анонсировал результат о наличии эффективного алгоритма для так называемой задачи о B-паросочетании, т. е. задачи о нахождении подмножества ребер взвешенного графа G, пересекающегося с i-й вершиной не более чем по b_i-ребрам и имеющего максимальный вес для заданного вектора кратности $B=(b_1 b_2 \ldots b_n)$.

Пусть $B(g)=\sum\limits_{i\in V(g)} b_i$, т. е. суммирование идет по всем вершинам подграфа $g\in G$, а $q(g)=\frac{B(g)-1}{2}$.

Теорема [108]. Выпуклая оболочка всех характеристических векторов B-сочетаний графа $G=(V, E)$ описывается следующей системой линейных неравенств:

1) $x_j \geqslant 0$ при $j\in E$,

2) $\sum\limits_{j \in \delta(v)} x_j \leqslant b_v$ для $v \in V$,

3) $\sum\limits_{j \in \gamma(g)} x_j \leqslant q(g)$ для любого подграфа g из G, которому отвечает нечетное значение $B(g)$.

Вообще идеология, которую отстаивает Эдмондс, заключается в предположении, что хорошее комбинаторное описание объектов предполагает хорошее их геометрическое описание в виде выпуклой оболочки характеристических векторов. Тогда многие комбинаторные задачи, которые могут быть сформулированы в терминах линейного программирования (Эдмондс называет их «линейно-целевые комбинаторные задачи»), допускают решения, в которых существенно используются теоремы двойственности линейного программирования как для построения экстремальных решений, так и для характеристики самих объектов с обратным воздействием на исходные комбинаторные структуры. Важно отметить, что теоремы о линейном описании многогранника параллельно позволяли строить алгоритмы для решения соответствующих комбинаторных задач или просто оформлялись в виде алгоритмов.

§ 4. ЗАДАЧИ НА МАТРОИДАХ

В данном параграфе описывается один класс задач дискретной оптимизации на специальных семействах подмножеств конечного множества, так называемых матроидах. Оказывается, что многие экстремальные задачи из этого класса допускают решения с помощью «жадных алгоритмов», т. е. алгоритмов типа градиентного спуска. Кроме этого, матроиды допускают полиэдральное описание, имеющее интересные следствия.

Пусть E — конечное множество.

Определение. Система подмножеств $F \subseteq 2^E$ называется независимой, если из условия $Y \in F$ и $X \in Y$ следует, что $X \in F$. Каждое из подмножеств системы F называется независимым.

Определение*. Матроидом называется система F независимых подмножеств множества E такая, что для любого подмножества A из E мощность каждого максимального (по включению) подмножества $S \in F$ и $S \subset A$ постоянна и равна $r(A)$. Число $r(A)$ называется рангом множества A.

Матроид обозначается парой $M = (E, F)$.

Понятие матроида ввел Уитни в 1935 году. Существует много различных эквивалентных определений матроида. Вышеприведенное определение выбрано для удобства изложения.

Наибольшее независимое подмножество данного множества

---

* В такой форме определение матроида было предложено Эдмондсом

называется его базой. В частности, наибольшие независимые подмножества E называются базами матроида M.

Определение (Эдмондс [106]). Компактное непустое подмножество E называется (целочисленным) полиматроидом P, если:

1) из $x \in P$ и $0 \leqslant x_0 \leqslant x$ следует, что $x_0 \in P$;

2) для любого (целого) $a \in R_+^{|E|}$ любой максимальный $x \in P$ и $x \leqslant a$ имеет постоянную сумму $\sum\limits_j x_j$, которая называется рангом вектора a по отношению к P. (Слово «максимальность» в данном случае означает, что не существует вектора $x'' > x$ и обладающего свойствами x).

Из введенных определений в точности следует, что множество (0, 1)-векторов произвольного целочисленного полиматроида можно рассматривать как множество характеристических векторов независимых подмножеств некоторого матроида $M = (E, F)$.

Определение [106]. Действительная функция f, определенная на структуре L с нулем, называется β_0-функцией, если:

1) для $a \in K = L \setminus \{\varnothing\} : f(a) \geqslant 0$;

2) для a, $b \in K$ и $a \subseteq b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ (неубывание);

3) $f(a \vee b) + f(a \wedge b) \leqslant f(a) + f(b)$ — субмодулярность.

Замечание. Если выполняется также условие $f(\varnothing) = 0$, то f называется β-функцией. В этом случае f субаддитивна, т. е. $f(a \vee b) \leqslant f(a) + f(b)$.

Пусть f — β-функция, определенная на структуре $K = L \setminus \{\varnothing\} = \{A : A \subseteq E\}$ с естественными структурными операциями: $A \vee B = A \cup B$ и $A \wedge B = A \cap B$. Обозначим через $P(E, f)$ выпуклый многогранник:

$$P(E, f) = \left\{ x \in R_+^E : \sum_{j \in A} x_j = x(A) \leqslant f(A) \text{ для всех } A \in K \right\}.$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу на $P(E, f)$:

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{j \in E} c_j, \\ x \in P(E, f). \end{cases} \tag{4.1}$$

Пусть $C = \{c_j\} \in R^E$ и $\{j(1), j(2), \ldots, j(|E|)\}$ — такая перестановка чисел $\{1, 2, \ldots, |E|\}$, что $\{c_{j(1)} \geqslant c_{j(2)} \geqslant \ldots \geqslant c_{j(k)} \geqslant 0 \geqslant c_{j(k+1)} \ldots\}$. Для чисел i из интервала $[1, k]$ положим $A_i = \{j(1), j(2), \ldots, j(i)\}$.

Теорема А [106]. Вектор x_0 с координатами

$$x_1^0 = f(A_1), \quad x_2^0 = f(A_2) - f(A_1),$$

$$x_i^0 = f(A_i) - f(A_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, k,$$

$$x_i^0 = 0, \quad i > k,$$

является решением задачи (4.1).

Доказательство этой теоремы проводится индуктивным путем с приложением некоторых утверждений из теории двойственности в линейном программировании.

В качестве следствия приведенной теоремы можно получить описание вершин многогранника $P(E, f)$.

Следствие [106]. Вершинами многогранника $P(E, f)$ являются в точности все векторы x^0 из предыдущей теоремы, определенные для любой последовательности $j(1), j(2), \ldots, j(k)$ при $0 \leqslant k \leqslant |E|$.

Следствие [106]. Для любого матроида $M=(E, F)$ множество экстремальных решений системы линейных неравенств

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in E,$$

$$x(A) = \sum_{j \in A} x_j \leqslant r(A), \quad \forall A \in E \mid r(A) - \text{ранг } A \mid$$

совпадает с множеством характеристических векторов независимых подмножеств M. Если дополнить эту систему уравнением $\sum_{j \in E} x_j = r(E)$, то экстремальными решениями будут характеристические векторы баз матроида M. В следующих утверждениях дается описание полиматроидов в терминах линейных неравенств.

Следствие [106]. Пусть на множестве 2^E задана структура L с естественными операциями, содержащая пустое множество и само E. Пусть, далее, f — некоторая β_0-функция, определенная на L. Тогда многогранник $P(E, f) = \{x \in R_+^{|E|} : x(A) \leqslant f(A)$ для всех $A \in L \setminus \{\varnothing\}\}$ является полиматроидом. Его ранговая функция $r(a)$ для $a \in R_+^E$ задается следующим выражением:

$$r(a) = \min \left\{ \sum_{j \in E} a_j z_j + \sum_{A \in K = L \setminus \{\varnothing\}} f(A)\, y(A) / z_j + \sum_{j \in A \in K} f(A)\, y(A) \geqslant 1 \right.$$
$$\left. \text{для } \forall_j \in E \right\}.$$

Если f целозначна, то полиматроид $P(E, f)$ является целочисленным. Кроме того, если $f(\varnothing) \geqslant 0$, то можно считать, что в линейной программе, определяющей ранг $r(a)$, оптимум достигается на векторе, в котором отлична от нуля лишь одна координата вектора y и некоторые координаты вектора z.

Теорема [106]. Любой полиматроид $P \subset R_+^{|E|}$ может быть представлен в виде $P = P(E, f)$ с некоторой β_0-функцией f.

Как уже указывалось ранее, полиматроиды и матроиды связаны с задачами оптимизации, допускающими решения с помощью эффективных «жадных» алгоритмов типа градиентного спуска. Один из таких «жадных» алгоритмов для задач линейного программирования с областью определения на полиматроидах и был рассмотрен в теореме A. Следующее утверждение представляет собой некоторую характеристику полиматроидов в терминах «жадных» алгоритмов.

Теорема [104]. Пусть P — политоп вида $\left\{\sum_{i\in A} x_i \leqslant f(A)\right.$ для всех $A\in\{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i \geqslant 0\}$ и пусть для любого вектора $\bar{c}=(c_1c_2\ldots c_n)$ с упорядочением $c_{i_1}\geqslant c_{i_2}\geqslant\ldots\geqslant c_{i_k}>0>c_{i_{k+1}}\geqslant\ldots\geqslant c_{i_n}$ линейная программа

$$\max_{\bar{x}\in P}(\bar{c}, \bar{x})$$

имеет «жадное» решение: $\bar{x}=(x_1x_2\ldots x_n)$ и $x_{i_1}=f(i_1)$, $x_{i_j}=f(i_1i_2\ldots i_j)-f(i_1i_2\ldots i_{j-1})$ при $2\leqslant j\leqslant k$ и $x_{i_j}=0$ при $k+1\leqslant j\leqslant n$. Тогда P — полиматроид.

Матроиды, которые геометрически можно рассматривать как частный случай полиматроидов, связаны, кроме того, со следующим «жадным» алгоритмом в экстремальной задаче на подмножествах конечного множества.

Определение. Пусть f — аддитивная функция множеств, заданная на системе независимых подмножеств конечного множества P.

Рассмотрим «жадный» алгоритм (α) определения некоторого подмножества $A\in P$. Алгоритм (α) состоит в последовательном выборе системы вложенных друг в друга подмножеств: $g_1=\{x_1\}$, $|x_1|=1$, $f(x_1)>0$, $f(x_1)\geqslant f(y)$ для всех y из P или $g_1=\varnothing$, если таких x нет, и в этом случае (α) заканчивает работу. Далее: $g_l=g_{l-1}\cup\{x_l\}$, если $f(x_l)>0$, $g_l\in P$, $g_{l-1}\cap\cap\{x_l\}=\varnothing$ и $f(x_l)\geqslant f(y)$ для всех одноэлементных y таких, что $(g_{l-1}, y)\in P$ и $g_{l-1}\cap\{y\}=\varnothing$. Если таких $\{x_l\}$ не существует то алгоритм заканчивает работу.

Теорема [177, 104]. Алгоритм (α) определяет экстремальное подмножество $A\in P$ для задачи $\{\max f(B),\ B\in P\}$ при произвольной аддитивной функции множеств f, заданной на системе P независимых подмножеств конечного множества E тогда и только тогда, когда $M(P, E)$ — матроид.

Из приведенной теоремы можно, в частности, получить известный «жадный» алгоритм Краскала [146] для определения минимального остовного дерева связного взвешенного графа. При этом независимыми подмножествами графа будут являться его леса.

Еще один вариант «градиентного» алгоритма, связанного с полиматроидами, рассмотрен в работе [104]. Применение идей, связанных с субмодулярностью и «жадными» алгоритмами, имеется в [102] и [158].

Работа [103] посвящена обобщению понятия полиматроидов. Дальнейшие результаты о полиматроидных многогранниках получены в [110]. Задачи нелинейной оптимизации на полиматроидах рассмотрены в [12].

В заключение параграфа рассмотрим несколько результатов о пересечении матроидов.

Эдмондсу принадлежит следующее утверждение о пересечении двух полиматроидов.

Теорема [106]. Пусть $P_1, P_2 \in R_+^{|E|}$ являются целочисленными полиматроидами. Тогда многогранник $P_1 \cap P_2$ имеет целочисленные вершины.

Следствие [106]. Если P_1 и P_2 — матроидные полиматроиды, соответствующие матроидам M_1 и M_2 на множестве E, то вершинами многогранника $P_1 \cap P_2$ являются в точности все характеристические векторы подмножеств, не зависимых в M_1 и M_2.

Из приведенных результатов следует, что если существует полиномиальный алгоритм распознавания M-независимости произвольного подмножества E, то экстремальная задача на матроиде

$$\begin{cases} \max(\bar{c}, \bar{x}), \\ \bar{x} \in H, \end{cases}$$

где H — множество характеристических векторов матроида $M = (E, F)$, решается за полиномиальное число шагов при произвольном векторе целевой функции $\bar{c} \in R^{|E|}$ с помощью «жадного» алгоритма. Точно также в случае существования полиномиального алгоритма распознавания M_1- и M_2-независимости произвольного подмножества E существует эффективный полиномиальный алгоритм решения «2-матроидной задачи»: $\{\max(\bar{c}, \bar{x}) \mid \bar{x} \in H_1 \cap H_2$, где H_1, H_2 — множества характеристических векторов независимых подмножеств в M_1 и M_2, соответственно$\}$.

К «2-матроидным задачам» сводится большое число важных задач дискретной оптимизации на матроидах и графах [107, 151, 152]. С другой стороны, пересечение трех матроидных многогранников имеет, в общем случае, нецелочисленные вершины. Более того, как показал Лоулер [150], задача об определении максимального взвешенного подмножества, являющегося независимым в k ($k \geqslant 4$) матроидах на n-элементном множестве, может быть сведена к задаче об определении пересечения максимального веса трех матроидов на $2kn$-элементном множестве. Известно также, что некоторые частные варианты задачи о пересечении трех матроидов являются полными в смысле Кука—Карпа. Такими являются, например, задача о 3-мерном паросочетании и задача о нахождении гамильтонова пути в ориентированном графе. Полиэдральный подход к практически важному классу задач стандартизации рассматривался в работах [11, 143].

§ 5. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Многое из того, что было изложено выше, можно рассматривать как описание различных структур, связанных с данным классом задач оптимизации, с целью выделения экстремального решения из всего множества определения. В таком контексте естественно рассматривать и обратную задачу оптимизации, состоящую в описании начальных данных, при которых оптимальным является фиксированный план. Так, например, если решается задача линейного программирования на фиксированном многограннике, то обратной является задача об описании всех линейных функционалов, имеющих минимум в заданной вершине этого многогранника.

Проиллюстрируем некоторые результаты, связанные с этим подходом, на классе так называемых траекторных задач.

Пусть $A=\|r_{ij}\|$ — квадратная порядка n матрица с действительными элементами и M_n — некоторое множество допустимых траекторий, т. е. определенных подмножеств, состоящих из n элементов матрицы A. Требуется выделить из множества M_n траекторию τ, сумма элементов матрицы A «вдоль» которой минимальна.

В описанную схему укладывается ряд известных задач дискретной оптимизации: задача о кратчайшей связывающей сети (КСС), задача о назначениях, задача о коммивояжёре и т. д. Обратной задачей оптимизации в этом случае будет естественно следующая задача: описать матрицы, имеющие в качестве оптимальных данное подмножество траекторий из M_n.

Обозначим через $R_i(M_n)$ множество матриц, i-я траектория которых (при произвольной начальной нумерации множества всех допустимых траекторий) является оптимальной. Следующее утверждение носит совершенно общий характер.

Пусть элементы матрицы $A=\|r_{ij}\|$ — целые числа.

Лемма [41]. Класс $R_i(M_n)$ является коммутативной конечно порожденной полугруппой по обычному сложению матриц. Множество образующих полугруппы $R_i(M_n)$ единственно при факторизации $R_i(M_n)$ по ее максимальной подгруппе P, которую можно представить в виде $P=\bigcap_{i=1}^{|M_n|} R_i(M_n)$. Все полугруппы $R_i(M_n)$ попарно изоморфны. Если же считать элементы матриц $A=\|r_{ij}\|$ произвольными действительными числами, то каждый из классов $R_i(M_n)$ будет являться выпуклым конусом в n^2-мерном пространстве матриц.

В силу приведенной леммы, под решением обратной задачи естественно понимать полное или частичное описание множества образующих полугрупп или множество образующих конуса. В общем случае эта задача сводится к построению базиса для подпространства P и нахождению ребер конуса $K_i(M_n)/P$, полученного факторизацией конуса $K_i(M_n)$ по подпространству P. Приведенная постановка тесно связана с рассмотренным выше полиэдральным подходом, так как все дело состоит в построении множества опорных граней для конуса $K^*_{i0}(M_n)$, являющегося «сдвигом» двойственного к $K_i(M_n)$ конуса $K^*_i(M_n)$.

В работе [41] приведены решения обратных задач для аналога задачи о КСС и для задачи о назначениях.

Структура соответствующих полугрупп и конусов является идентичной, что, естественно, отражается и на алгоритмах решения задач, большинство из которых имеет смысл разложения матрицы по базису в своей полугруппе. Во всех траекторных задачах существенную роль играет подпространство P. Мы приведем некоторые результаты, относящиеся к его характеристике.

Пусть x_i и y_j — сумма элементов i-й строки и j-го столбца матрицы $A=\|r_{ij}\|$ и G — сумма всех элементов этой матрицы.

Для решения ряда вопросов, связанных с исследованием строения пространства P матриц, имеющих траектории одинаковой длины, определенную пользу приносят следующие леммы о «приведении».

Пусть $A=\|r_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка n, диагональные элементы которой равны нулю. Рассмотрим матрицу $B(t) = (b_{ij}(t))$, где

$$b_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{n-1}+\dfrac{G}{(n-1)(n-2)}-\dfrac{(n-1)(y_i+x_j)}{n(n-2)}+\dfrac{y_i+x_j}{n(n-2)} & \text{при } i\neq j,\\ 0 \quad \text{при } i=j.\end{cases}$$

Лемма 1. Сумма элементов в любой строке и в любом столбце матрицы $A+B(t)$ постоянна и равна t.

Если же A—произвольная квадратная матрица, то аналогичным описанному выше свойством обладает матрица $B^1(t)=(b^1_{ij})$, где

$$b^1_{ij}=\frac{nt+G}{n^2}-\frac{y_i+x_j}{n}.$$

Лемма 2. Сумма элементов в любой строке и в любом столбце матрицы $A+B^1(t)$ равна t.

Теорема. 1) Матрица $A=\|r_{ij}\|$ задачи о коммивояжёре (все диагональные элементы у нее равны нулю) тогда и только тогда имеет все гамильтоновы циклы одной длины, когда матрица $A+B(0)$ является нулевой.

2) Матрица $A=\|r_{ij}\|$ задачи о назначениях тогда и только тогда имеет однаковую сумму элементов вдоль любой перестановки, когда матрица $A+B^1(0)$ является нулевой.

Таким образом, подпространство P для обеих задач — коммивояжёра и назначениях — является, по существу, одним и тем же (с точностью до элементов главной диагонали) и состоит из матриц $A=\|r_{ij}\|$, элементы которых могут быть представлены в виде

$$r_{ij}=u_i+v_j,\ i,j=1,\ 2,\ldots,n \quad (i\neq j \text{ для задачи коммивояжёра})$$

для некоторых чисел u_i и v_j. Теорема 1) содержится в работе [43]. Близкие результаты были получены в [7, 42, 58, 124, 125, 156].

Строение конуса обратной задачи о назначениях помогает понять тот важный факт, что, по существу, венгерский алгоритм решения этой задачи является градиентным, но примененным уже не к первоначальной матрице, а к преобразованной с помощью элементов подпространства P.

Теорема, характеризующая строение конуса задачи о назначениях, может быть также использована для решения вопроса о числе оптимальных планов этой задачи.

Пусть $\varphi(A)$ — число оптимальных планов в задаче о назначениях с матрицей A.

Теорема [45]. *Множество значений функции $\varphi(A)$ на классе всех квадратных матриц порядка n с действительными элементами совпадает с множеством значений парманента на классе $n\times n$-матриц, элементы которых — нули и единицы.*

Из этой теоремы легко извлечь алгоритм, который для каждой конкретной размерности n строит все значения функции $\varphi(A)$ при $A\in R_n$. Очень подробное изучение выпуклой оболочки множества всех перестановок можно найти в работах [79, 84—88].

Значительно беднее выглядят результаты, связанные с конусом обратной задачи коммивояжёра. Это обстоятельство безусловно связано с тем, что по существу неизвестно строение многогранника задачи коммивояжёра. Однако в связи с тем интересом, который вызывает задача коммивояжёра, мы приведем наиболее интересные частные результаты, связанные с этим многогранником.

Итак, рассмотрим результаты, относящиеся к описанию многогранников, являющихся выпуклой оболочкой множества характеристических векторов гамильтоновых циклов полного ориентированного и неориентированного n-вершинного графов. Соответствующие многогранники мы будем обозначать через P_n^{ac} и P_n^{sc}.

Рассмотрим оператор S ортогонального проектирования $R^{n^2-n}\to R^{\frac{n(n-1)}{2}}$, действующий на любую $n\times n$-матрицу A по формуле

$$S(A)=\frac{1}{2}[A+A^T],$$

где A^T — транспонированная к A матрица.

Определение. Две квадратные матрицы A и B порядка n с нулевой главной диагональю называются эквивалентными, если

$$A = B + \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i K_i.$$

Здесь K_i — $(n \times n)$-матрица с нулевой главной диагональю, одна линия которой заполнена единицами, а остальные элементы — нули, λ_i — действительные числа.

Следующие утверждения фактически устанавливают связь между гранями многогранников симметричной и несимметричной задачи коммивояжёра.

1) Фасета многогранника P_n^{ac}, определяемая неравенством $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{ij} x_{ij} \leqslant a_0$, с матрицей $A = (a_{ij})$ проектируется посредством оператора S в фасету P_n^{sc} тогда и только тогда, когда введенная выше матрица $B(0)$ является симметричной относительно главной диагонали [128].

2) Если неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_{ij} \leqslant a_0$$

определяет грань многогранника P_n^{sc}, то неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{ij} x_{ij} \leqslant a_0$$

определяет грань многогранника P_n^{ac} в случае $a_{ij} = a_{ji}$. Таким образом, все фасеты многогранника P_n^{sc} могут быть получены с помощью проектирования оператором S «симметричных» граней P_n^{ac}.

3) Вершины τ и τ^T многогранника P_n^{ac} являются смежными.

4) Пусть вершины $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_1^T)$ и $\frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_2^T)$ многогранника P_n^{sc} смежны. Тогда пары вершин (τ_1, τ_2), (τ_1, τ_2^T), (τ_1^T, τ_2), (τ_1^T, τ_2^T), (τ_1, τ_1^T), (τ_2, τ_2^T) многогранника P_n^{ac} также являются смежными.

Ниже перечислен ряд метрических характеристик многогранников P_n^{ac} и P_n^{sc}:

1) Пусть $D(P_n^{ac})$ — диаметр многогранника P_n^{ac}. Тогда [171]

$$D(P_n^{ac}) = \begin{cases} 2, & n \geqslant 6, \\ 1, & n < 6, \end{cases}$$

2) Две вершины многогранника называются соседними порядка r, если размерность минимальной (по размерности) грани, которая их содержит, равна r.

Смежностная размерность многогранника P равна максимальному из чисел r, взятым по всем парам вершин многогранника P. Эта размерность обозначается через $K(P)$.

Известно [129]:

n	1	2	3	4	5	6	7
$K(P_n^{ac})$	0	0	1	1	1	2	2

и

$$K(P_n^{ac})=\begin{cases}2m \text{ при } n=4m+2 \text{ и } n\geqslant 8,\\ \left[\frac{n}{2}\right] \text{ при } n\neq 4m+2 \text{ и } n\geqslant 8.\end{cases}$$

3) Размерности ($\dim P$) многогранников P_n^{ac} и P_n^{sc}, соответственно, равны: $\dim P_n^{ac}=n^2-3n+1$ и $\dim P_n^{sc}=\frac{n(n-3)}{2}$.

4) Степень вершины в графе P_n^{sc} (1-остове) не менее $\left(\frac{n-2}{2}\right)!$ [61, 183].

Отметим, что соответствующие метрические характеристики многогранника задачи о назначениях P_n^a выглядят следующим образом:

1) $\operatorname{diam} P_n^a=\begin{cases}1, & n<4,\\ 2, & n\geqslant 4,\end{cases}$

2) $\operatorname{diam} P_n^a=(n-1)^2$,

3) $K(P_n^a)=\left[\frac{n}{2}\right]$.

Однако если для линейного описания многогранника P_n^a требуется лишь $(2n-1)$ независимых равенств из системы

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ji}=\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1, \ldots, n,$$

и n^2 неравенств

$$\{x_{ij}\geqslant 0\}, \quad i,\ j=1, \ldots, n,$$

то для линейного описания многогранника P_n^{ac} требуется значительно больше неравенств.

Ниже приводятся некоторые результаты о «явном» виде фасет многогранников P_n^{ac} и P_n^{sc} (в силу отмеченных выше фактов, из любой фасеты многогранника P_n^{sc} можно получить соответствующую ей грань многогранника P_n^{ac}, а о каждой фасете многогранника P_n^{ac} можно сказать, является ли ее симметризация фасетой многогранника P_n^{sc}).

Впервые задачей об описании граней P_n^{ac} начал заниматься Хеллер [127] в начале 50-х годов с целью исследования возможности применения линейного программирования к задаче коммивояжера. Хеллер получил лишь частичное описание P_5^{ac}, в котором отсутствовала примерно половина фасет.

Результат Хеллера был исправлен Куном [147], однако и его описание было неполным. Ни Кун, ни Хеллер доказательств своих результатов не опубликовали. В обзорной статье Гомори [122] также упоминается о линейном описании P_n^{ac}.

В целом Хеллер получил 224 линейных неравенства для P_5^{ac}, Кун — 390, а на самом деле их более 500.

Полная линейная характеристика многогранника P_5^{ac} была впервые дана С. П. Тарасовым прямым расчетом с помощью метода двойного описания.

Эта характеристика выглядит следующим образом.

Многогранник P_5^{ac} описывается системой из 510 неравенств и 14 равенств следующих 9 типов (описание ведется в пространстве R^{25}):

1) $x_{ii}=0$ (5 равенств),

2) $\sum_{i=1}^{5} x_{ij}=\sum_{j=1}^{5} x_{ji}=1$, $i, j=1, \ldots, 5$ (9 независимых равенств),

3) $x_{ij}\geqslant 0$ (20 неравенств),

4) $x_{ij}+x_{ji}\leqslant 1$ (10 неравенств),

5) $-x_{ij}-x_{ji}+x_{st}+x_{tr}-x_{rs}\geqslant -1$ (60 неравенств),

6) $x_{ir}+x_{si}+x_{rs}-x_{jr}-x_{sj}-2x_{ij}-2x_{ji}\geqslant -2$ (120 неравенств),

7) $x_{ij}+x_{ir}+x_{ji}+x_{js}+x_{ri}+x_{rt}+x_{tj}+x_{sr}\geqslant 1$ (60 неравенств),

8) $x_{ij}+2x_{ir}+x_{is}+x_{tj}+x_{ts}+x_{ji}+x_{jt}+x_{rt}+x_{rs}+x_{ri}+$ $+2x_{si}\geqslant 2$ (120 неравенств),

9) $x_{ij}+x_{js}+x_{sr}+x_{ri}+2x_{ji}+2x_{si}+x_{sj}\leqslant 3$ (120 неравенств).

Индексы i, j, s, r, t здесь принимают произвольные значения от 1 до 5. Обращаясь опять к истории вопроса, отметим, что в описании Куна [147] многогранника P_5^{ac} отсутствовала серия 9. Интересно также отметить, что многогранник P_5^{ac} является в определенном смысле исторической реликвией. Для него справедлив следующий факт: все вершины многогранника P_5^{ac} смежны. Об этом факте Кун сообщил Гейлу, что привело последнего к переоткрытию так называемых циклических многогранников, играющих фундаментальную роль в теории политопов [115].

Легко видеть, что P_4^{sc} и P_4^{ac} являются симплексами в соответствующих пространствах и их описание получается особенно просто.

Многогранники P_6^{sc} и P_7^{sc} изучались в работе [163]. Однако в описании P_6^{sc} была допущена опечатка, а в линейном описании P_7^{sc} отсутствует более половины фасет.

Полное описание P_6^{sc} и P_7^{sc} было получено С. П. Тарасовым и приводится ниже.

Невырожденное описание P_6^{sc} задается следующей линейной системой: $\tilde{x}=(x_{ij})_{6\times 6}$; $i,\ j,\ k,\ p,\ q,\ l=1\div 6$;

1. $x_{ij}=x_{ji},\ i\neq j$ (15 равенств);
2. $x_{ii}=0$ (6 равенств);
3. $\sum\limits_{i=1}^{6} x_{ij}=2$ (6 равенств);
4. $x_{ij}\geqslant 0$ (15 неравенств);
5. $x_{ij}\leqslant 1$ (15 неравенств);
6. $x_{ij}+x_{ik}+x_{kl}+x_{lp}+x_{jq}+x_{kl}\leqslant 4$ (120 неравенств);
7. $x_{ij}+x_{jk}+x_{kl}\leqslant 2$ (10 независимых неравенств).

Невырожденное описание многогранника P_7^{sc} в пространстве квадратных 7×7-матриц задается линейной системой, состоящей из 9 серий ограничений, первые 7 из которых соответствуют приведенным ограничениям для P_6^{sc}. Число таких ограничений будет, соответственно: 1) 21; 2) 7; 3) 7; 4) 21; 5) 21; 6) 840; 7) 35.

Кроме того, имеются еще две серии неравенств:

8. $x_{ij}+x_{jk}+x_{kl}+x_{lp}+x_{lq}+x_{pq}+x_{pm}+x_{qn}\leqslant 5$ (1260 ограничений);

9. $2x_{ij}+2x_{jk}+2x_{kl}+2x_{lp}+x_{pq}+x_{ql}+x_{pk}+x_{pj}+2x_{km}+$ $+2x_{jn}\leqslant 9$ (2520 ограничений),

$$i,\ j,\ k,\ p,\ q,\ m,\ n=1\div 7.$$

Перейдем теперь к описанию фасет многогранников P_n^{ac} и P_n^{sc} для произвольных значений n. Как уже отмечалось, полное описание фасет P_n^{ac} и P_n^{sc} для $n\geqslant 8$ не получено, а известны лишь отдельные серии фасет.

Большое количество неравенств, определяющих фасеты этих многогранников, содержится в работе [125]. В смысле метода доказательства интересна статья [156]. Изложенный в ней подход позволяет доказать многие предположения из [125]. В работе [156] содержится одна общая теорема, позволяющая конструировать грани многогранника более высокой размерности из фасет специального вида. В [156] показано, что фасетой многогранника P_{10}^{sc} является грань, определяемая неравенством

$$\sum_{(i,j)\in E(g)} x_{ij}\leqslant 9.$$

Здесь суммирование ведется по всем ребрам $(i,\ j)$ графа Петерсена g (см. также [95]).

Гретшель [123] получил некоторые результаты, свидетельствующие о наличии у многогранников P_n^{ac} и P_n^{sc} значительного числа неизоморфных граней. Ниже приводятся некоторые грани многогранника P_n^{sc}.

1) Пусть G_k — полный k-вершинный граф. Неравенство

$$\sum_{(i,j)\in G_k} x_{ij} \leqslant k-1, \quad k \geqslant 3,$$

определяет грань многогранника P_n^{sc} при $n \geqslant 4$.

2) Неравенство $x_{ij} \geqslant 0$ определяет грань многогранника P_n^{sc} при $n \geqslant 5$.

3) Для четырех различных индексов $(i_1 i_2 i_3 i_4) \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ неравенство

$$2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_2} \leqslant 3$$

определяет грань многогранника P_n^{ac} $(n \geqslant 5)$.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗДЕЛЯЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ

Существует общая проблема нижних оценок для сложности решения дискретных экстремальных задач. Для одних типов задач такая проблема точно сформулирована и трудности получения «хороших» нижних оценок связаны со сложностью самого объекта изучения. Такая ситуация имеет, например, место в теории синтеза схем из функциональных элементов [53, 72] в теории дизъюнктивных нормальных форм [24] и т. д. В том классе дискретных экстремальных задач, которым мы занимаемся в этой работе, задача о нижних оценках сложности в большинстве случаев не имеет точной постановки, а полученные результаты не допускают однозначного толкования.

Одним из интересных исключений из этой ситуации являются нижние оценки сложности решения задач в классе так называемых линейных разделяющих алгоритмов, к описанию которых мы переходим. Линейные разделяющие алгоритмы представляют формализацию следующей содержательной задачи: определить с помощью разделяющих гиперплоскостей, принадлежит ли точка $\bar{x}$ заданному подмножеству $C \in R^n$. При этом само «распознавание» носит дихотомический характер, т. е. при проведении некоторой гиперплоскости мы спрашиваем, в каком из порожденных ею полупространств лежит точка $\bar{x}$.

Определение [159]. Линейным разделяющим алгоритмом (ЛРА) называется направленное корневое дерево $T = (V, E)$, все вершины которого разделяются на три непересекающихся класса: v_0 — корень дерева T; V_i — множество внутренних вершин; V_e — множество внешних вершин. Множество ребер E дерева T удовлетворяет следующим условиям:

1) Корень дерева T и все его внутренние вершины имеют полустепень исхода, равную трем.

2) $\operatorname{indeg} v_0=0$; $\operatorname{indeg} v_e=\operatorname{indeg} v_i=1$ и $\operatorname{outdeg} v_e=0$. Каждой вершине $v \in V \setminus V_e$ приписана некоторая линейная функция $L(v)$, где $R^n \xrightarrow{L} R$. Каждому ребру, выходящему из корня дерева или его внутренней вершины, приписан символ из алфавита $\{+, -, 0\}$. Каждая внешняя вершина помечена символом «С» или «В».

ЛРА работает следующим образом: на корень дерева подается точка $\bar{x} \in P$. Вычисляется знак линейной формы, приписанной корню дерева, на точке $\bar{x}$ и в зависимости от полученного результата происходит передача управления по ребру, помеченному тем же знаком, что и вычисленный знак формы. В конечном итоге процесс приходит в некоторую внешнюю вершину. Тогда если этой вершине приписан знак «С», то $\bar{x} \in C$, а если знак «В», то $\bar{x} \in B = R^n \setminus C$.

Из определения ЛРА следует, что каждой его внешней вершине $v \in V_e$ можно однозначно сопоставить некоторое выпуклое многогранное множество $g(v)$, индуцированное тем путем, который ведет из корня дерева в вершину v. При этом множества $g(v)$ попарно не пересекаются и в объединении дают все пространство R^n. Ниже рассматриваются только «корректные» ЛРА, в которых пометки внешних вершин и соответствующие множества «согласованы», т. е. соответствуют друг другу. Естественной мерой сложности ЛРА является число вычислений знака линейных форм или, другими словами, длина наибольшей $B_{\max}$ и наименьшей $B_{\min}$ ветви дерева в «наихудшем» случае.

Рассмотрим применение ЛРА к решению задачи о рюкзаке в следующей постановке. Задан вектор $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b\}$. Требуется определить, существует ли $\{0, 1\}$-вектор $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b.$$

На языке ЛРА эта задача звучит следующим образом.

Пусть $H_i = \left\{\bar{x} \in R^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} i_j x_j = 1, \text{ где } i_j \in \{0,1\}\right\}$

и $C = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} H_i$. Рассмотрим вектор $\bar{x} = \left(\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \ldots, \frac{a_n}{b}\right)$.

Требуется определить, принадлежит ли вектор $\bar{x}$ множеству C или нет.

Теорема [159]. Для задачи о рюкзаке справедлива следующая нижняя оценка

$$B_{\min} \geqslant \frac{(n-1)^2}{2}.$$

Приведенный результат был получен позднее в работе [101]. В работе [100] получена точная по порядку оценка для специальной задачи о рюкзаке, когда (0, 1)-вектор $x=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ имеет не более двух единичных координат. В этом случае для решения задачи требуется порядка $n \ln n$ операций определения знака линейных форм. Ниже приводятся еще две нижние оценки сложности в классе ЛРА.

Теорема [160]. Пусть C — выпуклый многогранник с множеством вершин $\operatorname{extr} C$. Тогда справедливо неравенство

$$2^{B_{\min}} \binom{B_{\min}}{n} > |\operatorname{extr} C|.$$

Если $n=o(|\operatorname{extr} C|)$, то

$$B_{\min} \gtrsim \log_2 |\operatorname{extr} C|.$$

Если C — выпуклый многогранный конус с множеством образующих $\operatorname{exhl} C$, то справедливо неравенство

$$2^{B_{\min}} \binom{B_{\min}}{n-1} \geqslant |\operatorname{exhl} C|.$$

Следует отметить, что приведенная граница достигается на многогранниках следующего вида: 1) выпуклые многоугольники в R^2; 2) выпуклые многогранники в R^n, имеющие k вершин, $k-n-2$ из которых расположены в 2-мерной грани, а остальные $n-2$ — в общем положении в $(n-2)$-мерном подпространстве, ортогональном этой грани.

В классе «траекторных» задач с помощью ЛРА можно оценить снизу сложность решения такой проблемы: какое наименьшее число оценок линейных форм требуется в «наихудшем» случае для того, чтобы показать оптимальность данной траектории τ. Однако на этом пути можно получить лишь полиномиальные нижние границы, ибо число образующих произвольного «траекторного» конуса заведомо не превышает числа пороговых функций на n^2-мерном единичном кубе [83]. Таким образом, нижние оценки для $B_{\min}$ в этом случае не могут быть подняты выше, чем n^4. С другой стороны, нижние оценки для $B_{\min}$ порядка n^2 можно получить в более широком классе алгоритмов подобного типа, когда ветвление происходит в зависимости от знака рациональной функции. Этот и многие другие аналогичные результаты следуют из построенной Рабиным теории «полных аналитических доказательств» [175], частным случаем которой является теория ЛРА. О применении этой теории для задач, связанных с поиском минимальных остовных деревьев взвешенного графа и с поиском минимальных путей в положительно взвешенном графе, см. [188].

Еще один интересный подход к характеризации сложности дискретных экстремальных задач был предложен Хваталом [94].

Определение [94]. Пусть S — конечная система линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m.$$

Будем говорить, что неравенство с целыми коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$$

принадлежит замыканию 1-го порядка системы S, если существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = a_j, \quad j=1, \ldots, n,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i\right] \leqslant b.$$

Здесь, как обычно, $[x]$ — целая часть x. Множество всех линейных неравенств, принадлежащих замыканию 1-го порядка системы S, обозначим через $e^1(S)$ и для $k>1$ рекуррентно определим $e^k(S)$ следующим образом: $e^k(S) = e(S \cup e^{k-1}(S))$. Множество $C(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} e^k(S)$ назовем замыканием S. Из определения замыкания, в частности, вытекает, что все целочисленные векторы, удовлетворяющие системе S, удовлетворяют также и системе $C(S)$. Следующее утверждение является в определенном смысле целочисленным аналогом теоремы Фаркаша.

Теорема [94]. Если неравенство с целыми коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant c_0$$

выполняется на всех целых векторах $\bar{x}$, удовлетворяющих системе S, то оно принадлежит $C(S)$.

Другой целочисленный аналог теоремы Фаркаша получен в [71].

Рассмотрим следующее семейство $\{P(k)\}$ задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП):

$$P(k)=\{\text{extr }(\bar{c}, \bar{x}),\ \bar{x}\in P(S),$$

где $P(S)$ — выпуклый ограниченный многогранник в R^n, определяемый системой линейных неравенств $C(S)$. При этом $C(S)=$ $=e^k(S)\}$. Из определения семейства $\{P(k)\}$ вытекает, что любую задачу ЦЛП типа $P(k)$ можно рассматривать как обычную задачу линейного программирования (ЛП) на многограннике $e^k(S)$. Далее, если экстремум линейной формы $(\bar{c}, \bar{x})$ на множестве $P(S)$ достигается на векторе $\bar{x}_0$, то неравенство

$$(\bar{c}, \bar{x})*(\bar{c}, \bar{x}_0),$$

$$*=\begin{cases}\leqslant, & \text{если extr}=\max,\\ \geqslant, & \text{если extr}=\min,\end{cases}$$

можно «вывести» из системы неравенств, полученных не более чем k замыканиями системы S. Другими словами, существует последовательность линейных неравенств $\{T_r\}$ такая, что:

а) каждое неравенство T_r либо принадлежит системе S, либо замыканию не более чем k предыдущих неравенств;

б) последним в последовательности $\{T_r\}$ является неравенство $(\bar{c}, \bar{x})*(\bar{c}, \bar{x}_0)$.

Хватал предложил называть рангом ЦЛП минимальное число k такое, что $P_1(S)=e^k(S)$. Ясно, что, в определенной мере, ранг может служить мерой сложности соответствующей задачи ЦЛП. Любая ЦЛП, зависящая от одной переменной, имеет ранг не более единицы. Однако уже на плоскости существуют системы сколь угодно большого ранга [94].

В качестве примера рассмотрим еще раз задачу о максимальном паросочетании в графе $G(V, E)$:

$$\begin{cases}\max \sum\limits_{i\in E} x_i,\\ \sum\limits_{i\in u(j)} x_i\leqslant 1.\\ x_i\geqslant 0\end{cases}$$

Здесь $u(j)=(i: v_j\cap e_i\neq\varnothing)$ и x_i — натуральные числа.

По теореме Эдмондса ранг любой такой задачи не превосходит единицы, что в данном случае хорошо характеризует сложность задачи. В общем случае одна и та же дискретная задача может иметь различные описания в виде ЦЛП, а значит иметь и различные ранги, которые могут существенно различаться (см. примеры в [94]). Тем не менее в определенной мере понятие ранга характеризует сложность задачи, что иллюстрируется следующим примером. Рассмотрим известную комбинаторную задачу о поиске в графе максимального внутренне устойчивого множества вершин.

Теорема [94]. Пусть $G=(V, E)$ — неориентированный граф с множеством клик C. Рассмотрим следующую ЦЛП (B) для поиска максимального внутренне устойчивого множества вершин графа G:

$$(B)\begin{cases} \max \sum\limits_{j\in V} x_j, \\ \sum\limits_{j\in A} x_j \leqslant 1, \ A\in C, \\ x_j \geqslant 0 \text{ для } j\in V, \\ x_j \text{ — целые числа.} \end{cases}$$

Тогда для любого числа n существует граф G, ЦЛП (B) которого имеет ранг больший, чем n.

Еще один пример связан с задачей линейного описания множества гамильтоновых циклов графа $G=(V, E)$. Пусть $P^c(G)$ — выпуклая оболочка характеристических векторов гамильтоновых циклов графа G в соответствующем $|E|$-мерном пространстве. Рассмотрим линейную систему L

$$L=\begin{cases} 0\leqslant x_j \leqslant 1, \ j\in E, \\ \sum\limits_{j\in\delta(i)} x_j \leqslant 2, \\ \sum\limits_{j\in\gamma(W)} x_j \leqslant |W|-1, \ W\subset V. \end{cases}$$

Эта система определяет многогранник P такой, что $P_1 = P^c(G)$. По-видимому, система L также имеет неограниченный ранг. Во всяком случае в работе [94] показано, что если G — граф Петерсена и мы хотим из L вывести неравенство

$$\sum_{j\in E} x_j \leqslant 9,$$

эквивалентное отсутствию в G гамильтонова цикла, то это неравенство принадлежит уже лишь замыканию пятого порядка системы L.

Дальнейшее развитие приведенные идеи получили в [97], где была прослежена аналогия между процессом построения замыкания системы неравенств и выводом формул в формальной системе.

Другой подход для получения нижних оценок был рассмотрен в работе [178]. Каждому свойству графа можно поставить в соответствие булеву функцию, определенную на матрицах инциденций графов и принимающую значение единица на графах, обладающих этим свойством, и нуль на всех остальных. Свойство называется нетривиальным, если эта функция не равна тождественно константе. Свойство графа называется монотонным, если соответствующая булева функция монотонна. Свойство графа называется инвариантным, если оно не зависит от нумерации вершин графа.

Теорема [178]. Пусть P—произвольное нетривиальное, монотонное, инвариантное свойство n-вершинного графа G и f_p—сопоставленная ему булева функция. Обозначим через $\mathscr{L}(f_p)$ число существенных* переменных функции f_p. Введем функцию Шеннона $\mathscr{L}(n)$, где

$$\mathscr{L}(n)=\min_p \mathscr{L}(f_p).$$

Тогда справедливо неравенство $\mathscr{L}(n)\geqslant\frac{n^2}{16}$.

Хорошо известными в теории графов монотонными свойствами являются связность графа и свойство графа иметь гамильтонов цикл.

§ 7. ДИСКРЕТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПОЛНОТА

По-видимому, одним из важных этапов в понимании природы трудностей задач дискретной оптимизации является теория универсальных переборных задач или полиномиальной сводимости, построенная в начале семидесятых годов Куком (1971 г.) и Карпом (1972 г.). Несколько позже близкие результаты были получены в работе [38].

В работах этих авторов было впервые продемонстрировано, что практически все традиционно сложные задачи дискретной оптимизации и теории графов, для которых на протяжении вот уже почти тридцати, а иногда и более лет безуспешно пытались найти эффективные алгоритмы решения, либо вообще с точностью до разумного изоморфизма представляют одну задачу, либо, во всяком случае, очень тесно связаны; так что существование или несуществование эффективного алгоритма для хотя бы одной из этих так называемых «полных» задач влечет за собой существование или несуществование эффективных алгоритмов для всех остальных задач (несколько ранее некоторые частные виды сводимостей рассматривались в работах [5, 46]).

Основные результаты работ Кука и Карпа относятся к следующей проблеме. Рассматривается класс задач распознавания свойств объектов, которые закодированы в виде совокупности

* Переменная x_i булевой функции $f(x_1x_2\ldots x_n)$ называется существенной, если существует такой набор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i-1}1\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n)$, что $f(\widetilde{\alpha})\neq f(\widetilde{\beta})$ где $\widetilde{\beta}'=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i-1}0\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n)$.

слов некоторого языка над конечным алфавитом, например {0, 1}. Обозначим через P класс языков, распознаваемых за полиномиальное время на одноленточных детерминированных машинах Тьюринга, а через NP — класс языков, распознаваемых за полиномиальное время на одноленточных недетерминированных машинах Тьюринга.

По существу, в класс P входят все «хорошо» решаемые задачи, т. е. такие задачи, для которых существует полиномиально ограниченный от длины кодировки входной информации алгоритм (такое понятие «эффективного» алгоритма предложил Эдмондс). Сейчас, по-видимому, еще трудно судить о том, насколько естественным является такое понятие «эффективности», так как, с одной стороны, все известные «хорошо» решаемые задачи действительно имеют «эффективные» в этом смысле алгоритмы, а с другой стороны, вызывает серьезные сомнения сама попытка оценивать сложность решения конкретных задач с помощью такой абсолютной меры, как время вычисления на машине Тьюринга. В частности, в настоящее время неизвестно ни одной нетривиальной (в содержательном смысле) д. э. з. с нелинейной нижней оценкой временной сложности.

Неформально языки из NP распознаются с помощью процесса, который, при наличии нескольких альтернатив, может проследить вычисления в каждой из них, а затем уже произвести выбор (в детерминированном варианте такая стратегия может привести к экспоненциальному числу шагов). Иными словами, в NP входят проблемы, решаемые с помощью полиномиально ограниченного по глубине обратного поиска, т. е. если решение угадано, то можно за полиномиально ограниченное время проверить этот факт. Короче говоря, различие между P и NP можно выразить как различие между выражениями: эффективно найти и эффективно проверить найденное решение.

Пример. Для того чтобы проверить, является ли число n составным, достаточно указать его делители. Однако неясно, как найти делители n за полиномиальное время (этот полином должен быть от $\lg_2 n$). Интересно отметить, что простоту числа n можно проверить на недетерминированной машине Тьюринга за $[41\, g_2 n]$ шагов (см. [173]). В 1975 году Миллер показал, что если обобщенная гипотеза Римана справедлива, то множество простых чисел лежит в P [157]. В [176, 185, 186] приводятся полиномиальные алгоритмы, «почти всегда» проверяющие простоту числа.

Центральным моментом в теории универсальных переборных задач является следующее понятие полиномиальной сводимости, определяющее частичный порядок на множестве языков.

Определение [138]. Пусть Σ — множество всех слов конечной длины из нулей и единиц, а Π — класс отображений из Σ в Σ, вычислимых за полиномиальное время на одноленточной машине Тьюринга.

Пусть L и M — языки из Σ. Говорят, что L полиномиально сводится к $M|L\infty M|$, если существует отображение $f\in\Pi$ такое, что

$$f(x)\in M\leftrightarrow x\in L.$$

Язык M называется полиномиально полным или просто полным, если $M\in NP$ и любой язык из NP сводится к M.

Замечание. Данное определение принадлежит Карпу [138, 139]. Вообще говоря, сводимость по Карпу является более сильной, чем сводимость по Куку, определенная в работе [98]. Обе сводимости предполагают наличие оракула, выдающего информацию о принадлежности слова к некоторому фиксированному языку. Отличие сводимости, грубо говоря, состоит в том, что процесс Кука может обращаться к оракулу на всем протяжении своего функционирования, а процесс Карпа может обратиться к оракулу лишь в конце вычисления [149].

Кук ввел понятие полного языка и построил первые примеры полных языков. В частности, в [98] показано, что проблема распознавания выполнимости конъюнктивной нормальной формы (к. н. ф.), каждая дизъюнкция которой содержит не менее трех членов, полна. Известно, однако, что распознавание выполнимости к. н. ф., каждая дизъюнкция которой содержит не более двух членов, входит в P. Впервые появление «качественного» скачка при переходе от «двух» к «трем» было отмечено Эдмондсом в работах о пересечениях матроидов.

Карп вслед за Куком показал, что большое количество традиционно трудных проблем дискретной математики являются структурно одинаковыми — полиномиально полными.

Основную долю работ по этой тематике, опубликованных за последнее время, составляют работы, посвященные доказательству полноты конкретных задач. Основной вопрос о соотношении P и NP привлекает не слишком большое непосредственное внимание. Широко принята гипотеза, что $P\neq NP$, так что в этом смысле полнота данной конкретной проблемы служит достаточным основанием для дальнейшей бесперспективности поисков «хороших» алгоритмов для ее решения. Некоторые списки полных задач содержатся в работах [39, 118, 138, 139].

В настоящее время фронт исследований несколько изменился. Широкое распространение получили «хорошие» приближенные или вероятностные алгоритмы, учитывающие, что на самом деле нам необходимо решать не задачи распознавания, а задачи оптимизации. Прежде чем излагать результаты этих исследований, остановимся сначала на результатах, касающихся отношения классов P и NP. В работе [76] показано, что существуют такие рекурсивные множества A и B, что $P^A=NP^A$ и $P^B\neq NP^B$*. Кроме того, существует такое рекурсивное множество C, что вопрос

* Под $P^A(NP^A)$ понимается класс языков, распознаваемых за полиномиальное время на детерминированных (недетерминированных) машинах Тьюринга с оракулом A.

$P^C = NP^C$, или $P^C \neq NP^C$ не зависит от аксиом теории множеств [126]. В [148] показано, что если $P \neq NP$, то существуют проблемы, не являющиеся полными, но и не входящие в P. В работах [82] и [184] приводятся некоторые соображения в пользу того, что все полные множества в определенном смысле изоморфны.

Определение [82]. Назовем языки $A \in \Sigma^*$ и $B \in \Gamma^*$ P-изоморфными, если существует отображение $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ со следующими свойствами:

1) f взаимно однозначно;

2) f — полиномиальная сводимость A к B;

3) f^{-1} — полиномиальная сводимость B к A.

В [82] показано, что большое число полных проблем являются P-изоморфными, так что можно сказать, что все известные на сегодняшний день полные множества P-изоморфны. Кроме того, в [82] содержится теорема, дающая критерий P-изоморфизма фиксированного языка задаче о выполнимости конъюнктивной нормальной формы.

Остановимся теперь на некоторых вероятностных и приближенных формулировках задач оптимизации в связи с теорией полиномиальной полноты.

В работе [73] доказано следующее утверждение: почти все задачи целочисленного $\{0, 1\}$-программирования можно решить на детерминированной машине Тьюринга за квадратичное время от длины записи исходной информации. В то же время общая задача целочисленного линейного программирования является полиномиально полной. Аналогичные результаты известны также для многих других содержательных дискретных экстремальных задач [37, 57].

Если бы была справедлива гипотеза о P-изоморфизме всех полных множеств, то это бы означало, что «почти все» слова полного языка распознаются за полиномиальное время. Заметим также, что справедливость гипотезы о P-изоморфизме эквивалентна отрицательному решению $P \overset{?}{=} NP$ проблемы, так как если $P = NP$, то каждое конечное непустое множество слов является полным.

Итак, если гипотеза о P-изоморфизме справедлива, то все полные задачи представляют по существу одну проблему. Однако полиномиальная полнота и связанные с ней понятия вводились для задач распознавания. Нас же интересуют оптимизационные проблемы и часто не только точные, но и приближенные их решения. В связи с этим возник ряд проблем, связанных с исследованием приближенных задач оптимизации. Мы дадим содержательное описание конструкции и рассмотрим некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Пусть Σ^* — некоторый язык. Оптимизационной проблемой называется следующая пятерка:

$A = \langle$ вход$_A$, выход$_A$, допустимые решения (доп A), Q, мера m_A на доп A со значениями в $Q \rangle$;

вход$_A \subset \Sigma^*$; выход$_A \subset \Sigma^*$; доп $A \subset$ (вход$_A \times$ выход$_A$) — неформально это множество приближенных решений, соответствующих входам. Иными словами, для любого слова u, принадлежащего входу, определено отображение SOL: $u \to \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ принадлежит выходу. $\tilde{u}$ — это множество приближенных решений, отвечающих данной задаче u. Считается, что $\tilde{u}$ — конечное множество.

Q — вполне упорядоченное множество, например, множество натуральных или рациональных чисел,

m — мера на приближенных решениях, т. е.

$$m: \mathrm{SOL}_A(\text{вход}_A) \to Q.$$

Для всякого u, принадлежащего вход$_A$, определено оптимальное по мере m_A решение u_A^*, где

$$u_A^* = f(m_A(x)), \text{ где } f = \min \text{ или } \max, \text{ а } x \in \mathrm{SOL}_A(u).$$

Алгоритмом K называется любая процедура, ставящая в соответствие слову u на входе слово $v \in \mathrm{SOL}_A(u)$. Эта процедура обозначается так: $u \xrightarrow{K} v$. Качество работы алгоритма можно характеризовать по-разному. Например, определим приближение

$$K_A(u) = \{m_A(v): v \in \mathrm{SOL}_A(u), \text{ где } u \xrightarrow{K} v\}.$$

Теперь локальная относительная характеристика качества алгоритма K может быть задана так:

$$r_A(K, u) = \begin{cases} u_A^*/K_A(u), & \text{если } f = \max, \\ K_A(u)/u_A^*, & \text{если } f = \min. \end{cases}$$

Определенным недостатком такой характеристики является неинвариантность при линейных преобразованиях меры. Существуют и другие характеристики качества алгоритма. Примерами их являются следующие [74]:

$$r'_A(K, u) = \left| \frac{u^* - K_A(u)}{u^* - u_*} \right|,$$

$$r''_A(K, u) = \left| \frac{u^* - K_A(u)}{\min(u^*, K_A(u))} \right|.$$

Здесь u_* — мера «наихудшего» решения задачи u. Общей оценкой эффективности приближенного алгоритма служит следующая характеристика

$$R[K, A](n)=\max\{r_A(K, u) \text{ (или } r'_A,\ r''_A);\ u \in \text{вход}\, A,\ |u|\leqslant n\},$$

являющаяся аналогом хорошо известной в дискретном анализе функции Шеннона для относительной характеристики. Если взять в качестве примера задачу о рюкзаке P, то ее приближенная постановка в смысле приведенных выше определений будет выглядеть следующим образом:

$\text{вход}_P=\{\langle T, S, b\rangle : T$ — множество; $|T|<\infty$; $S:T\to Q$; $b>0,\ b\in Q\}$,

$$\mathrm{SOL}_P(\langle T, S, b\rangle)=\left\{T'\subseteq T: \sum_{x\in T'} S(x)\leqslant b\right\},$$

$$m_P(T')=\sum_{x\in T'} S(x).$$

Джонсон [136] построил приближенный алгоритм L_K для задачи о рюкзаке со временем работы $O(n^k)$ и с оценкой эффективности

$$R[L_K](n)\leqslant\frac{k+1}{k}.$$

Здесь k — произвольное натуральное число. Ниже мы будем рассматривать в качестве локальной характеристики $r_A''(K, u)$. В дальнейшем этот результат был улучшен в [2, 134, 180, 181]. В работах [134, 180] рассматривалась приближенная постановка оптимизационной задачи о рюкзаке, т. е.

$$\begin{cases}\max\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, & c_i\geqslant 0,\\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\leqslant b, & a_i\geqslant 0,\quad x_i\geqslant 0,\end{cases}$$

и были получены приближенные ε-алгоритмы со временем работы, полиномиальным от длины входа и $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. со временем работы $P\left(|x|, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, где P — полином от 2-х переменных, $|x|$ — длина слова x (оценка Джонсона имеет вид $\sim |x|^{\frac{1}{\varepsilon}}$).

Важно отметить, что ряд элементарных преобразований задачи, инвариантных относительно точного решения, отнюдь не являются такими при приближенных формулировках. Это, например, относится к преобразованиям: $f\to f+e$, $f\to f^2$, $\max f\to -\min(-f)$ и т. д. В [182] приведено несколько задач, приближенные варианты которых являются полиномиально полными. В частности, такой задачей является задача коммивояжёра с произвольной матрицей расстояний.

Замечание. Интересно отметить, что некоторое сужение класса матриц расстояний в задаче коммивояжёра (до класса матриц, элементы которых удовлетворяют неравенству треугольника) уже позволяет строить полиномиальные приближенные алгоритмы для ее решения.

В работе [116] показано, что любой приближенный алгоритм раскраски графа G в число цветов $m(x) < 2\gamma(G) + C$ эквивалентен алгоритму правильной раскраски. Близкие результаты были получены также в [56]. В связи с приближенной постановкой оптимизационных задач возникла возможность их более тонкой классификации.

Определение. Задача называется полиномиально ε-приближаемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный алгоритм L_ε такой, что $R[L_\varepsilon] < \varepsilon$.

Определение [172]. Задача называется полностью полиномиально приближаемой, если она является ε-приближаемой и время работы t_ε ее ε-алгоритма L_ε оценивается следующим образом: $t(L_\varepsilon) \leqslant P\left(|x|, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, где P — полином от 2-х переменных, а $|x|$ — длина входа. Примером полностью ε-приближаемой задачи является задача о рюкзаке.

В работе [136] были также построены приближенные алгоритмы для поиска максимальной клики в графе и для задачи о минимальном покрытии множества семейством его подмножеств, точность которых увеличивается с ростом размерности задачи. Так, если алгоритм K_j работает время $t(K_j) = O(n^{j+2})$, то он строит клику, размер $m(K_j)$ которой удовлетворяет неравенству:

$$m(K_j) \geqslant \frac{u^*(K_j)}{O\left(n^{\frac{1}{j+1}}\right)}.$$

В задаче о покрытии градиентный алгоритм K со временем работы $O(n \ln n)$ строит покрытие, мощность $m(K(x))$ которого удовлетворяет соотношению

$$m(K(x)) \simeq u^*(K(x)) \ln n.$$

Обе оценки являются достижимыми. Результаты, аналогичные последнему, были получены в работах [55, 60].

Определение [172]. Рассмотрим семейство оптимизационных задач

$$A_k^c = \{x \in \text{вход}_A / u^*(x) \leqslant k\}.$$

Назовем оптимизационную задачу простой (S), если для всякого натурального k задача A_k^c является полиномиальной. В противном случае, задача называется жесткой (R) (rigid).

(S)-задачами является, например, задача о максимальной клике, задача о рюкзаке на выполнимость, задача о максимальной выполнимости конъюнктивной нормальной формы.

(R)-задачами, если $P \neq NP$, будут многие рассмотренные выше задачи, приближенное решение которых, с точностью выше некоторой, эквивалентно точному решению. Такими задачами являются задача о коммивояжёре с произвольной матрицей расстояний, задача о разбиении n чисел на наименьшее число подмножеств, сумма элементов в каждом из которых не превосходит P (задача об «упаковке») и т. д.

Определение [172]. Простая оптимизационная задача A называется полиномиально простой (PS), если существует алгоритм для решения «урезанных» задач $A_k{}^c$, время решения которых при входе x ограничено полиномом $q(|x|, k)$. Следующее утверждение дает некоторый признак полиномиальной простоты.

Лемма [172]. Для любого полинома $P(n)$ из полиномиальной простоты задачи A следует полиномиальная простота задачи: $A_{P(k)}{}^c = \{\text{вход}_A/u^*(x) \leqslant P(k)\}$.

В [74] отмечается, что из этой леммы, в частности, следует нополиномиальная простота задач о максимальной выполнимости и максимальной клике. Введенные выше понятия связаны следующими простыми утверждениями.

Теорема [172]. Если оптимизационная задача A является P-приближаемой, то она является и простой.

Обратное утверждение неверно, что показывает задача коммивояжёра.

Теорема [172]. Если оптимизационная задача A является полностью P-приближаемой, то A полиномиально проста.

В самое последнее время появился ряд работ по так называемой структурной эквивалентности оптимизационных задач, которые очень близко связаны с проблемами обратной оптимизации, рассмотренными выше (см. [74, 75]).

В работе [117] приводится аннотированная библиография по приближенным алгоритмам для задач комбинаторного программирования, содержащая 48 наименований.

§ 8. ЗАДАЧИ НА УЗКИЕ МЕСТА

Наряду с линейными дискретными задачами в ряде ситуаций существенную роль играют так называемые задачи на «узкие места». Если ограничиться классом траекторных задач, то в этом случае задачи на узкие места можно сформулировать следующим образом.

На каждой траектории $\tau \in M_n$ определяется «узкое» место, т. е. ее минимальный элемент. Задача состоит в нахождении траектории с максимальным узким местом. Иногда каждой траектории ставится в соответствие не минимальный, а максимальный ее элемент. Тогда задача состоит в нахождении траектории с минимальными из этих элементов. Используя понятие лексикографического упорядочения, можно сформулировать более общую проблему узких мест. Пусть элементы матрицы $A = \|r_{ij}\|$ — неотрицательные числа. Элементы каждой траектории $\tau = (a_1 a_2 \ldots a_n) \in M_n$ упорядочим следующим образом:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n.$$

В этом случае вектор $\bar{\tau} = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ будем называть вектором-нормой траектории $\tau \in M_n$.

Определение. Будем говорить, что траектория $\tau_i \in M_n$ больше траектории $\tau_j \in M_n$, если вектор-норма $\bar{\tau}_i$ лексикографически больше вектора-нормы $\bar{\tau}_j$. Общая проблема узких мест состоит теперь в поиске минимальной траектории в вышеприведенном смысле. Ниже будет описана связь между классом линейных траекторных задач и общей проблемой узких мест. Пусть $A = \| r_{ij} \|$ и $r_{ij} \geqslant 0$. На каждой паре ненулевых элементов a_{ij} и a_{sk} матрицы A определим функцию $f(a_{ij}, a_{sk}) = \max\left\{\frac{a_{ij}}{a_{sk}}, \frac{a_{sk}}{a_{ij}}\right\}$. Разбросом матрицы A назовем минимум этой величины по всем парам ненулевых элементов этой матрицы. Обозначим разброс через $\lambda(A)$.

Теорема. Общая задача на узкие места всегда может быть сведена к линейной задаче на том же множестве M_n траекторий. Если разброс матрицы A не меньше, чем n, то эти задачи эквивалентны.

Само сведение является карйне простым и состоит в возведении элементов матрицы A в степень, величина которой зависит от разброса матрицы A. Предыдущая теорема содержится, по существу, в работе [40] (см. также [89, 193]). Заметим также, что задача на узкие места является частным случаем общей проблемы узких мест, а в ряде случаев они просто совпадают.

Хотя задачи на узкие места и являются частным случаем линейных задач на том же множестве траекторий, решать их сведением к этим задачам в большинстве случаев нецелесообразно, так как, вообще говоря, проблема узких мест является более простой, чем линейная проблема оптимизации. Для решения общей проблемы узких мест и ряда частных задач подобного типа имеются различные алгоритмы. Один класс задач оптимизации на узкие места был рассмотрен Эдмондсом и Фалкерсоном [109].

Определение. Пусть E — конечное множество. Система подмножеств $M \subseteq 2^E$ называется антицепью, если из $A, B \in M$ следует, что $A \not\subseteq B$ и $B \not\subseteq A$.

Пусть f — произвольное «взвешивание» множества E, т. е. приписывание элементам множества E произвольных вещественных чисел.

Теорема (Эдмондс — Фалкерсон). Для любой антицепи

$M \subseteq 2^E$ и любого «взвешивания» f существует единственная так называемая блок-антицепь $P = B(M) \subseteq 2^E$ такая, что справедливо равенство

$$\min_{m \in M} \max_{x \in m} f(x) = \max_{p \in P} \min_{x \in p} f(x). \qquad (8.1)$$

При этом блок-антицепь P состоит из всех подмножеств минимальной мощности, имеющих непустое пересечение с каждым элементом множества M.

Элемент x, на котором достигается равенство (8.1), может быть получен с помощью следующего «порогового» алгоритма.

Алгоритм. Элементы $x \in E$ выбираются в порядке возрастания функции $f(x)$ до тех пор, пока выбранное множество не содержит элементов из M. Как только последнее условие нарушается, алгоритм прекращает работу и выдает последний выбранный элемент x_0.

Примеры. 1) Трансверсалью квадратной матрицы порядка n с действительными элементами называется некоторое подмножество элементов матрицы, пересекающихся с каждой линией матрицы ровно по одному элементу. Другими словами, множество трансверсалей есть множество последовательностей $\{a_{i\pi(i)}\}$, где π — произвольная перестановка чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, a_{ij} — элемент матрицы A.

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ и S_n — симметрическая группа порядка n.

Имеем из (8.1)

$$\max_{\pi \in S_n} \min_{i \in I} a_{i\pi(i)} = \min_{A, B \in I} \max_{i \in A, j \in B} a_{ij}.$$

Здесь $|A| + |B| = n + 1$.

2) Пусть M — множество путей в неориентированном графе между выделенными вершинами a и b. Тогда $P = B(M)$ является множеством соответствующих разрезов и равенство (8.1) выражает хорошо известную теорему Форда—Фалкерсона.

Для приведенных примеров существует полиномиальные алгоритмы для распознавания альтернативы:

$$\exists m \in M, \text{ что } m \in E_0, \text{ или } \exists p \in P, \text{ что } p \in E \setminus E_0.$$

Поэтому существуют хорошие алгоритмы для решения соответствующих задач на узкое место.

В качестве еще одного содержательного примера можно привести следующую транспортную задачу на узкие места.

Рассмотрим многогранник T, заданный ограничениями

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = r_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=s_j, \quad j=1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i=\sum_{j=1}^{m} s_j,$$

$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Пусть $A=\|f_{ij}\|$ — матрица весов, где f_{ij} — время перевозок из пункта i в пункт j. Тогда задача на узкие места состоит в следующем: определить

$$\min_{\bar{t} \in T} \max_{t_{ij} \in \bar{t}} f_{ij}. \tag{8.2}$$

Здесь t_{ij} — ненулевая компонента вектора t из многогранника T. Содержательно, задача (8.2) состоит в удовлетворении запросов потребителей за минимальное время.

Дальнейшее теоретическое развитие идей блок-пар содержится в работах Фалкерсона [111—113].

Приведенный выше «пороговый» алгоритм использовался при решении ряда экстремальных задач на матроидах [193], а также в работе [120], где рассматривалась задача программирования на узкое место следующего вида:

$$\min_{\substack{\bar{x} \in P \\ \bar{x} \neq 0}} \max_{x_j > 0} c_j,$$

$$P=\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j=b_i,\ i=1, \ldots, m,\ x_j \geqslant 0,\ j=1, \ldots, n,\right.$$

$$\left. c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n\right\}. \tag{8.3}$$

Возможность применения «порогового» алгоритма следует из следующей теоремы.

Теорема. Если $P \neq \varnothing$, то задача (8.3) имеет оптимальное базисное решение. Таким образом, исходная задача эквивалентна следующей:

$$\min_{\bar{x} \in X} \max_{x_j > 0} c_j.$$

Здесь X — множество неотрицательных базисных решений системы $A\bar{x}=\bar{b}$. Применим теперь для поиска оптимального базиса «жадный пороговый» алгоритм.

Будем последовательно, пока это возможно, на каждом шаге выбирать вектор-столбец, не зависящий от уже выбранных столбцов и имеющий минимально возможный вес c_j. Так мы получим некоторый базис B матрицы A. Обозначим через y соответствующее ему решение линейной системы.

Теорема [120]. Если y — неотрицательный вектор, то он является оптимальным решением задачи (8.3).

Следствие. Для задачи на узкие места

$$\min_{\bar{x}\in P} \max_{x_j\neq 0} c_j,$$

где $P=\{\bar{x}/A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{b}\neq 0\}$, жадный пороговый алгоритм дает оптимальное решение.

Обратная задача на узкие места. Пусть R_n — пространство квадратных матриц порядка n с вещественными элементами. Через R_n^+ будем обозначать выпуклый конус пространства R_n, содержащий только матрицы с неотрицательными элементами. Если $A\in R_n$ и $\tau_i\in M_n$, то любой из максимальных элементов $\tau_i(A)$ будем называть норменным, а его значение обозначим через $\|\tau_i(A)\|$. Совокупность всех норменных элементов траектории τ_i в матрице A обозначим через $H_A(\tau_i)$.

Определение. Подмножество U элементов матрицы A называется норменным, если выполнено следующее условие

$$U\cap H_A(\tau_i)\neq\varnothing,\quad i=1,\ \ldots,\ |M_n|.$$

Таким образом, норменное множество должно содержать хотя бы по одному норменному элементу каждой траектории. Разобьем пространство R_n на классы R^1, R^2, $\ldots$, $R^{|M_n|}$, относя в класс R^i те и только те матрицы, у которых в множестве оптимальных траекторий есть траектория τ_i (оптимальность в данном случае понимается в смысле минимума $\|\tau_i(A)\|$). Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_t$ — все норменные множества. Каждый из классов R^i разобьем, в свою очередь, на подклассы $R_1^i, \ldots, R_r^i$, относя в подкласс R_k^i те и только те матрицы, у которых среди норменных множеств есть множество U_k. Можно показать, что каждый класс R_k^i является выпуклым замкнутым конусом в пространстве R_n. В следующем утверждении дана некоторая абстрактная характеристика конуса R_k^i.

Пусть $I=\|a_{ij}\|\in R_n$ и $a_{ij}=1$. Обозначим через $R_{k,0}^i$ множество всех матриц из нулей и единиц, принадлежащих конусу R_k^i. Пусть

$$S(k,\ i)=I\cup R_{k,0}^i.$$

Теорема. Матрицы класса $S(k,\ i)$ порождают конус R_k^i.

Таким образом совокупность матриц из нулей и единиц конуса R_k^i вместе с матрицей I порождает весь конус R_k^i. Более точное описание порождающего множества (неизбыточного) зависит от комбинаторной структуры множества M_n.

§ 9. УСТОЙЧИВОСТЬ В ДИСКРЕТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Понятие устойчивости является традиционно важным в различных разделах математики. Определенное внимание этому понятию уделялось и в теории д. э. з. Следует отметить, что существует много различных понятий устойчивости, связанных как с разнообразием имеющихся задач, так и с разнообразием ситуаций.

Мы выделим только два существенных на наш взгляд понятия устойчивости: устойчивость по функционалу и устойчивость по решению.

В первом случае исследуется вариация оптимума функционала при возмущении параметров задачи, а во втором ищутся пределы вариаций параметров задачи, сохраняющие те или иные свойства найденного оптимального решения.

Первый случай является более традиционным и ему посвящено значительное число исследований, относящихся к линейному и нелинейному случаям. Типичными результатами здесь являются разного рода неравенства, характеризующие разность экстремальных решений через некоторые функции, связанные с параметрами задачи.

Второму случаю уделялось значительно меньше места и результатов, связанных с ним, немного. Отметим, что, в случае задачи линейного программирования, рассматривались два понятия устойчивости во втором смысле.

1) Пусть в задаче

$$\begin{cases}(\bar{c}, \bar{x}) \to \min, \\ A\bar{x} \geqslant \bar{b}, \\ \bar{x} \geqslant 0\end{cases}$$

x_0 — есть один из оптимальных планов и возмущению подвергаются коэффициенты целевой функции — компоненты вектора $\bar{c}$. Спрашивается, в «какой мере» значительными могут быть эти изменения с тем условием, чтобы $\bar{x}_0$ оставался оптимальным планом для любой из «возмущенных» задач.

2) В условиях предыдущей задачи «возмущению» подвергаются элементы матрицы и компоненты вектора $\bar{b}$. Ищется предел этих возмущений, при которых сохранялся бы базис, на котором построен оптимальный план (другими словами, в новом оптимальном плане нули были бы на тех же местах, что и у вектора $\bar{x}_0$).

Имеется ряд работ, в которых в подобной постановке даны алгоритмы для нахождения некоторых оценок вариаций соответствующих параметров. Эти работы не имеют комбинаторного смысла и мы не будем на них останавливаться. Понятие устойчивости решения в классе траекторных задач было введено в работах [43, 44]. Мы рассмотрим соответствующие понятия и результаты, относящиеся к задаче коммивояжёра.

Перенумеруем произвольным образом все гамильтоновы циклы полного n-вершинного графа G_n с матрицей расстояний $A=\|r_{ij}\|$ и обозначим через $\varphi(A)$ множество номеров гамильтоновых циклов, имеющих минимальную длину в графе G_n. В пространстве R_n квадратных матриц порядка n введем чебышевскую метрику.

Определение. Шар $S_A \subseteq R_n$ с центром в A называется шаром устойчивости матрицы A, если для любой матрицы $A' \in S_A$ выполнено условие: $\varphi(A') \subseteq \varphi(A)$.

Таким образом, множество оптимальных траекторий любой из матриц шара устойчивости принадлежит множеству оптимальных траекторий центра этого шара. В частности, если матрица A имеет единственную оптимальную траекторию, то все матрицы из шара устойчивости S_A имеют в точности ту же самую оптимальную траекторию. Ясно, что если S_A — шар устойчивости матрицы A и $S_A' \subseteq S_A$, то S_A' — также шар устойчивости этой матрицы. Радиус шара S_A обозначим через $\rho(S_A)$. Точную верхнюю грань чисел $\rho(S_A)$ по множеству всех шаров устойчивости матрицы A обозначим через $\rho_0(A)$. В случае, когда все гамильтоновы циклы матрицы A имеют одинаковую длину (см. [43]), положим $\rho_0(A)=0$.

Теорема [43]. Справедлива следующая формула

$$\rho_0(A)=\min_{j \notin \varphi(A)} \max_{i \in \varphi(A)} \frac{\tau_j(A)-\tau_i(A)}{2[n-|\tau_i \cap \tau_j|]}.$$

Здесь $|\tau_i \cap \tau_j|$ — общее число ребер гамильтоновых циклов τ_i и τ_j, а $\tau_i(A)$ — «длина» гамильтонова цикла в графе с матрицей весов A.

Ряд аналогичных результатов для всего класса траекторных задач в ситуации, когда «возмущениям» могут подвергаться произвольные множества элементов матрицы весов, приведен в работе [44].

В [44] рассмотрены другие содержательные определения понятия устойчивости и, в определенном смысле, установлена их эквивалентность определению, приведенному выше.

Следует также отметить, что если за определение радиуса устойчивости матрицы весов A, имеющей фиксированную оптимальную траекторию τ_i, принять радиус «максимального» шара, любая матрица из которого имеет τ_i своей оптимальной траекторией, то справедливы следующие утверждения:

1) Любая матрица A, обладающая хотя бы двумя оптимальными траекториями, имеет радиус устойчивости, равный нулю (легко показать, что множество таких матриц имеет лебегову меру нуль).

2) Если матрица A имеет единственную оптимальную траек-

торию τ_s и $\| \quad \|$ — метрика в пространстве R_n, а $\| \quad \|^*$ — метрика в сопряженном пространстве, то

$$\rho_0(A) = \min_{i \neq s} \frac{\tau_i(A) - \tau_s(A)}{\| \tau_i - \tau_s \|^*}.$$

В данном случае под τ_i мы понимаем матрицу из R_n, у которой на местах, соответствующих траектории τ_i, стоят единицы, а остальные элементы — нули (характеристическую матрицу траектории τ_i).

Таким образом в этом случае можно дать «явное» выражение для радиуса устойчивости для произвольной метрики при условии, что «явно» известна метрика в сопряженном линейном пространстве.

Следует также отметить, что в чисто утилитарном смысле формула из предыдущей теоремы является малопригодной для вычислений, так как, например, для нахождения радиуса устойчивости требуется определение всех оптимальных решений. Однако следует иметь в виду, что нахождение радиуса устойчивости данной конкретной матрицы автоматически позволяет решать все задачи из шара устойчивости этой матрицы. Это соображение может оказаться полезным при решении вопросов, связанных с табулированием соответствующих проблем. Ряд оценок для радиуса устойчивости, легко вычислимых по матрице расстояний, приведен в [43].

Некоторые дескриптивные результаты, касающиеся проблемы устойчивости в д. э. з., получены в [70, 153, 154].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Анастасян Ю. Г.*, Об одном классе задач целочисленного линейного программирования. Кибернетика, 1975, № 3, 61—64 (РЖМат, 1975, 12В778)
2. *Бабат Л. Г.*, Линейные функции на N-мерном кубе. Докл. АН СССР, 1975, *221*, № 4, 761—762 (РЖМат, 1975, 9В519)
3. *Береснев В. Л.*, *Гимади Э. Х.*, *Дементьев В. П.*, Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск, «Наука», 1978, 333 с. (РЖМат, 1978, 9В765 К)
4. *Боровков А. А.*, К вероятностной постановке двух экономических задач. Докл. АН СССР, 1962, *146*, № 5, 983—986 (РЖМат, 1963, 3В370)
5. *Визинг В. Г.*, Сводимость ряда задач теории графов к задаче о минимальной связке. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн.». Вып. 2. Харьков, 1971, 52—55 (РЖМат, 1972, 3В275)
6. —, Значения целевого функционала в задаче очередности, мажорируемые средним значением. Кибернетика, 1973, № 5, 76—78 (РЖМат, 1974, 4В516)
7. *Габович Е. Я.*, Константные задачи дискретного программирования на множествах подстановок. Кибернетика, 1976, № 5, 128—134 (РЖМат, 1977, 3В664)
8. —, *Меламед И. И.*, Асимптотическая точность для массовых H-задач. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1974, вып. 473, 124—135 (РЖМат, 1975, 2В738)
9. *Гимади Э. Х.*, *Глебов Н. И.*, *Перепелица В. А.*, Алгоритмы с оценками

для задач дискретной оптимизации. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 31. М., «Наука», 1976, 35—42 (РЖМат, 1976, 6В728)
10. —, *Перепелица В. А.*, Статистически эффективный алгоритм выделения гамильтонова контура (цикла). В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 22. Новосибирск, 1973, 15—28 (РЖМат, 1973, 10В350)
11. *Гирлих Э.*, *Ковалев М. М.*, Класс многогранников задачи стандартизации с максимальным числом вершин. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1974, № 6, 29—34 (РЖМат, 1975, 5В714)
12. *Глебов Н. И.*, О разрешимости некоторых задач выпуклого целочисленного программирования. IV Всес. конф. по пробл. теор. кибернетики. Тезисы докладов. Новосибирск, 1977, 98—99
13. *Гольштейн Е. Г.*, *Юдин Д. Б.*, Задачи линейного программирования транспортного типа. М., «Наука», 1969, 382 с. (РЖМат, 1970, 4В442К)
14. *Гришухин В. П.*, Оценка сложности алгоритма Балаша. В сб. «Мат. методы решения экон. задач». Вып. 3. М., «Наука», 1972, 93—105 (РЖМат, 1973, 5В652)
15. —, О среднем числе итерации алгоритма Балаша. В сб. «Исслед. по дискретной мат.». М., «Наука», 1973, 58—68 (РЖМат, 1973, 8В512)
16. *Емеличев В. А.*, Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения. I. Кибернетика, 1971, № 6, 109—121 (РЖМат, 1972, 6В441)
17. —, Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения. II. Кибернетика, 1972, № 2, 92—103 (РЖМат, 1972, 10В527)
18. —, *Кононенко А. М.*, Об одном классе транспортных многогранников. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 3, 21—25 (РЖМат, 1971, 12В801)
19. —, —, О числе планов многоиндексной проблемы выбора. Докл. АН БССР, 1974, *18*, № 8, 677—680 (РЖМат, 1974, 12В310)
20. —, —, *Лихачев В. М.*, О многогранниках многоиндексной транспортной задачи. Докл. АН БССР, 1972, *16*, № 5, 418—420 (РЖМат, 1972, 9В470)
21. —, *Кравцов М. К.*, О некоторых свойствах транспортных многогранников с максимальным числом вершин. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 5, 1025—1028 (РЖМат, 1976, 10В347)
22. —, —, К перечислительным задачам на транспортных многогранниках. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1976, № 1, 9—13 (РЖМат, 1976, 8В447)
23. —, —, *Авербух Н. Д.*, О максимальном числе вершин транспортного многогранника. Докл. АН БССР, 1976, *20*, № 6, 509—512 (РЖМат, 1976, 10В348)
24. *Журавлев Ю. И.*, Теоретико-множественные методы в алгебре логики. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 8. М., Физматгиз, 1962, 5—44 (РЖМат, 1963, 10В217)
25. —, Локальные алгоритмы вычисления информации. I. Кибернетика, 1965, № 1, 12—19 (РЖМат, 1967, 1В174)
26. —, Локальные алгоритмы вычисления информации. II. Кибернетика, 1966, № 2, 1—11 (РЖМат, 1967, 3В233)
27. —, Алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. Докл. АН СССР, 1977, *235*, № 4, 761—763 (РЖМат, 1978, 4В412)
28. —, Экстремальные алгоритмы в алгебре над некорректными алгоритмами. Докл. АН СССР, 1977, *237*, № 3, 509—512 (РЖМат, 1978, 4В411)
29. —, Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 33. М., «Наука», 1978, 5—68 (РЖМат, 1978, 7В850)
30. *Кляус П. С.*, Структура оптимальных решений некоторых классов задач о коммивояжёре. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1976, № 6, 95—98 (РЖМат, 1977, 6В593)
31. *Ковалев М. М.*, Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). Минск, Белорус. ун-т, 1977, 192 с. (РЖМат, 1977, 8В632К)
32. *Конвей Р. В.*, *Максвелл В. Л.*, *Миллер Л. В.*, Теория расписаний. Пер. с англ. М., «Наука», 1975, 360 с. (РЖМат, 1975, 11В564К)

33. *Корбут А. А., Сигал И. Х., Финкельштейн Ю. Ю.*, Метод ветвей и границ. (Обзор теории, алгоритмов, программ и приложений). Math. Operationsforsch. Statist., 1977, *8*, № 2, 233—280
34. —, *Финкельштейн Ю. Ю.*, Дискретные задачи математического программирования. В сб. «Теория вероятн. Мат. статист. Теоретич. кибернет. 1966 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 59—108 (РЖМат, 1968, 6В411)
35. —, —, Дискретное программирование. М., «Наука», 1969, 368 с. (РЖМат, 1969, 12В435К)
36. *Коробков В. К.*, Примечание [к алгоритму Балаша, — В. Л.]. Кибернет. сб. Вып. 6. М., «Мир», 1969, 253—258
37. *Коршунов А. Д.*, Решение задачи П. Эрдёша и А. Реньи о гамильтоновых циклах в неориентированных графах. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 3, 529—532 (РЖМат, 1976, 11В519)
38. *Левин Л. А.*, Универсальные задачи перебора. Пробл. передачи информ., 1973, *9*, № 3, 115—116 (РЖМат, 1974, 1В401)
39. *Левнер Е. В.*, Теория расписаний в экономических системах (некоторые мат. вопросы). Центр. экон.-мат. ин-т АН СССР. Препринт. М., 1977, 53 с.
40. *Леонтьев В. К.*, Об одной экономической задаче. Кибернетика, 1969, № 2, 98—99 (РЖМат, 1969, 12В436)
41. —, Алгебраическая структура некоторых задач дискретного программирования. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 26. М., «Наука», 1973, 279—290 (РЖМат, 1973, 9В544)
42. —, Исследование одного алгоритма решения задачи коммивояжёра. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, *13*, № 5, 1228—1236 (РЖМат, 1974, 2В647)
43. —, Устойчивость задачи коммивояжёра. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, *15*, № 5, 1298—1309 (РЖМат, 1976, 6В714)
44. —, Устойчивость в комбинаторных задачах выбора. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 1, 23—25 (РЖМат, 1976, 8В450)
45. —, О числе оптимальных планов в задаче о назначениях. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 34. М., 1978, 259—264 (РЖМат, 1978, 12В1330)
46. *Лившиц Э. М., Рублинецкий В. И.*, О сравнительной сложности некоторых задач дискретной оптимизации. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн.». Вып. 3. Харьков, 1972, 78—85 (РЖМат, 1973, 6В535)
47. *Лихачев В. М.*, Об одной оценке числа вершин транспортного многогранника. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1975, № 2, 99 (РЖМат, 1975, 8В291)
48. —, *Емеличев В. А.*, К оценке сверху числа вершин транспортного многогранника. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1974, № 3, 121—123 (РЖМат, 1974, 11В644)
49. *Лупанов О. Б.*, О синтезе некоторых классов управляющих систем. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 10. М., Физматгиз, 1963, 63—97 (РЖМат, 1964, 7В280)
50. —, Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 14. М., «Наука», 1965, 31—110 (РЖМат, 1966, 2В220)
51. *Михалевич В. С.*, Последовательные аглоритмы оптимизации и их применение. I. Кибернетика, 1965, № 1, 45—66 (РЖМат, 1966, 1В96)
52. —, Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. II. Последовательные правила для опытов с детерминированными исходами. Кибернетика, 1965, № 2, 85—89 (РЖМат, 1966, 5В68)
53. *Нечипорук Э. И.*, Об одной булевской функции. Докл. АН СССР, 1966, *169*, № 1, 765—766 (РЖМат, 1966, 12В238)
54. *Нигматуллин Р. Г.*, Паросочетание графа. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1968, *128*, № 2, 91—94 (РЖМат, 1969, 2В127)
55. —, Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие. В сб. «Вопр. точности и эффективн. вычисл. аглоритмов. Тр. симпозиума. Т. 5». Киев, 1969, 116—126 (РЖМат, 1970, 4В384)

56. —, О приближенных алгоритмах с ограниченной абсолютной погрешностью для дискретных экстремальных задач. Кибернетика, 1978, № 1, 95—101
57. *Перепелица В. А.*, О двух задачах из теории графов. Докл. АН СССР, 1970, *194*, № 6, 1269—1272 (РЖМат, 1971, 4В415)
58. *Рублиценкий В. И.*, Об оценках точности процедур в задаче коммивояжёра. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн.». Вып. 4. Харьков, 1973, 18—23 (РЖМат, 1974, 5В673)
59. *Самойленко С. И.*, Алгоритмы целенаправленного стохастического поиска. Науч. совет по комплекс. пробл. Кибернетика. АН СССР. М., 1973. 22 с., ил., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 18 янв. 1974 г. № 111—74 Деп.) (РЖМат, 1974, 6В722Деп)
60. *Сапоженко А. А.*, О сложности дизъюнктивных нормальных форм, получаемых с помощью градиентного алгоритма. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 21. Новосибирск, 1972, 62—71 (РЖМат, 1973, 6В427)
61. *Сарванов В. И.*, О многогранниках, связанных с оптимизацией на подстановках. Ин-т мат. АН БССР, Препр., 1977, № 7, 14 с. (РЖМат, 1978, 5В426)
62. —, Приближенное решение задачи минимизации линейной формы на множестве циклических подстановок. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1977, № 6, 5—10 (РЖМат, 1978, 6В574)
63. *Супруненко Д. А.*, О значениях линейной формы на множестве подстановок. Кибернетика, 1968, № 2, 59—63 (РЖМат, 1968, 12В340)
64. —, К задаче о бродячем торговце. Кибернетика, 1975, № 5, 121—124 (РЖМат, 1976, 4В625)
65. —, *Метельский Н. Н.*, Задача о назначениях и минимизация суммы линейных форм на симметрической группе. Кибернетика, 1973, № 3, 64—68 (РЖМат, 1973, 11В442)
66. *Танаев В. С.*, *Шкурба В. В.*, Введение в теорию расписаний. М., «Наука», 1975, 256 с. (РЖМат, 1975, 8В482К)
67. *Трубин В. А.*, О методе решения задач целочисленного линейного программирования специального вида. Докл. АН СССР, 1969, *189*, № 5, 952—954 (РЖМат, 1970, 6В518)
68. *Форд Л. Р.*, *Фалкерсон Д. Р.*, Потоки в сетях. Пер. с англ. М., «Мир», 1966, 276 с. (РЖМат, 1966, 11В249К)
69. *Черенин В. П.*, Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. (Научно-метод. материалы Экон.-мат. семинара. Лабор. экон.-мат. методов АН СССР, Вычисл. центр АН СССР. Вып. 2). М., 1962, 44 с. (РЖМат, 1964, 11В261)
70. *Швартин С. М.*, Исследование устойчивости транспортных задач. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, *18*, № 1, 235—240 (РЖМат, 1978, 5В622)
71. *Шевченко В. Н.*, О двойственном описании конуса, целочисленно-порожденного конечным множеством векторов. Мат. заметки, 1973, *14*, № 4, 523—526 (РЖМат, 1974, 3В528)
72. *Яблонский С. В.*, Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 2. М., Физматгиз, 1959, 75—121 (РЖМат, 1961, 5А299)
73. *Anthonisse J. M.*, *Boas P. van Emde*, Are polynomial algorithms really good? Math. Cent. Afd. Math. Beslisk. BW, 1974, № 40, 5 pp. (РЖМат, 1975, 9Б1114)
74. *Ausiello G.*, On the structure and properties of *NP*-complete problems and their associated optimization problems. Lect. Notes Comput. Sci., 1977, *53*, 1—16 (РЖМат, 1978, 5В531)
75. —, *D'Atri A.*, *Gaudiano M.*, *Protasi M.*, Classes of structurally isomorphic *NP*-optimization problems. Lect. Notes Comput. Sci., 1977, *53*, 222—230 (РЖМат, 1978, 6В993)
76. *Baker T.*, *Gill J.*, *Solovay R.*, Relativization of the $P\overset{?}{=}NP$ question. SIAM J. Comput., 1975, *4*, № 4, 431—442 (РЖМат, 1976, 7В498)

77. *Balas E.*, Discrete programming by the filter method. Oper. Res., 1967, *15*, № 5, 915—957 (РЖМат, 1968, 7В379)
78. —, *Padberg M. W.*, Set partitioning: a survey. SIAM Rev., 1976, *18*, № 4, 710—760 (РЖМат, 1977, 6В489)
79. *Balinski M. L.*, *Russakoff A.*, On the assignment polytope. SIAM Rev., 1974, *16*, № 4, 516—525 (РЖМат, 1975, 9В479)
80. *Bearwood J.*, *Halton J. H.*, *Hammersley J. M.*, The shortest path through many points. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1959, *55*, № 4, 299—327 (РЖМат, 1962, 11В360)
81. *Berge C.*, Balanced matrices. Math. Program., 1972, *2*, № 1, 19—31 (РЖМат, 1972, 11В424)
82. *Berman L.*, *Hartmanis J.*, On isomorphisms and density of *NP* and other complete sets. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 2, 305—322 (РЖМат, 1978, 5В1096)
83. *Bloch M.*, *Moràvec J.*, Bounds of the number of threshold functions. Inform. Proces. Machines, 1967, № 13, 67—73 (РЖМат, 1968, 11В326); рус. перев.: Кибернет. сб. Вып. 6. М., «Мир», 1969, 82—88
84. *Brualdi R. A.*, On the truncated assignment polytope. Linear Algebra and Appl., 1978, *19*, № 1, 33—62
85. —, *Gibson P. M.*, Convex polyhedra of doubly stochastic matrices. I. Applications of the permanent function. J. Combin. Theory, 1977, *A22*, № 2, 194—230 (РЖМат, 1977, 12В711)
86. —, —, Convex polyhedra of doubly stochastic matrices. II. The graph of Ω_n. J. Combin. Theory, 1977, *B22*, № 2, 175—198 (РЖМат, 1977, 11В602)
87. —, —, Convex polyhedra of doubly stochastic matrices. III. Affine and combinatorial properties of Ω_n. J. Combin. Theory, 1977, *A22*, № 3, 338—351 (РЖМат, 1977, 10В335)
88. —, —, Convex polyhedra of doubly stochastic matrices. IV. Linear Algebra and Appl., 1976, *15*, № 2, 153—172
89. *Burkard R. E.*, Kombinatorische Optimierung in Halbgruppen. Lect. Notes Math., 1975, *477*, 1—17
90. *Camion P.*, Characterization of totally unimodular matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, *16*, № 5, 1068—1073 (РЖМат, 1966, 7А154)
91. —, Modules unimodulaires. J. Combin. Theory, 1968, *4*, № 4, 301—362
92. *Carson J. S.*, *Law A. M.*, A note on Spira's algorithm for the all-pairs shortest-path problem. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 4, 696—699 (РЖМат, 1978, 8В990)
93. *Chandrasekaran R.*, Total unimodularity of matrices. SIAM J. Appl. Math., 1969, *17*, № 6, 1032—1034 (РЖМат, 1970, 11А263)
94. *Chvátal V.*, Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems. Discrete Math., 1973, *4*, № 4, 305—337 (РЖМат, 1973, 12В372)
95. —, Edmonds polytopes and weakly Hamiltonian graphs. Math. Program., 1973, *5*, № 1, 29—40 (РЖМат, 1974, 1В365)
96. —, On certain polytopes associated with graphs. J. Combin. Theory, 1975, *B18*, № 2, 138—154 (РЖМат, 1975, 10В295)
97. —, Determining the stability number of a graph. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 4, 643—662 (РЖМат, 1978, 8В507)
98. *Cook S. A.*, The complexity of theorem proving procedures. Conf. Rec. 3rd Annu. ACM Symp. Theory Comput., Shaker Heights, Ohio, 1971. New York, N. Y., 1971, 151—158 (РЖМат, 1974, 3В888); рус. перев.: Кибернет. сб. Вып. 12. М., «Мир», 1975, 5—15
99. *Cornuejols G.*, *Nemhauser G. L.*, Tight bounds for Christofides' travelling salesman heuristic. Math. Program., 1978, *14*, № 1, 116—121 (РЖМат, 1978, 9В771)
100. *Dobkin D.*, A nonlinear lower bound on linear search tree programs for solving knapsack problems. J. Comput. and Syst. Sci., 1976, *13*, № 1, 69—73 (РЖМат, 1977, 2В766)
101. —, *Lipton R.*, A lower bound of $^1/_2n^2$ on linear search programs for the knapsack problem. Lect. Notes Comput. Sci., 1976, *45*, 265—269 (РЖМат,

1977, 2B767)
102. *Dunstan F. D. J.*, An algorithm for solving resource allocation problem. Oper. Res. Quart., 1977, *28*, № 4, 839—852 (РЖМат, 1978, 7B1004)
103. —, *Ingleton A. W.*, *Welsh D. J. A.*, Supermatroids. Combinatorics, Southend-on-Sea, 1972, 72—122 (РЖМат, 1975, 6B442)
104. —, *Welsh D.*, A greedy algorithm for solving certain class of linear programs. Math. Program., 1973, *5*, № 3, 338—353 (РЖМат, 1974, 9B615)
105. *Edmonds J.*, Maximum matching and a polyhedron of 0,1-vertices. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, *B69*, № 1-2, 125—130
106. —, Submodular functions, matroids and certain polyhedra. Combinatorial structures and their applications. Proc. of the Calgary int. conf. Gordon & Breah, N. Y., 1970, 67—87
107. —, Matroids and the greedy algorithm. Math. Program., 1971, *1*, № 2, 127—136
108. —, Some well-solved problems in combinatorial optimization. Combinatorial Program.: Meth. and Appl. Dordrecht—Boston, 1975, 285—301 (РЖМат, 1976, 6B382)
109. —, *Fulkerson D. R.*, Bottleneck extrema. J. Combin. Theory, 1970, *8*, № 3, 299—306 (РЖМат, 1970, 11B397)
110. —, *Giles R.*, A min-max relation for submodular functions on graphs. Studies in integer program. (Ann. of Discrete Math., № 1). Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1977, 185—204
111. *Fulkerson D. R.*, Blocking polyhedra. Graph Theory and Appl. Proc. Adv. Semin. Math. Res. Cent. US Army, Madison, Wisc., 1969. S. l., 1970, 93—112 (РЖМат, 1972, 12B238)
112. —, Blocking and antiblocking pairs of polyhedra. Math. Program., 1971, *1*, № 2, 168—194
113. —, Antiblocking polyhedra. J. Combin. Theory, 1972, *B12*, № 1, 50—71 (РЖМат, 1972, 9B385)
114. —, *Hoffman A. J.*, *Oppenheim R.*, On balanced matrices. Math. Program. Study 1. Amsterdam, 1974, 120—132 (РЖМат, 1976, 4B424)
115. *Gale D.*, Neighbouring vertices on a convex polyhedron. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 255—266 (РЖМат, 1957, 8937); рус. перев.: в сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». М., ИЛ, 1959, 355—362
116. *Garey M. R.*, *Johnson D. S.*, The complexity of near-optimal graph coloring. J. Assoc. Comput. Mach., 1976, *23*, № 1, 43—49 (РЖМат, 1976, 7B450)
117. —, —, Approximation algorithms for combinatorial problems: An annotated bibliography. Algorithms and complexity: New directions and recent results. Proc. Symp. New York, Acad. Press, 1976, 41—52
118. —, —, *Stockmeyer L. J.*, Some simplified *NP*-complete graph problems. Theor. Comput. Sci.. 1976, *1*, № 3, 237—267 (РЖМат, 1976, 11B455)
119. *Garfinkel R. S.*, *Nemhauser G. L.*, A survey of integer programming emphasizing computation and relation among models. Math. Program. New York—London, 1973, 77—155 (РЖМат, 1975, 11B574)
120. —, *Rao M.*, Bottleneck linear programming. Math. Program., 1976, *11*, № 3, 291—298 (РЖМат, 1977, 11B765)
121. *Ghouilla-Houri A.*, Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. C. r. Acad. sci., 1962, *254*, № 7, 1192—1194 (РЖМат, 1962, 9A122)
122. *Gomory R. E.*, The travelling salesman problem. IBM Corp. Sci. Comput. Symp. on Combin. Problems. Yorktown-Heights, 1964, Proc. New York, 1966, 93—121
123. *Grötschel M.*, Beitrage zur polyhedrischen Beschreibung kombinatorische Optimierungsprobleme. Dissertation. Bonn, 1977
124. —, *Padberg M. W.*, Partial linear characterizations of the asymmetric travelling salesman polytope. Math. Program., 1975, *8*, № 3, 378—381 (РЖМат, 1976, 1B858)
125. —, —, Lineare Characterisierungen von Travelling Salesman Problemen. Z. Oper. Res. A., 1977, *21*, № 1, 33—64 (РЖМат, 1977, 9B640)

126. *Hartmanis J., Hopcroft J. E.*, Independence results in computer science. ACM SIGACT News, 1976, *8*, № 1, 13—23
127. *Heller I.*, On the problem of shortest paths between points. I. Bull. Amer. Math. Soc., 1953, *59*, № 6, 551 (abstract)
128. —, On the travelling salesmans's problem. Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol. 2, s. a., 643—665 (РЖМат, 1960, 8030)
129. —, Neighbour relations on the convex hull of cyclic permutations. Pacif. J. Math., 1956, *6*, № 3, 467—477 (РЖМат, 1961, 1В123)
130. —, On linear systems with integral valued solutions. Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1351—1364 (РЖМат, 1960, 10687)
131. —, On unimodular sets of vectors. Recent Advances math. Programm. New York — San Francisco—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1963, 39—53 (РЖМат, 1965, 10В218)
132. —, *Tompkins C. B.*, An extension of a theorem of Dantzig. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 247—254 (РЖМат, 1959, 1251); рус. перев.: в сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». М., ИЛ, 1959, 348—354
133. *Hoffman A. J., Kruskal J. B.*, Integral boundary points of convex polyhedra. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 223—246 (РЖМат, 1958, 4228); рус. перев.: в сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». М., ИЛ, 1959, 325—347
134. *Ibarra O. H., Kim C. E.*, Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subsets problems. J. Assoc. Comput. Mach., 1975, *22*, № 4, 463—468 (РЖМат, 1976, 4В912)
135. Integer programming and related areas. A classified bibliography. Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1976, *128*, XII, 495 pp. (РЖМат, 1977, 1В659К)
136. *Johnson D. S.*, Approximation algorithms for combinatorial problems. J. Comput. and Syst. Sci., 1974, *9*, № 3, 256—278
137. *Johnson S. M.*, Optimal two- and three-stage production schedules with set up time included. Naval Res. Logist. Quart., 1954, *1*, № 1, 61—68 (РЖМат, 1959, 718); рус. перев.: Кибернет. сб. Вып. 1. М., «Мир», 1965, 78—86 (РЖМат, 1966, 8В207)
138. *Karp R. M.*, Reducibility among combinatorial problems. Complexity Comput. Computat. Proc. Symp., Yorktown Heights, 1972. New York—London, 1972, 85—104 (РЖМат, 1974, 3В877); рус. перев.: Кибернет. сб. Вып. 12. М., «Мир», 1975, 16—38
139. —, On the computational complexity of combinatorial problems. Networks, 1975, *5*, № 1, 45—68 (РЖМат, 1975, 12В531)
140. —, The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms. Algorithms and complexity: New directions and recent results. Proc. Symp. New York, Acad. Press, 1976, 1—20
141. —, Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the Travelling Salesman problem in the plane. Math. Oper. Res., 1977, *2*, № 3, 209—224 (РЖМат, 1979, 1В892)
142. *Klee V., Minty G. J.*, How good is simplex algorithms? Inequalities — III. Proc. of the 3rd Symp. on inequalities held at Univ. of California. Los Angeles. Sept. 1—9 1969. New York—London, Acad. Press, 1972, 159—175
143. *Kowaljow M., Girlich E.*, Zur Problem der optimalen Standartisierung. Math. Operationsforsch. und Statist., 1977, *8*, № 1, 89—103 .
144. —, *Nguen Ngia, Kühn E.*, Eine Klasse ganzzahligen Polyheder. Humboldt-Universität zu Berlin. Sect: Math. Jahresarbeitstagung Math. Optimierung 8—14 Mai 1977, 50—54
145. *Krolak P., Felts W., Marble G.*, A man-machine approach toward solving the travelling salesman problem. Communs ACM, 1971, *14*, № 5, 327—334 (РЖМат, 1971, 12В983)
146. *Kruskal J. B., Jr.*, On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc., 1956, *7*, № 1, 48—50 (РЖМат, 1958, 4580)

147. *Kuhn H. W.*, On certain convex polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, *61*, № 6, 557—558 (abstract)
148. *Ladner R. E.*, On the structure of polynomial time reducibility. J. Assoc. Comput. Mach., 1975, *22*, № 1, 155—171 (РЖМат, 1975, 9В849)
149. —, *Lynch N. A.*, *Selman A. L.*, A comparison of polynomial time reducibilities. Theor. Comput. Sci., 1975, *1*, № 2, 103—123 (РЖМат, 1976, 7В944)
150. *Lawler E. L.*, Polynomial-bounded and (apparently) nonpolynomial-bounded matroid computations. Combinator. Algorithms. New York, N. Y., 1973, 49—57 (РЖМат, 1974, 3В351)
151. —, Matroid intersection algorithms. Math. Program., 1975, *9*, № 1, 31—56 (РЖМат, 1976, 5В562)
152. —, Combinatorial optimization. Networks and matroids. New York, Holt, Reinhart-Winston, 1976, 374 pp.
153. *Libura M.*, Analiza wrażliwosci rozwiazan'calkowi tolczbowego zadania zaladunky. Arch. Aut. Telemech., 1977, *22*, № 3, 312—322
154. —, Zagadnienia wrażliwosci rozwiazan'w programowaniu calkowi toliczbowym. Arch. Aut. Telemech., 1977, *22*, № 3, 298—311
155. *Lovász L.*, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. Discrete Math., 1972, *2*, № 3, 253—267 (РЖМат, 1973, 2В306)
156. *Maurras J. F.*, Some results on the convex hull of the Hamiltonian cycles of symmetric complete graphs. Combinatorial Program.: Meth. and Appl. Dordrecth—Boston, 1975, 179—190 (РЖМат, 1976, 6В484)
157. *Miller G. L.*, Riemann's hypothesis and tests for primality. J. Comput. and Syst. Sci., 1976, *13*, № 3, 300—317 (РЖМат, 1977, 8А122)
158. *Minoux M.*, Algorithmes gloutons et algorithmes gloutons accélérés pour la résolution des grands problèmes combinatoires. Bull. Dir. etud. et rech., 1977, *C*, № 1, 41—58(РЖМат, 1978, 3В629)
159. *Morávek J.*, On the complexity of discrete programming problems. Apl. mat., 1969, *14*, № 6, 442—474 (РЖМат, 1970, 6В507)
160. —, A localization problems in geometry and complexity of discrete programming. Kybernetika, 1972, *8*, № 6, 498—516 (РЖМат, 1973, 5В637)
161. *Nemhauser G. L.*, *Trotter L. E., Jr.*, Properties of vertex packing and independence system polyhedra. Math. Program., 1974, *6*, № 1, 48—61 (РЖМат, 1974, 11В689)
162. —, —, Vertex packings: structural properties and algorithms. Math. Program., 1975, *8*, № 2, 232—248 (РЖМат, 1975, 12В780)
163. *Norman R. Z.*, On the convex polyhedra of the symmetric travelling salesman problem. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, *59*, № 6, 559 (abstract)
164. *Padberg M. W.*, On the facial structure of set packing polyhedra. Math. Program., 1973, *5*, № 2, 199—215 (РЖМат, 1974, 5В685)
165. —, Perfect zero-one matrices. Math. Program., 1974, *6*, № 2, 180—196 (РЖМат, 1975, 1В768)
166. —, Perfect zero-one matrices. II. Proc. Oper. Res. 3. Pap. Annu. Meet. DGOR. 1973. Würzburg—Wien, 1974, 75—83 (РЖМат, 1975, 9В518)
167. —, Characterisations of totally unimodular, balanced and perfect matrices. Combinatorial Program.: Meth. and Appl. Dordrecht—Boston, 1975, 275—284 (РЖМат, 1976, 5В507)
168. —, Almost integer polyhedra related to combinatorial problems. Linear Algebra and Appl., 1976, *15*, №1, 69—88
169. —, A note on the total unimodularity of matrices. Discrete Math., 1976, *14*, № 3, 273—278 (РЖМат, 1976, 8В465)
170. —, On the complexity of set packing polyhedra. Studies in integer programming. (Ann. of Discrete Math., № 1). Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1977, 421—434
171. —, *Rao M. R.*, The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two. Math. Program., 1974, 7, № 1, 32—45 (РЖМат, 1975, 3В669)

172. *Paz A., Moran S.*, Nondeterministic polynomial optimization problems and their approximation. Lect. Notes Comput. Sci., 1977, *52*, 370—379
173. *Pratt V. R.*, Every prime has a succinct certificate. SIAM J. Comput., 1975, *4*, № 3, 214—220 (РЖМат, 1976, 4А89)
174. *Pulleybank K. W., Edmonds J.*. Facets of 1-matching polyhedra. Lect. Notes Math., 1974, *411*, 214—242 (РЖМат, 1975, 6В503)
175. *Rabin M. O.*, Proving simultaneous positivity of linear forms. J. Comput. and Syst. Sci., 1972, *6*, № 6, 639—650 (РЖМат, 1973, 7А357)
176. —, Probabilistic algorithms. Algorithms and complexity: New directions and recent results. Proc. symp. New York, Acad. Press, 1976, 21—40
177. *Rado R.*, Note on independence functions. Proc. London Math. Soc., 1957, *7*, № 26, 300—320 (РЖМат, 1960, 136)
178. *Rivest R. L., Vuillemin J.*, On recognizing graph properties from adjacency matrices. Theor. Comput. Sci., 1976, *3*, № 3, 371—384 (РЖМат, 1978, 1В780)
179. *Rosenkrantz D. J., Stearns R. E., Lewis P. M.*, II. An analysis of several heuristics for the travelling salesman problem. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 3, 563—581 (РЖМат, 1978, 4В738)
180. *Sahni Sartaj*, Approximate algorithms for the 0/1 knapsack problem. J. Assoc. Comput. Mach., 1975, *22*, № 1, 115—124 (РЖМат, 1975, 10В712)
181. —, General techniques for combinatorial optimization. Oper. Res., 1977, *25*, № 6, 920—936 (РЖМат, 1978, 7В1023)
182. —, *Gonzalez T.*, *P*-complete approximation problems. J. Assoc. Comput. Mach., 1976, *23*, № 3, 555—565
183. *Savage S., Weiner P., Bagchi A.*, Neighborhood search algorithms for guaranteeing optimal travelling salesman tours must be inefficient. J. Comput. and Syst. Sci., 1976, *12*, № 1, 25—35 (РЖМат, 1976, 11В726)
184. *Simon J.*, On the difference between one and many. Lect. Notes Comput. Sci., 1977, *52*, 480—491
185. *Solovay R., Strassen V.*, A fast Monte-Carlo test for primality. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 1, 84—85 (РЖМат, 1978, 1Б804)
186. —, —, A fast Monte-Carlo test for primality. Erratum. SIAM J. Comput., 1978, *7*, № 1, 118
187. *Spira P. M.*, A new algorithm for finding all shortest paths in a graph of positive arcs in average time $O(n^2 \log^2 n)$. SIAM J. Comput., 1973, *2*, № 1, 28—32 (РЖМат, 1973, 12В416)
188. —, *Pan A.*, On finding and updating spanning trees and shortest paths. SIAM J. Comput., 1975, *4*, № 3, 375—380 (РЖМат, 1976, 5В590)
189. *Tucker A.*, The strong perfect graph conjecture for planar graphs. Can. J. Math., 1973, *25*, № 1, 103—114 (РЖМат, 1973, 9В376)
190. *Tutte W. T.*, A class of Abelian groups. Can. J. Math., 1956, *8*, № 1, 13—28 (РЖМат, 1960, 5004)
191. —, Introduction to the theory of matroids. New York, Amer. Elsevier, 1971, XI, 84 pp. (РЖМат, 1974, 5В435)
192. *Veinott A. F., Jr., Dantzig G. B.*. Integral extreme points. SIAM Rev., 1968, *10*, № 3, 371—372 (РЖМат, 1969, 6В350)
193. *Zimmerman U.*, Boolesche Optimierungsprobleme mit separabeler Zielfunction und matroidalen Restrictionen. Dissert. Köln, 1976