Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Плотников, В. Я. Якубов, Об одномерной обобщенной проблеме Штурма–Лиувилля,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 12, 70–81

https://www.mathnet.ru/ivm3429

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
11 декабря 2025 г., 22:00:38

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 12 (79)

УДК 517.91

В. И. Плотников, В. Я. Якубов

ОБ ОДНОМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. Введение

Основная цель работы — найти достаточные (почти необходимые) условия, при которых имеет место равномерная ограниченность модулей собственных функций обобщенной проблемы Штурма — Лиувилля в классе измеримых коэффициентов, причем константа C в оценке $|X_n(x)| \leqslant C$ должна зависеть лишь от максимума модулей коэффициентов.

Как известно, в классическом случае при гладких коэффициентах константа C зависит от модулей вторых производных коэффициентов и, вообще говоря, стремится к бесконечности при бесконечном увеличении этих модулей. Однако для решения, например, оптимальных задач таких оценок недостаточно.

В работе выясняется также, что в общем случае (для класса измеримых коэффициентов) асимптотическая оценка $|X_n(x)| < C\lambda_n^{1/4}$ не может быть улучшена, для чего строится соответствующий пример.

В статье излагается также решение обобщенной проблемы Штурма — Лиувилля методом вариационного исчисления, хотя, по-видимому, решение этой проблемы можно считать известным.

§ 2. Об одномерной обобщенной проблеме Штурма — Лиувилля

Как известно, обобщенная проблема Штурма — Лиувилля формулируется следующим образом: найти нетривиальные функции $X(x) \in W_2'(0, l)$ и действительные числа λ такие, чтобы при любых $\Phi(x) \in W_2'(0, l)$ и любых измеримых ограниченных коэффициентах $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$, удовлетворяющих на отрезке $[0, l]$ условиям: $A_1 \geqslant A(x) \geqslant A_0 > 0$, $B_1 \geqslant B(x) \geqslant B_0 > 0$, $C(x) \geqslant C_0 > 0$, выполнялось интегральное тождество

$$\int_0^l [A(x) X'(x) \Phi'(x) + C(x) X(x) \Phi(x)]\, dx +$$

$$+ \frac{\beta_0}{\alpha_0} X(0) \Phi(0) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} X(l) \Phi(l) = \lambda \int_0^l B(x) X(x) \Phi(x)\, dx, \qquad (2.1)$$

если $\alpha_j \neq 0$ ($j=0$; 1). Если же $\alpha_0=0$, а $\alpha_1 \neq 0$, то потребуем, чтобы при любых $\Phi(x) \in W_2'(0, l)$, $\Phi(0)=0$ было справедливо тождество

$$\int_0^l [AX'\Phi' + CX\Phi]\,dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1} X(l)\,\Phi(l) = \lambda \int_0^l BX\Phi dx,$$

причем предполагается, конечно, $X(0)=0$. Аналогично формулируются остальные случаи. При

$$\frac{\beta_j}{\alpha_j} \geqslant 0 \qquad (j=0,\ 1) \tag{2.2}$$

левую часть соотношения (2.1) можно рассматривать как скалярное произведение в пространстве $W_2'(0, l)$, причем легко доказать (в силу условия $C(x) \geqslant C_0 > 0$), что норма, соответствующая этому скалярному произведению, эквивалентна обычной норме в пространстве $W_2'(0, l)$, определяемой равенством

$$\|X(x)\|^2_{W_2'(0,\,l)} = \int_0^l [X^2(x) + X'^2(x)]\,dx.$$

При условии (2.2) прямым методом вариационного исчисления можно доказать „классическую" разрешимость проблемы (2.1) — существование счетной полной в $L_2(0, l)$ последовательности ортонормальных собственных функций $\{X_n(x)\}$ и соответствующей ей последовательности простых собственных значений $\{\lambda_n\}$. (В общем случае, когда отношение $\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ имеет произвольный знак, за счет небольшого усиления доказательства можно также установить классическую разрешимость данной проблемы.)

1. Докажем разрешимость проблемы (2.1) при условии (2.2). Введем обозначения

$$[X,\ Y] = \int_0^l [AX'Y' + CXY]\,dx + \frac{\beta_0}{\alpha_0} X(0)\,\Phi(0) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} X(l)\,\Phi(l)$$

(следовательно, мы считаем для определенности $\alpha_j \neq 0$, $j=0$, 1). Рассмотрим функционал $F(X)=[X,\ X]=[X]$, определенный для всех $X(x) \in W_2'(0, l)$, нормированных в метрике пространства $L_2^B(0, l)$ ($L_2^B(0, l)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(X,\ Y) = \int_0^l B(x)\,X(x)\,Y(x)\,dx$).

Пусть $\{\overline{X}_n(x)\}$ — минимизирующая последовательность для функционала $F(X)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} F(\overline{X}_n) = \lim_{n\to\infty} [X_n(\alpha)] = \inf_{\substack{X \in W_2'(0,\,l),\\ \|X\|_{L_2^B(0,\,l)}=1}} [X(x)].$$

Так как $[\overline{X}_n] \leqslant C$, где C не зависит от n, то, в силу рефлексивности пространства $W_2'(0, l)$, существует $X_1(x)$ — элемент из $W_2'(0, l)$, для которого $[\varphi,\ (\overline{X}_m - X_1)] \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при любом $\varphi(x) \in W_2'(0,l)$. ($\{\overline{X}_m\}$ — некоторая подпоследовательность из $\{\overline{X}_n\}$.)

Покажем, что $\|X_1\|_{L_2^B}=1$. Так как нормы $\|X\|_{W_2'(0,l)}$ и $[X]^{1/2}$ эквивалентны, то по теореме Рисса (о форме линейного функционала в гильбертовом пространстве) для любого $\varphi(x)\in W_2'(0, l)$ будем также иметь

$$\left\{\int_0^l \varphi(x)(\overline{X}_m - X_1)\,dx + \int_0^l \varphi'(x)(\overline{X}_m - X_1)'\,dx\right\} \underset{m\to\infty}{\to} 0. \tag{2.3}$$

Далее, так как $\|\overline{X}_m\|_{L_2^B}<C$ и $\|\overline{X}_m'\|_{L_2^B}<C$, то существует подпоследовательность $\{\overline{X}_{m_k}\}$ такая, что

$$\int_0^l \varphi(x)(\overline{X}_{m_k} - X^*)\,dx \underset{m_k\to\infty}{\to} 0 \tag{2.4}$$

и

$$\int_0^l \varphi'(x)(\overline{X}_{m_k} - X^*)'\,dx \underset{m_k\to\infty}{\to} 0, \tag{2.5}$$

где $X^*(x)\in W_2'(0, l)$, а $\varphi(x)$ — любой элемент из $W_2'(0, l)$. В силу единственности слабого предела, из (2.3) — (2.5) следует, что $X_1=X^*$.

Так как $\|\overline{X}_m'\|_{L_2^B}<C$, то подпоследовательность $\{\overline{X}_{m_k}\}$ компактна в метрике $C(0, l)$. Поэтому из нее можно выбрать новую подпоследовательность (обозначим ее снова через $\{\overline{X}_{m_k}\}$), равномерно сходящуюся к некоторому элементу $X_0(x)\in W_2'(0, l)$. Для этой подпоследовательности, очевидно, выполняется предельное равенство

$$\lim_{m_k\to\infty}\int_0^l \varphi(x)(\overline{X}_{m_k} - X_0)\,dx = 0. \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.6) и (2.4), получаем, что $X_0=X^*=X_1$. Но $1=\lim\limits_{m_k\to\infty}\|\overline{X}_{m_k}\|_{L_2^B}=\|X_0\|_{L_2^B}$, поэтому и $\|X_1\|_{L_2^B(0,l)}=1$. Далее, получаем

$$\lim_{n\to\infty}[\overline{X}_n]=\lim_{m\to\infty}[\overline{X}_m]=\inf_{\substack{X\in W_2'(0,l),\\ \|X\|_{L_2^B}=1}}[X]\geqslant[X_1].$$

Но, по доказанному, $X_1(x)\in W_2'(0, l)$ и $\|X_1\|_{L_2^B}=1$. Поэтому

$$\lambda_1=\inf_{\substack{X\in W_2',\\ \|X\|_{L_2^B}=1}}[X]=[X_1].$$

Обычным образом показывается, что функция $X_1(x)$ и число λ_1 удовлетворяют тождеству $[X_1, \Phi]=\lambda_1(X_1, \Phi)$ при любом $\Phi(x)\in W_2'(0, l)$.

С помощью индуктивных построений легко показать далее (так же, как это сделано для X_1 и λ_1 (см. [1], [2])), что существует счет-

ная последовательность собственных чисел $\{\lambda_j\}$ и соответствующих им функций $\{X_j\}$, обладающих свойствами:

а) $\lambda_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$; $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$; $\lambda_{j+1} \geqslant \lambda_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$;

б) $(X_i, X_k) = \int\limits_0^l BX_iX_k dx = \delta_i^k$;

в) система $\{X_i\}$ полна и замкнута в $L_2^B(0, l)$.

2. Докажем несколько лемм (выражающих в некоторых случаях специфичность одномерной задачи).

Лемма 1. *Все собственные значения λ_j простые (как известно, это неверно уже для двумерного случая).*

В случае гладких коэффициентов A, B и C доказательство леммы тривиально Чтобы доказать ее в общем случае, покажем предварительно, что интегральная форма для обобщенной проблемы Штурма — Лиувилля эквивалентна обычной, дифференциальной форме $\frac{d}{dx}(AX') - CX = -\lambda BX$ с однородными краевыми условиями.

Пусть $X(x) \not\equiv 0$ удовлетворяет тождеству

$$[X, \Phi] = \lambda(X, \Phi) \tag{2.7}$$

при любом $\Phi(x) \in W_2'(0, l)$ (для определенности $\alpha_0\alpha_1 \neq 0$). Установим прежде всего, что произведение $A(x)X'(x)$ эквивалентно некоторой абсолютно непрерывной функции. Пусть $\Phi(x) \in W_2(0, l)$ определена следующим образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_0 - \varepsilon, \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - x_0) + 1, & \text{если } x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0, \\ 1, & \text{если } x_0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - s) + 1, & \text{если } s \leqslant x \leqslant s + \varepsilon, \\ 0, & \text{если } s + \varepsilon \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{2.8}$$

(при $\varepsilon > 0$ достаточно малом и при $0 < x_0 < l$, $0 < s < l$). Подставляя функцию $\Phi(x)$, определенную равенством (2.8), в тождество (2.7) и переходя в нем к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$A(s)X'(s) - A(x_0)X'(x_0) = \int\limits_{x_0}^{s} CXdx - \lambda \int\limits_{x_0}^{s} BXdx \tag{2.9}$$

для почти всех s и x_0. Из (2.9) вытекает требуемое утверждение. Дифференцируя (2.9) по s и заменяя s на x, будем иметь

$$\frac{d}{dx}(AX') - CX = -\lambda BX, \tag{2.10}$$

т. е. что функция $X(x)$, удовлетворяющая тождеству (2.7), удовлетворяет в то же время и тождеству (2.10).

Пусть теперь функция $\Phi(x)$ задана следующим образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon}x + 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \varepsilon \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{2.11}$$

Если в (2.7) подставить функцию $\Phi(x)$, заданную равенствами (2.11), и перейти затем к пределу при $\varepsilon \to 0$, то получим, что

$$\alpha_0 A(x)X'(x)|_{x=0} - \beta_0 X(x)|_{x=0} = 0. \tag{2.12}$$

Аналогично

$$\alpha_1 A(x) X'(x)|_{x=l} + \beta_1 X(x)|_{x=l} = 0. \tag{2.13}$$

Таким образом, функция $X(x)$ удовлетворяет и однородным краевым условиям. Отсюда следует эквивалентность интегральной и дифференциальной постановок проблемы Штурма — Лиувилля. Но из дифференциальной формы, в силу теоремы существования и единственности Каратеодори [3], вытекает, что решение уравнения (2.10) (следовательно и (2.7)), удовлетворяющее, например, краевому условию $\alpha_0 A(x) X'(x)|_{x=0} - \beta_0 X(x)|_{x=0} = 0$, определяется однозначно с точностью до множителя. Это и доказывает, что все собственные значения λ_i простые.

Лемма 2. *Ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{X_m^2(x_0)}{\lambda_m}$ *является сходящимся при любом* $x_0 \in [0, l]$.

Мы докажем эту лемму так же, как и следующую, без использования асимптотического закона поведения $X_m(x)$ и λ_m при $m \to \infty$ (это позволяет доказать некоторые n-мерные аналоги леммы 2).

Установим сначала полноту системы $\{X_m\}$ в пространстве W_2'. Пусть $\Phi(x) \in W_2'(0, l)$ и $\Phi_N(x) = \sum\limits_{m=1}^{N} C_m X_m(x)$, где $C_m = \int\limits_0^l B X_m \Phi dx$. Преобразуем $\Phi_N(x)$:

$$\Phi_N(x) = \sum_{m=1}^{N} \left\{\lambda_m \int_0^l B\Phi X_m^* dx\right\} X_m^*(x) = \sum_{m=1}^{N} C_m^* X_m^*(x),$$

где $C_m^* = [\Phi, X_m^*]$, а $X_m^* = \frac{X_m}{\sqrt{\lambda_m}} = \frac{X_m}{\sqrt{[X_m]}}$. Далее

$$[\Phi_N] = \sum_{m=1}^{N} (C_m^*)^2 \leqslant [\Phi];$$

следовательно, существует элемент $\Phi^*(x) \in W_2'(0, l)$ такой, что $[\Phi_N - \Phi^*, \Phi_N - \Phi^*] \to 0$ при $N \to \infty$. Так как с одной стороны $\int\limits_0^l B(\Phi - \Phi_N)^2 dx \underset{N\to\infty}{\to} 0$, а с другой (в силу теоремы вложения)

$$\int_0^l B(\Phi^* - \Phi_N)^2 dx \leqslant C[\Phi^* - \Phi_N, \Phi^* - \Phi_N] \underset{N\to\infty}{\to} 0,$$

то $\Phi^* = \Phi$, что и доказывает полноту системы $\{X_m(x)\}$ в $W_2'(0, l)$.

Нетрудно видеть далее, что значение функции $X(x) \in W_2'(0, l)$ в произвольной фиксированной точке $x_0 \in [0, l]$ есть линейный непрерывный функционал в $W_2'(0, l)$, и поэтому, в силу теоремы Рисса, существует элемент $X_{x_0}(x)$, однозначно определяемый точкой x_0, такой, что $X(x_0) = [X(x), X_{x_0}(x)]$. Следовательно, $X_m^2(x_0) = [X_m, X_{x_0}]^2$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m^2(x_0)}{\lambda_m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[X_m, X_{x_0}]^2}{\lambda_m} = \sum_{m=1}^{\infty} [X_m^*, X_{x_0}] = [X_{x_0}]^2 < \infty,$$

что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Ряд* $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(AX_m')^2_{x=x_0}}{\lambda_m^2}$ *также является сходящимся при любом* $x_0\in[0, l]$.

Доказательство. Умножим обе части тождества (2.10) на x и проинтегрируем в пределах от 0 до x_0, считая сначала $x_0\in\left[\frac{l}{2}, l\right]$. Будем иметь

$$x_0(AX_m')_{x=x_0}=\int_0^{x_0}AX_m'\,dx+\int_0^{x_0}CX_m\,xdx-\lambda_m\int_0^{x_0}BX_m xdx.$$

Очевидно, что выражение $\int_0^{x_0}A(x)X'(x)\,dx$, где $X(x)\in W_2'(0, l)$, также является линейным непрерывным функционалом в $W_2'(0, l)$. Следовательно, существует единственный элемент $Y_{x_0}(x)\in W_2'(0, l)$ такой, что $\int_0^{x_0}AX'dx=[X, Y_{x_0}]$, откуда

$$\left[\int_0^{x_0}\frac{AX_m'\,dx}{\lambda_m}\right]^2=\frac{[X_m, Y_{x_0}]^2}{\lambda_m^2}=\frac{[X_m^*, Y_{x_0}]^2}{\lambda_m},$$

и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(AX_m')^2_{x=x_0}}{\lambda_m^2}\leqslant\frac{3}{x_0}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[X_m, Y_{x_0}]^2}{\lambda_m^2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_m}\int_0^{x_0}CX_m\,xdx\right)^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_0^{x_0}BX_m xdx\right)^2\right\}<\infty.$$

Случай $x_0\in\left[0, \frac{l}{2}\right]$ рассматривается аналогично. Следовательно, лемму 3 можно считать установленной.

Замечание. Учитывая асимптотику собственных чисел, легко показать, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(AX_m')^2}{\lambda_m^2}$ сходится даже равномерно.

Лемма 4 (об асимптотической оценке модуля нормированных собственных функций и их первой и второй производных). *Пусть* $X_\lambda(x)$ — *произвольное нормированное в метрике* L_2^B *решение уравнения* (2.10), *тогда при* $\lambda\to\infty$ *имеют место следующие асимптотические оценки*: а) $|X_\lambda(x)|\leqslant C\lambda^{1/4}$; б) $|AX_\lambda'|\leqslant C\lambda^{3/4}$ *и* в) $|(AX_\lambda')'|\leqslant C\lambda^{5/4}$, *где* C *не зависит ни от* λ, *ни от* $x\in[0, l]$.

Доказательство. а) В силу осцилляционной теоремы Штурма расстояние между двумя соседними нулями функции $X_\lambda(x)$ не превосходит $\frac{C}{\sqrt{\lambda}}$. Пусть x_m^1 и x_m^2 — два соседних нуля функции $X_\lambda(x)$. Нетрудно видеть, что на интервале (x_m^1, x_m^2) выражение $(A(x)X_\lambda'(x))'$

сохраняет знак. Если $x_m \in (x_m^1, x_m^2)$ — точка, в которой реализуется максимум функции $|X_\lambda(x)|$, то будем иметь

$$(x_m^2 - x_m^1)|X_\lambda(x_m)| \leqslant 2\int_{x_m^1}^{x_m^2} |X_\lambda(x)|\,dx \leqslant 2\sqrt{x_m^2 - x_m^1}\times$$

$$\times\Big(\int_{x_m^1}^{x_m^2} X_\lambda^2(x)\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt[4]{\lambda}},$$

откуда $|X_\lambda(x_m)| \leqslant C_2 \sqrt[4]{\lambda_m}$. Таким образом, $|X_\lambda(x)| \leqslant C\sqrt[4]{\lambda}$, где x — любая точка из $[0, l]$, а постоянная величина C не зависит от λ и точки x.

б) Пусть $\bar{x}_m \in [0, l]$ — точка, в которой достигается максимум комбинации $|A(x)X_\lambda'(x)|$, и $\bar{\bar{x}}_m \in [0, l]$ — ближайший к точке $\bar{x}_m$ нуль функции $A(x)X_\lambda'(x)$. Предположим для определенности, что $\bar{\bar{x}}_m > \bar{x}_m$, тогда по теореме Штурма $\bar{\bar{x}}_m - \bar{x}_m < \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$. Проинтегрируем от $\bar{x}$ до $\bar{\bar{x}}_m$ тождество

$$\frac{d}{dx}(AX_\lambda') - CX_\lambda = -\lambda BX_\lambda. \tag{2.14}$$

Получаем $AX_\lambda'|_{x=\bar{\bar{x}}_m} - AX_\lambda'|_{x=\bar{x}_m} = \int_{\bar{x}_m}^{\bar{\bar{x}}_m} CX_\lambda dx - \lambda\int_{\bar{x}_m}^{\bar{\bar{x}}_m} BX_\lambda\,dx$, отсюда

$$|AX_\lambda'|_{x=\bar{x}_m} \leqslant C_0(\bar{\bar{x}}_m - \bar{x}_m)\sup_{x\in[0,l]}|X_\lambda| + B_1\lambda\sup_{x\in[0,l]}|X_\lambda|(\bar{\bar{x}}_m - \bar{x}_m),$$

или

$$|AX_\lambda'|_{x=\bar{x}_m} \leqslant C_2\sqrt{\lambda}\sup_{x\in[0,l]}|X_\lambda(x)| \leqslant C\lambda^{3/4}.$$

в) Оценка

$$|(AX_\lambda')'| \leqslant C_3\lambda\sup_{x\in[0,l]}|X_\lambda(x)| \leqslant C\lambda^{5/4}$$

вытекает непосредственно из тождества (2.14).

Покажем, что оценка а), а следовательно б) и в), из леммы 4 не могут быть улучшены в классе измеримых коэффициентов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|C(x)| \leqslant C_0,\ 0 < A_0 \leqslant A(x) \leqslant A_1,\ 0 < B_0 \leqslant B(x) \leqslant B_1. \tag{2.15}$$

Для упрощения выкладок сделаем в уравнении (2.10) замену переменной $x = x(t)$, положив $t = \int_0^x \frac{ds}{A(s)}$, тогда оно примет вид

$$Y''(t) - \bar{C}(t)Y(t) = -\lambda\bar{B}(t)Y(t), \tag{2.16}$$

где $Y(t) = Y\Big(\int_0^x \frac{ds}{A(s)}\Big) = X(x)$, $\bar{C}(t) = C(x)A(x)$, $\bar{B}(t) = B(x)A(x)$.

Запишем теперь уравнение (2.16) в виде

$$Y''(t) + \lambda Q^\lambda(t)Y(t) = 0, \tag{2.17}$$

где $Q^{\lambda}(t)=\overline{B}(t)-\frac{\overline{C}(t)}{\lambda}$, причем λ считаем таким, что $0<m\leqslant$ $\leqslant Q^{\lambda}(t)\leqslant M$ для всех $t\in[0, l_1]$ $\left(l_1=\int\limits_0^l \frac{ds}{A(s)}\right)$ и любых $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, удовлетворяющих условиям (2.15).

Зафиксируем некоторую монотонно возрастающую последовательность чисел λ_n таких, что $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$, и покажем, что существует соответствующая последовательность измеримых функций $Q^{\lambda_n}(t)$, $0<m\leqslant Q^{\lambda_n}(t)\leqslant M$, и такая константа $\Delta>0$, что при любом n будем иметь $\sup\limits_{t\in[0, l_1]}|Y^*_{\lambda_n}(t)|\geqslant\Delta\lambda_n^{1/4}$ ($Y^*_{\lambda_n}(t)$ — нормированное в $L_2^{\overline{B}}(0, l_1)$ решение уравнения (2.17) при $Q^{\lambda}(t)=Q^{\lambda_n}(t)$).

Определим $Q^{\lambda_n}(t)$ с помощью равенств

$$Q^{\lambda_n}(t)=\begin{cases} m, & \text{если } t_{2i}\leqslant t<t_{2i+1},\\ M, & \text{если } t_{2i+1}\leqslant t<t_{2i+2},\end{cases}$$

где $i=0, 1, 2, \ldots$, $\tau_1=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n m}}$, $\tau_2=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n M}}$, $t_{2i}=i(\tau_1+\tau_2)$, $t_{2i+1}=$ $=i(\tau_1+\tau_2)+\tau_1$. Возьмем теперь за решение уравнения (2.17) при $Q^{\lambda}=Q^{\lambda_n}$ на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$ функцию $Y_{\lambda_n}(t)=\sin(\sqrt{\lambda_n m}\,t)$, для которой, очевидно, $Y'_{\lambda_n}(t)|_{t=t_1}=0$. На втором интервале $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ считаем $Y_{\lambda_n}(t)=C_1\sin(\sqrt{\lambda_n M}t+\varphi_1)$, где постоянные $C_1=1$ и φ_1 определяются из условия непрерывности решения $Y_{\lambda_n}(t)$ и его первой производной в точке t_1. При $t_2\leqslant t\leqslant t_3$ полагаем $Y_{\lambda_n}(t)=$ $=C_2\sin(\sqrt{\lambda_n m}t+\varphi_2)$. Из условия гладкой склейки решения $Y_{\lambda_n}(t)$ в точке стыка t_2 находим, что $C_2=\sqrt{\frac{M}{m}}$.

Продолжая этот процесс, легко показать, что при любом $i=0, 1, 2, \ldots$

$$Y_{\lambda_n}(t)=\begin{cases}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^i\sin(\sqrt{\lambda_n m}t+\varphi_{2i}), & t_{2i}\leqslant t<t_{2i+1},\\ \left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^i\sin(\sqrt{\lambda_n M}t+\varphi_{2i+1}), & t_{2i+1}<t\leqslant t_{2i+2},\end{cases}\tag{2.18}$$

где $\varphi_0=0$. Найдем верхнюю грань модуля решения $Y_{\lambda_n}(t)$ на интервале $[0, l_1]$. Из формулы (2.18) очевидно, что

$$\sup_{t\in[0, l_1]}|Y_{\lambda_n}(t)|\geqslant\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^{R(\lambda_n)},$$

где $R(\lambda_n)$ определяется как целая часть выражения

$$\frac{l_1}{\tau_1+\tau_2}=\frac{2l_1\sqrt{\lambda_n Mm}}{\pi(\sqrt{M}+\sqrt{m})}.$$

Оценим теперь норму функции $Y_{\lambda_n}(t)$ в $L_2^{\overline{B}}(0, l_1)$:

$$\|Y_{\lambda_n}\|^2_{L_2^{\overline{B}}}\leqslant\frac{\pi(\sqrt{M}+\sqrt{m})}{4\sqrt{\lambda_n Mm}}\sum_{i=0}^{R(\lambda_n)+1}\left(\frac{M}{m}\right)^i\frac{\pi\left[\left(\frac{M}{m}\right)^{R(\lambda_n)+1}-1\right]}{4\sqrt{\lambda_n Mm(\sqrt{M}-\sqrt{m})}}.$$

Отсюда следует, что для модуля нормированной функции $Y^*_{\lambda_n}(t)$ имеет место следующая оценка снизу:

$$\sup_{t\in[0,l_1]}|Y^*_{\lambda_n}(t)|=\sup_{t\in[0,l_1]}\frac{|Y_{\lambda_n}(t)|}{\|Y_{\lambda_n}(t)\|_{L_2^{\overline{B}}}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^{R(\lambda_n)}2\lambda_n^{1/4}\sqrt[4]{Mm(\sqrt{M}-\sqrt{m})}}{\sqrt{\pi}\left[\left(\frac{M}{m}\right)^{R(\lambda_n)+1}-1\right]^{1/2}}.$$

Но $\lim\limits_{\lambda_n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^{R(\lambda_n)}}{\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^{R(\lambda_n)+1}-1}}=\sqrt{\dfrac{m}{M}}$, следовательно,

$$\sup_{t\in[0,l_1]}|Y^*_{\lambda_n}(t)|\geqslant\frac{\sqrt{\sqrt{Mm}(\sqrt{M}-\sqrt{m})}\sqrt{\frac{m}{M}}}{\sqrt{\pi}}\lambda_n^{1/4}=\Delta\lambda_n^{1/4}$$

(при достаточно большом n). Таким образом, утверждение доказано.

Однако в лемме 5 будет указан достаточно широкий класс измеримых коэффициентов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, удовлетворяющих условиям (2.15), для которого имеет место асимптотическая оценка $\sup\limits_{x\in[0,l]}|X_\lambda(x)|\leqslant C$, где C не зависит от λ. Отсюда следуют также и оценки $\sup\limits_{x\in[0,l]}|A(x)X'_\lambda(x)|\leqslant C\sqrt{\lambda}$, $\sup\limits_{x\in[0,l]}|(AX'_\lambda)'|\leqslant C\lambda$. В случае, когда произведение $A(x)B(x)$ дважды непрерывно дифференцируемо, а $C(x)$ непрерывна, это утверждение доказывается элементарно [4], причем C зависит от верхней грани выражения $|[A(x)B(x)]''|$.

Лемма 5. *Если класс коэффициентов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, удовлетворяющих условиям* (2.15), *таков, что функция $A(x)B(x)$ имеет на отрезке* $[0, l]$ *конечное число интервалов монотонности, то имеют место асимптотические оценки*: а) $|X_\lambda(x)|\leqslant C$; б) $|AX'_\lambda|\leqslant C\sqrt{\lambda}$; в) $|(AX'_\lambda)'|\leqslant C\lambda$, *где $X_\lambda(x)$ — произвольное нормированное в метрике $L_2^B(0, l)$ решение уравнения* (2.10), *а постоянная C не зависит ни от λ, ни от $x\in[0, l]$.*

Доказательство. Сделав замену переменной, приведем уравнение (2.10) к виду (2.16) и докажем предварительно лемму при $C(x)\equiv 0$, т. е. для уравнения

$$Y''(t)+\lambda\overline{B}(t)Y(t)=0. \tag{2.19}$$

Аппроксимируем коэффициент $\overline{B}(t)=A(x(t))B(x(t))$ последовательностью простых ступенчатых монотонных функций $\{\overline{B}_j^k(t)\}$ (на каждом интервале монотонности Δ_j, $j=1, 2, \ldots, s$, функции $\overline{B}(t)$), сходящейся к функции $\overline{B}(t)$ в метрике $L_2(\Delta_j)$.

Пусть $\overline{B}_j^k(t)=b_{j,i}^k$, когда $t_{j,i-1}^k\leqslant t\leqslant t_{j,i}^k$, $i=1, 2, \ldots, n_k$, причем $[t_{j,0}^k, t_{j,n_k}^k]=\Delta_j$.

Решение уравнения (2.19) при $\overline{B}=\overline{B}_j^k$ на интервале Δ_j, очевидно, записывается следующим образом: $Y_j^k(t)=C_{j,i}^k\sin(\sqrt{b_{j,i}^k\lambda}\,t+\gamma_{j,i}^k)$, когда $t_{j,i-1}^k\leqslant t\leqslant t_{j,i}^k$, $i=1, 2, \ldots, n_k$. Коэффициенты $C_{j,i}^k$ находятся

из условия гладкой склейки кусков $C^k_{j,i}\sin(\sqrt{b^k_{j,i}\lambda}\,t+\gamma^k_{j,i})$, а $C^k_{1,1}$ считаем равным единице. В силу монотонности функции $\bar{B}^k_j(t)$ на интервале Δ_j, получаем, что

$$\left(\frac{m}{M}\right)^j \leqslant (C^k_{j,i})^2 \leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^j, \text{ где } m=\inf_{t\in[0,l_1]}\bar{B}(t)\geqslant A_0B_0,$$

а $M=\sup\limits_{t\in[0,l_1]}\bar{B}(t)\leqslant A_1B_1$. Таким образом, имеет место следующая равномерная оценка модуля верхней грани решения $Y^k_j(t)$ уравнения (2.19) при $\bar{B}(t)=B^k_j(t)$, когда $t\in\Delta_j$ ($j=1,2,\ldots,s$):

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{s/2}\leqslant \max_{t\in[0,l_1]}|Y^k_j(t)|\leqslant\left(\frac{M}{m}\right)^{s/2}$$

для любого k и всех $j=1,2,\ldots,s$.

Вычислим теперь норму построенного решения $Y_k(t)=Y^k_j(t)$ при $t\in\Delta_j$, $j=1,2,\ldots,s$. Из выпуклости функции $|Y_k(t)|$ на каждом частичном интервале $[t^k_{j,i-1},t^k_{j,i}]$ следует, что

$$\int_0^{l_1}|Y_k(t)|\,dt\geqslant\frac{1}{2}l_1\left(\frac{m}{M}\right)^{s/2},$$

откуда получаем

$$\|Y_k\|_{L_2^{\bar{B}}(0,l_1)}=\left[\int_0^{l_1}\bar{B}Y_k^2\,dt\right]^{1/2}\geqslant\sqrt{A_0B_0}\left[\int_0^{l_1}Y_k^2\,dt\right]^{1/2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{A_0B_0}}{\sqrt{l_1}}\int_0^{l_1}|Y_k|\,dt\geqslant\frac{\sqrt{A_0B\,l_1}}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^{s/2}.$$

Итак, если обозначить через $Y^\lambda_k(t)$ нормированное решение уравнения (2.19) при $\bar{B}(t)=B^k_j(t)$, когда $t\in\Delta_j$ ($j=1,\ldots,s$), то будем иметь

$$\sup_{t\in[0,l_1]}|Y^\lambda_k(t)|=\sup_{t\in[0,l_1]}\frac{|Y_k(t)|}{\|Y_k\|_{L_2(0,l_1)}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{A_0B_0l_1}}\left(\frac{M}{m}\right)^s=C, \tag{2.20}$$

причем постоянная C не зависит ни от λ, ни от k. Так как, далее, $Y^k_j=C^k_{j,i}\sin(\sqrt{b^k_{j,i}\lambda}\,t+\gamma^k_{j,i})$, то

$$\sup_{t\in[0,l_1]}|(Y^\lambda_k(t))'|\leqslant C_1\sqrt{\lambda}\ \text{ и }\ \sup_{t\in[0,l_1]}|(Y^\lambda_k(t))''|\leqslant C_2\lambda, \tag{2.21}$$

где C_1 и C_2 также не зависят ни от λ, ни от k.

Нетрудно видеть, принимая во внимание оценки (2.20) — (2.21), что последовательности $\{Y^\lambda_k(t)\}$ и $\{(Y^\lambda_k(t))'\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны; следовательно, по теореме Арцела существует подпоследовательность индексов k (оставим за ней прежнее обозначение) такая, что

$$\lim_{k\to\infty}Y^\lambda_k(t)=Y^\lambda(t),\quad \lim_{k\to\infty}(Y^\lambda_k(t))'=(Y^\lambda(t))',$$

причем, очевидно, $\|Y^\lambda(t)\|_{L_2^{\bar{B}}(0,l_1)}=1$ и

$$|Y^\lambda(t)|\leqslant C,\quad |(Y^\lambda(t))'|\leqslant C_1\sqrt{\lambda}. \tag{2.22}$$

Покажем теперь, что предельный элемент $Y^{\lambda}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.19). Имеем

$$(Y_k^{\lambda}(t))' - (Y_k^{\lambda}(t))'_{t=0} = \int_0^t (Y_k^{\lambda}(t))'' \, dt = -\int_0^t \lambda \bar{B}_k(t) \, Y_k^{\lambda}(t) \, dt, \quad (2.23)$$

где $\bar{B}_k = \bar{B}_j^k$ при $t \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Так как при $k \to \infty$ $\bar{B}_k(t) \, Y_k^{\lambda}(t) \xrightarrow{\text{сильно}} \bar{B}(t) \, Y^{\lambda}(t)$, то, переходя в равенстве (2.23) к пределу, получим

$$(Y^{\lambda}(t))' - (Y^{\lambda}(t))'_{t=0} = -\lambda \int_0^t \bar{B}(t) \, Y^{\lambda}(t) \, dt.$$

Дифференцируя это равенство по t, будем иметь $(Y^{\lambda}(t))'' = -\lambda \bar{B}(t) \, Y^{\lambda}(t)$, что и требовалось доказать. Отсюда, кроме того, следует, что

$$|(Y^{\lambda}(t))''| \leqslant C_2 \lambda. \quad (2.24)$$

Покажем теперь, что из существования оценок (2.22), (2.24) вытекает существование аналогичных оценок для нормированных решений уравнения (2.16). Пусть $Y_1^{\lambda}(t)$ и $Y_2^{\lambda}(t)$ — два линейно независимых нормированных решения уравнения (2.19), удовлетворяющие условиям

$$Y_1^{\lambda}(0) = Y_0, \; Y_2^{\lambda}(0) = 0, \; [Y_2^{\lambda}(t)]'_{t=0} = Y_0' \sqrt{\lambda}, \quad (2.25)$$

где Y_0 и Y_0' — заданные положительные числа, точнее $0 < Y_0 < C$, $0 < Y_0' < C_1$ (C и C_1 из (2.22)). Не нарушая общности доказательства, для упрощения выкладок предположим еще, что $Y_1^{\lambda}(t)$ и $Y_2^{\lambda}(t)$ ортогональны. Пусть теперь $Y_{\lambda}^*(t)$ — произвольное нормированное решение уравнения (2.16). Ясно, что $Y_{\lambda}^*(t)$ удовлетворяет тогда следующему интегральному тождеству:

$$Y_{\lambda}^*(t) = k_1 Y_1^{\lambda}(t) + k_2 Y_2^{\lambda}(t) + \int_0^t \frac{Y_1^{\lambda}(s) \, Y_2^{\lambda}(t) - Y_1^{\lambda}(t) \, Y_2^{\lambda}(s)}{Y_1^{\lambda}(s) \, [Y_2^{\lambda}(s)]' - Y_2^{\lambda}(s) \, [Y_1^{\lambda}(s)]'} \bar{C}(s) \, Y_{\lambda}^*(s) \, ds. \quad (2.26)$$

Отсюда, учитывая нормированность $Y_{\lambda}^*(t)$ и ортонормированность $Y_1^{\lambda}(t)$ и $Y_2^{\lambda}(t)$, получаем, что

$$k_1^2 + k_2^2 \leqslant k^2, \quad (2.27)$$

где k — вполне определенная постоянная величина, не зависящая от λ. Дальше, из равенства (2.26) следует, что

$$\sup_{t \in [0, l_1]} |Y_{\lambda}^*(t)| \leqslant C(|k_1| + |k_2|) + \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda}} \sup_{t \in [0, l_1]} |Y_{\lambda}^*(t)|,$$

где

$$\Delta = \frac{l_1}{Y_0 Y_0'} \sup_{s, t \in [0, l_1]} |[Y_1^{\lambda}(s) \, Y_2^{\lambda}(t) - Y_2^{\lambda}(s) \, Y_1^{\lambda}(t)] \, C(s)| \leqslant \frac{l_1}{Y_0 Y_0'} 2C^2 C_0.$$

Значит, при достаточно больших λ имеем

$$\sup_{t \in [0, l_1]} |Y_{\lambda}^*(t)| \leqslant 2C(|k_1| + |k_2|) = C^*. \quad (2.28)$$

Из (2.26) и (2.16) теперь без труда получаются и оценки

$$\sup_{t\in[0,l_1]} |(Y_\lambda^*(t))'| \leqslant C_1^* \sqrt{\lambda}, \quad \sup_{t\in[0,l_1]} |(Y_\lambda^*(t))''| \leqslant C_2^* \lambda. \tag{2.29}$$

Наконец, так как

$$Y_\lambda^*(t) = Y_\lambda^*\left(\int_0^x \frac{ds}{A(s)}\right) = X_\lambda(x), \quad [Y_\lambda^*(t)]'_t = A(x)\, X'_\lambda(x),$$

$$[Y_\lambda^*(t)]'' = A(x)\,[A(x)\,X'_\lambda(x)]' \text{ и } 1 = \int_0^{l_1} \overline{B}(t)\, Y_\lambda^{*2}(t)\, dt = \int_0^l B(x)\, X_\lambda^2(x)\, dx,$$

то лемму 5 можно считать полностью доказанной.

г. Горький

Поступило
20 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
2. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. II. М., ИИЛ, 1954.
4. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.

И. И. ЭТЕРМАН. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматриваются приближенные методы решения краевых задач и задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Строится эффективная оценка точности приближенного решения. Приводятся примеры, демонстрирующие быструю сходимость приближенного решения к точному. Дается способ построения асимптотических разложений решений дифференциальных уравнений и исследования решения в окрестности особой точки, который прилагается к уравнению Бесселя. (Работа поступила в журнал „Математика“ 22.IV.1968.)