О. А. Ладыженская, Начально-краевая задача для уравнений Навье–Стокса в областях с меняющейся со временем границей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1968, том 11, 97–128

О.А.Ладыженская

# НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ОБЛАСТЯХ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} & v_t - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{3} v_i v_{x_i} = -\nabla p + f(x,t) \\ & \operatorname{div} v = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

в ограниченной области $Q^T = \{(x,t): t \in (0,T),\ x \in \Omega_t\}$ пространства $E_4 \{(x,t): t \in (-\infty,\infty),\ x = (x_1,x_2,x_3) \in E_3\}$, и будем предполагать границу $S_t$ области $\Omega_t$ принадлежащей $C^2$ при всех $t \in [0,T]$ (причем "нормы" $S_t$ в $C^2$ равномерно ограничены) и меняющейся со временем с конечной скоростью. К системе (1) присоединим начальное и граничное условия:

$$v\Big|_{t=0} = v_0(x),\ x \in \Omega_0, \quad v\Big|_{S^T_{бок}} = \psi(s,t). \quad (2)$$

Ввиду уравнения $\operatorname{div} v = 0$ на $v_0$ и $\psi$ надо наложить ограничения: $\operatorname{div} v_0 = 0$ и $\int_{S_t} \psi(s,t)\cdot n\, ds = 0$, $\forall t \in [0,T]$. Задачу на определение скорости $v =$

$= (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ и давления $p = p(x,t)$ сведем, введя новые неизвестные функции $u(x,t) = v(x,t) - \Psi(x,t)$, к задаче

$$\left. \begin{aligned} & u_t - \nu \Delta u + (u_i + \Psi_i) u_{x_i} + u_i \Psi_{x_i} = -\nabla p + \mathcal{F} \\ & \operatorname{div} u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u\big|_{S^T_{бок}} = 0, \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

где $\mathcal{F} = f - \Psi_t + \nu \Delta \Psi + \Psi_i \Psi_{x_i}$, $u_0(x) = v_0(x) - \Psi(x,0)$,

а $\Psi(x,t)$ есть достаточно гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

$$\operatorname{div} \Psi(x,t) = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(x,t)\Big|_{x=s\in S_t} = \psi(s,t) \text{ для } \forall t \in [0,T].$$

Мы докажем для задачи (3) однозначную разрешимость в $W_2^{2,1}(Q^T)$ при любом $T$, если $\Psi \equiv 0$, а $u_0(x)$ и $f(x,t)$ в определенном смысле малы, и для малых $T$, если $\Psi$, $u_0$ и $f$ обладают лишь некоторой гладкостью. Приближенные решения будем находить по методу Ротэ, а их сходимость к решению задачи (3) установим с помощью двух априорных оценок.

§ I. Разобьем $Q^T$ плоскостями $t = t_k = k\Delta t \equiv kh$ на слои и обозначим через $\Omega_k$ сечение $Q^T$ плоскостью $t = t_k$, а через $S_k$ границу $\Omega_k$ [ж)]. Приближенные решения $u_h$ будем определять последовательно на сечениях $\Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots \left[\frac{T}{h}\right]$,

ж) Эти же обозначения $\Omega_k$ и $S_k$ сохраним и за их ортогональными проекциями в $E_4$ на гиперплоскость $t = 0$ - пространство $E_3$ изменения $x = (x_1, x_2, x_3)$.

как решения следующих линейных стационарных задач:

$$\left.\begin{aligned} & u_{\bar t}(K) - \nu\Delta u(K) + \left[u_i(K-1) + \Psi_i(K)\right] u_{x_i}(K) + \\ & \qquad + u_i(K)\Psi_{x_i}(K) = -\nabla p(K) + \mathcal{F}_h(K), \\ & \operatorname{div} u(K) = 0, \quad u\big|_{S_K} = 0, \quad u(0) = u_{0h}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

в которых $u(K) \equiv u(x, t_K)$, $x \in \bar\Omega_K$, $u_{\bar t}(K) = \frac{1}{h}[u(K) - u(K-1)]$, $\mathcal{F}_h(K) = \frac{1}{h}\int\limits_{(K-1)h}^{Kh} \mathcal{F}(x,\tau)\,d\tau$, $u_{0h}(x)$ есть соленоидальный вектор из $W_2^1(E_3)$, равный нулю вне $\Omega_0 \cap \Omega_1$ (ниже мы потребуем, чтобы $u_{0h}(x)$ сильно сходились в норме $W_2^1(E_3)$ к $u_0(x)$ при $h \to 0$). Более того, $u_{\bar t}(x, t_K)$, $x \in \bar\Omega_K$, в (4) считается равным $\frac{1}{h} u(x, t_K)$, если точка $(x, t_{K-1}) \bar\in \bar\Omega_{K-1}$. На каждом сечении $\Omega_K$ мы имеем, тем самым, линейную стационарную задачу. Она однозначно разрешима в $W_2^2(\Omega_K)$ (точнее, $u(K) \in W_2^2(\Omega_K)$, $\nabla p(K) \in L_2(\Omega_K)$), если только $u_0$, $\mathcal{F}$ и $\Psi$ обладают некоторой регулярностью. Именно, мы потребуем, чтобы:

$$\left.\begin{aligned} & u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0), \ \operatorname{div} u_0 = 0, \\ & \Psi(x,t) \in W_2^{2,1}(Q^T); \text{ а } f(x,t) \in L_2(Q^T), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

из чего следует, как известно:

$$\left.\begin{aligned} \|\mathfrak{F}\|_{2,Q^T} &\equiv \Big(\int_{Q^T} |\mathfrak{F}|^2 dx\, dt\Big)^{1/2} \le c \text{ и} \\ \|\psi_x\|_{2,\Omega_t} &\equiv \Big(\int_{\Omega_t} |\psi_x|^2 dx\Big)^{1/2} \le c, \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

где $|\psi| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \psi_i^2}$ , $|\psi_x| = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} \psi_{ix_k}^2}$ .

При выполнении этих условий задача (4) при всех $k=1,2,\dots$ $\dots\left[\frac{T}{h}\right]$ и $h$ , не превосходящих некоторого $h_0$ , имеет единственное решение $u(k) \in W_2^2(\Omega_k)$, $\nabla p(k) \in L_2(\Omega_k)$ , и для него справедлива оценка

$$\|u(k)\|_{W_2^2(\Omega_k)} + \|\nabla p(k)\|_{2,\Omega_k} \le c(k) \qquad (6)$$

с постоянной $c(k)$ , зависящей от $h, \mathfrak{F}, \psi, u(k-1)$ и $S_k$ . Доказывается это так же, как в [I] для системы Навье-Стокса, линеаризированной по Стоксу (см. гл. УI, § II и гл. Ш § 5). Наличие линейных членов младшего порядка не вносит никаких трудностей. Из § 5 гл. Ш [I] нам понадобится еще оценка типа (6) (оценка В.А.Солонникова) для стоксовской линеаризации, именно

$$\|v(x)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \le \beta_1 \|\rho^k \Delta v(x)\|_{2,\Omega_k}, \qquad (7)$$

справедливая для любого соленоидального вектора $v(x)$ из $W_2^2(\Omega_k)$, равного нулю на $S_k$. Множество таких $v(x)$ обозначим через $J_{2,0}^2(\Omega_k)$. Постоянная $\beta_1$ в (7) зависит от "нормы" $S_k$ в $C^2$. Наше предположение о гладкости границ $S_t$, $t \in [0,T]$, состоит в том, что постоянная $\beta_1$ в (7) может быть взята общей для всех $S_t$, $t \in [0,T]$. Символ $P^k$ означает оператор ортогонального проектирования в пространстве вектор-функций $L_2(\Omega_k)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega_k) = L_2(\Omega_k) \ominus G(\Omega_k)$, где $G(\Omega_k)$ есть совокупность всех вектор-функций вида $\nabla \varphi(x)$, $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega_k)$.

Итак, мы на всех $\Omega_k$, $k = 1, 2, \dots \left[\frac{T}{h}\right]$ определим функцию $u(k) \in J_{2,0}^2(\Omega_k)$, считая

$$u_0(x) \in J_{2,0}^1(\Omega_0) \tag{8}$$

(т.е. $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ и $\operatorname{div} u_0 = 0$). Продолжим каждое $u(k)$, $k = 0, 1, \dots$ нулем вне $\bar{\Omega}_k$ и за этим продолжением сохраним прежнее обозначение $u(k)$. Заметим, что такие $u(k)$ будут принадлежать $J_{2,0}^1(E_3)$, но не $J_{2,0}^2(E_3)$.

§ 2. Получим теперь для $u(k)$ оценки, не зависящие от $h$. Для этого умножим (4) скалярно на $u(k)$, проинтегрируем по $\Omega_k$ и результат после элементарных преобразований представим в виде

$$\int\limits_{\Omega_K} \left[ u_t(K)u(K) + \nu u_x^2(K) + u_i(K)\Psi_{x_i}(K)u(K) \right] dx = \tag{9}$$
$$= \int\limits_{\Omega_K} \mathcal{F}_h(K)\, u(K)\, dx .$$

Здесь и ниже нам понадобится следующее равенство

$$\left[ u(K) - u(K-1) \right] u(K) = \frac{1}{2}\left[ u^2(K) - u^2(K-1) \right] + \frac{1}{2}\left[ u(K) - u(K-1) \right]^2 . \tag{I0}$$

Умножим (9) на $h$ и просуммируем по $K$ от I до $m \leq \left[ \frac{T}{h} \right]$. В силу (I0) и нашего определения $u_t(K)$ будем иметь

$$h \sum_{K=1}^{m} \int\limits_{\Omega_K} u_t(K)u(K)dx \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_m} u^2(m)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} u^2(0)dx \tag{II}$$

и

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_m} u^2(m)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} u^2(0)dx + h\sum_{K=1}^{m} \nu \int\limits_{\Omega_K} u_x^2(K)dx \leq \tag{I2}$$
$$\leq h\sum_{K=1}^{m} \int\limits_{\Omega_K} \left[ -u_i(K)\Psi_{x_i}(K)u(K) + \mathcal{F}_h(K)u(K) \right] dx .$$

Оценим правую часть, используя неравенство Коши и Юнга, и неравенство (3) § I гл. I [I] так:

$$\Big|\int_{\Omega_k} u_i(k)\psi_{x_i}(k)\,u(k)\,dx\Big| \le \|\psi_x\|_{2,\Omega_k}\|u\|^2_{4,\Omega_k} \le$$

$$\le 2\|\psi_x\|_{2,\Omega_k}\|u\|^{1/2}_{2,\Omega_k}\|u_x\|^{3/2}_{2,\Omega_k} \le \tag{13}$$

$$\le c\Big(\frac{3}{2}\varepsilon^{4/3}\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}+\frac{1}{2\varepsilon^4}\|u\|^2_{2,\Omega_k}\Big)^{*)}$$

и

$$\Big|\int_{\Omega_k}\mathcal{F}_h(k)\,u(k)\,dx\Big| \le \frac{1}{2}\|\rho^k\mathcal{F}_h\|^2_{2,\Omega_k}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{2,\Omega_k}.$$

Возьмем в (13) $\varepsilon$ таким, что $\frac{3}{2}c\,\varepsilon^{4/3}=\frac{\nu}{2}$.

Из (12) в силу последних двух неравенств следует

$$\int_{\Omega_m}u^2dx-\int_{\Omega_0}u^2dx+h\sum_{k=1}^{m}\nu\int_{\Omega_k}u_x^2\,dx \le$$
$$\le h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\big[c_1u^2+(\rho^k\mathcal{F}_h)^2\big]\,dx, \tag{14}$$

---

*) $\|u\|_{q,\Omega}=\Big(\int_{\Omega}|u|^q\,dx\Big)^{1/q}$.

где $C_1 = 1 + \frac{3^3 c^4}{\nu^3}$ . Из (I4) известным способом выводится оценка

$$\int\limits_{\Omega_m} u^2 dx + h \sum_{k=1}^{m} \nu \int\limits_{\Omega_k} u_x^2 dx \le \tag{I5}$$

$$\le C_2 \Big[ \int\limits_{\Omega_0} u^2 dx + h \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega_k} (p^k \mathcal{F}_h)^2 dx \Big]$$

для $m = 1, 2, \ldots \left[\frac{T}{h}\right]$, $h \le \frac{1}{2C_1}$ причем постоянная $C_2$ зависит лишь от $T$ и $C_1$ .

Перейдем к выводу второй оценки. Для этого умножим (4) скалярно на $-p^k \Delta u(k)$ и проинтегрируем по $\Omega_k$:

$$-\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar{t}}(k) p^k \Delta u(k) dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} (p^k \Delta u(k))^2 dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_k} \Big\{ [u_i(k-1) + \Psi_i(k)] u_{x_i}(k) + \tag{I6}$$

$$+ u_i(k) \Psi_{x_i}(k) \Big\} p^k \Delta u(k) dx - \int\limits_{\Omega_k} \mathcal{F}_h(k) p^k \Delta u(k) dx .$$

Оценим сначала члены, стоящие в правой части (I6). При этом используем кроме (7) неравенства Гёльдера и предположений (5) известные неравенства:

$$\| u \|_{6,\Omega} \le \beta_2 \, \| u_x \|_{2,\Omega} \qquad \text{для } \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{I7}$$

$$\|u\|_{6,\Omega} \le \beta_3 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \quad \text{для } \forall u \in W_2^1(\Omega), \tag{18}$$

$$\|u\|_{q,\Omega} \le \varepsilon \|u_x\|_{2,\Omega} + c_{\varepsilon,q} \|u\|_{2,\Omega}, \tag{19}$$

для $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ с любым $\varepsilon > 0$ и $q < 6$ и

$$\max_{\Omega} |u| \le \varepsilon \|u_{xx}\|_{2,\Omega} + c_\varepsilon \|u_x\|_{2,\Omega} \tag{20}$$

для $\forall u \in W_2^2(\Omega)$ и $u|_S = 0$ с любым $\varepsilon > 0$ *). Именно:

$$\Big|\int_{\Omega_\kappa} \mathcal{F}_h(\kappa)\rho^\kappa \Delta u(\kappa)dx\Big| \le \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa} \|\rho\mathcal{F}_h\|_{2,\Omega_\kappa} \le \frac{\nu}{8}\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_\kappa} + \frac{2}{\nu}\|\rho\mathcal{F}_h\|^2_{2,\Omega_\kappa};$$

$$\Big|\int_{\Omega_\kappa} \psi_i(\kappa)u_{x_i}(\kappa)\rho^\kappa\Delta(\kappa)dx\Big| \le \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa} \| |\psi|\cdot|u_x| \|_{2,\Omega_\kappa} \le$$

$$\le \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa} \|\psi\|_{6,\Omega_\kappa} \|u_x\|_{3,\Omega_\kappa} \le$$

$$\le \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa} \|\psi\|_{6,\Omega_\kappa} (\varepsilon \|u_{xx}\|_{2,\Omega_\kappa} + c_{\varepsilon,3}\|u_x\|_{2,\Omega_\kappa}) \le$$

$$\le \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa} \|\psi\|_{6,\Omega_\kappa} (\varepsilon\beta_1 \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa} + c_{\varepsilon,3}\|u_x\|_{2,\Omega_\kappa}) \le$$

---

*) Постоянные в (17)-(20) зависят от $S$. При наших предположениях о $S_t$, $t \in [0,T]$, они могут быть взяты общими для всех $S_t$, $t \in [0,T]$.

$$\leq \|\Psi\|_{6,\Omega_\kappa}\left(\frac{3}{2}\varepsilon\beta_1\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_\kappa}+\frac{c^2_{\varepsilon,3}}{2\varepsilon\beta_1}\|u_x\|^2_{2,\Omega_\kappa}\right);$$

$$\left|\int\limits_{\Omega_\kappa} u_i(\kappa)\Psi_{x_i}(\kappa)\rho^\kappa\Delta u(\kappa)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\,\|\,|u|\cdot|\Psi_x|\,\|_{2,\Omega_\kappa} \leq$$

$$\leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\cdot\max_{\Omega_\kappa}|u(\kappa)|\cdot\|\Psi_x\|_{2,\Omega_\kappa} \leq$$

$$\leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\|\Psi_x\|_{2,\Omega_\kappa}\left(\varepsilon\|u_{xx}\|_{2,\Omega_\kappa}+c_\varepsilon\|u_x\|_{2,\Omega_\kappa}\right) \leq$$

$$\leq \|\Psi_x\|_{2,\Omega_\kappa}\left(\frac{3}{2}\varepsilon\beta_1\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_\kappa}+\frac{c^2_\varepsilon}{2\varepsilon\beta_1}\|u_x\|^2_{2,\Omega_\kappa}\right).$$

Оставшийся член правой части (I6) оценим так же, как это было сделано для задачи с неподвижной границей при получении оценки, аналогичной выводимой здесь (см. гл. УI второго английского издания книги [I]):

$$\left|\int\limits_{\Omega_\kappa} u_i(\kappa-1)u_{x_i}(\kappa)\rho^\kappa\Delta u(\kappa)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \|\rho\,\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\,\|\,|u(\kappa-1)|\cdot|u_x(\kappa)|\,\|_{2,\Omega_\kappa} \leq$$

$$\le \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k} \|u(k-1)\|_{6,\Omega_k} \Big(\int\limits_{\Omega_k} |u_x|^{3/2} \cdot |u_x|^{3/2} dx\Big)^{1/3} \le$$

$$\le \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k} \|u(k-1)\|_{6,\Omega_k} \|u_x\|_{2,\Omega_k}^{1/2} \|u_x\|_{6,\Omega_k}^{1/2} \le$$

$$\le \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k} \|u\|_{6,\Omega_{k-1}} \|u_x\|_{2,\Omega_k}^{1/2} \beta_3^{1/2} \|u_x\|_{W_2^1(\Omega_k)}^{1/2} \le \tag{21}$$

$$\le \sqrt{\beta_1\beta_3}\, \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k}^{3/2} \|u\|_{6,\Omega_{k-1}} \|u_x\|_{2,\Omega_k}^{1/2} \le$$

$$\le \beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}\, \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k}^{3/2} \|u_x\|_{2,\Omega_{k-1}} \|u_x\|_{2,\Omega_k}^{1/2} \le$$

$$\le \beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}\, \Big[\frac{3}{4}\varepsilon^{4/3} \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k}^{2} + \frac{1}{4\varepsilon^4} \|u_x\|_{2,\Omega_{k-1}}^{4} \|u_x\|_{2,\Omega_k}^{2}\Big].$$

Используем все только что полученные неравенства для оценки правой части (I6):

$$-\int_{\Omega_k} u_{\bar{t}}(k)\, p^k \Delta u(k)\, dx + \nu \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}\left(\frac{\nu}{8} + \frac{3\varepsilon\beta_1}{2}\|\psi\|_{6,\Omega_k} + \frac{3\varepsilon\beta_1}{2}\|\psi_x\|_{2,\Omega_k} +\right.$$

$$\left. + \beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}\,\frac{3}{4}\,\varepsilon^{4/3}\right) + \frac{\beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}}{4\varepsilon^4}\|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}}\|u_x\|^2_{2,\Omega_k} +$$

$$+ \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}\left(\frac{C^2_{\varepsilon,3}}{2\varepsilon\beta_1}\|\psi\|_{6,\Omega_k} + \frac{C^2_{\varepsilon}}{2\varepsilon\beta_1}\|\psi_x\|_{2,\Omega_k}\right) + \tag{22}$$

$$+ \frac{2}{\nu}\|p\mathcal{F}_h\|^2_{2,\Omega_k}.$$

Займемся теперь изучением первого члена левой части (22). Для этого заметим, что если вектор $v \in L_2(\Omega)$ и $v = Pv \oplus \nabla\varphi$ - его ортогональное разложение, то, умножая это равенство скалярно на $\nabla\Phi$, и интегрируя, получим

$$\int_\Omega v\,\nabla\Phi\, dx = \int_\Omega \varphi_x \Phi_x\, dx \tag{23}$$

при любой скалярной функции $\Phi$ из $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $\hat{W}_2^1(\Omega)$ гильбертово пространство, состоящее из скалярных функций $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$, подчиняющихся условию $\int\limits_\Omega \Phi\, dx = 0$. Скалярное произведение в нем введем так:

$$[\varphi, \Phi] = \int\limits_\Omega \varphi_x \Phi_x\, dx.$$

Тождество (23) однозначно определяет $\varphi$ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$ по $v$ из $L_2(\Omega)$. Действительно, (23) можно записать в виде

$$[\varphi, \Phi] = \int\limits_\Omega v \nabla \Phi\, dx. \qquad (\tilde{23})$$

Правая часть его, как легко видеть, определяет линейный функционал над $\Phi$ в $\hat{W}_2^1(\Omega)$. В силу теоремы Рисса его можно представить в виде скалярного произведения $[A(v), \Phi]$ причем $A(v)$ определяется по $v$ однозначно. Этот элемент $A(v)$ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$ и есть, очевидно, искомое решение $\varphi$ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$.

Первый член в (22) представим так:

$$-\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar{t}}(k) \rho^k \Delta u(k)\, dx = -\int\limits_{\Omega_k} \rho^k u_{\bar{t}}(k) \Delta u(k)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar{t}}(k) \Delta u(k)\, dx - \int\limits_{\Omega_k} \frac{u(k-1) - \rho^k u(k-1)}{\Delta t} \Delta u(k)\, dx = \qquad (24)$$

$$= \int\limits_{\Omega_k} u_{x\bar{t}}(k) u_x(k)\, dx - \int\limits_{S_k} u_{\bar{t}}(k) \frac{\partial u(k)}{\partial n}\, dS -$$

$$- \int\limits_{\Omega_k} \frac{u(k-1) - \rho^k u(k-1)}{\Delta t} \Delta u(k)\, dx,$$

учитывая: $\rho^{k} u(k) = u(k)$ . Но

$$j_1 \equiv \left| \int\limits_{S_k} u_{\bar t}(k) \frac{\partial u(k)}{\partial n} ds \right| = \left| \int\limits_{S_k} \frac{u(k-1)}{\Delta t} \frac{\partial u(k)}{\partial n} ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Delta t} \| u(k-1) \|_{2,S_k} \cdot \| u_x(k) \|_{2,S_k} . \tag{25}$$

Ниже будет доказано, что

$$\| u(k-1) \|_{2,S_k} \leq c_1 \Delta t \left( \varepsilon \| u_{xx}(k-1) \|_{2,\Omega_{k-1}} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x(k-1) \|_{2,\Omega_{k-1}} \right) \tag{26}$$

с любым $\varepsilon \in (0,1]$ . Кроме того известно, что для любой функции $u$ из $W_2^2(\Omega)$

$$\| u_x \|_{2,S} \leq c \left( \varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega} \right) \tag{27}$$

с любым $\varepsilon \in (0,1]$ . (см. ниже неравенство (51') ). В силу (26) и (27) из (25) получим

$$j_1 \leq c c_1 \left( \varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega_{k-1}} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega_{k-1}} \right) \times$$

$$\times \left( \varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega_k} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega_k} \right). \tag{28}$$

Элемент же $u(k-1) - \rho^{k} u(k-1)$ имеет вид $\nabla \varphi$ , и для него в силу $(\tilde{23})$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega_\kappa} \varphi_x \Phi_x \, dx = \int\limits_{\Omega_\kappa} u(\kappa-1) \nabla \Phi \, dx \text{ при } \forall \Phi \in \hat{W}_2^1(\Omega_\kappa). \quad (29)$$

Преобразуем правую часть (29), помня, что $u(\kappa-1) \in \mathring{J}^1_{2,0}(E_3)$,

$$\int\limits_{\Omega_\kappa} \varphi_x \Phi_x \, dx = -\int\limits_{\Omega_\kappa} \Phi \operatorname{div} u(\kappa-1) \, dx +$$

$$+ \int\limits_{S_\kappa} u(\kappa-1) \cdot n \, \Phi \, ds = \int\limits_{S_\kappa} u_n(\kappa-1) \Phi \, ds.$$

Отсюда следует

$$\left| \int\limits_{\Omega_\kappa} \varphi_x \Phi_x \, dx \right| \leq$$

$$\leq \| u_n(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa} \| \Phi \|_{2,S_\kappa} \leq c_2 \| u(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa} \| \Phi_x \|_{2,\Omega_\kappa},$$

и, ввиду произвола $\Phi$,

$$\| \varphi_x \|_{2,\Omega_\kappa} = \| u(\kappa-1) - p^\kappa u(\kappa-1) \|_{2,\Omega_\kappa} \leq c_2 \| u(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa}. \quad (30)$$

Благодаря (30) и (26)

$$\left| \int\limits_{\Omega_\kappa} \frac{u(\kappa-1) - p^\kappa u(\kappa-1)}{\Delta t} \Delta u(\kappa) \, dx \right| \leq$$

$$\leq c_1 c_2 \| \Delta u \|_{2,\Omega_\kappa} \left( \varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} \right) \quad (31)$$

и потому из (24) в силу (28), (31) и (7) получим

$$-\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar t}(k)\,\rho^k\,\Delta u(k)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_k} u_{x\bar t}(k)\,u_x(k)\,dx - c_3\,(\varepsilon\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} + \tag{32}$$

$$+\varepsilon\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_{k-1}} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_{k-1}}).$$

Заменим первый член в (22) меньшей величиной из (32), затем полученные неравенства просуммируем по $k$ от $k=2$ до $k=m$, приведем подобные члены, умножим на $h$, учтем условия (5), (8) и оценку (15) и выберем все $\varepsilon$ столь малыми, чтобы коэффициенты при $\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}$ и $\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_{k-1}}$ были бы не больше $\frac{\nu}{4}$. В результате этого придем к неравенству

$$h\sum_{k=2}^{m}\Big(\int\limits_{\Omega_k} u_{x\bar t}(k)\,u_x(k)\,dx + \frac{\nu}{2}\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant c + ch\sum_{k=2}^{m}\|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{\nu}{4}\,h\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_1}. \tag{33}$$

Прибавим к нему неравенство (22) с $K=1$, умноженное на $h$, причем учтем, что ввиду $u(0)\big|_{S_1} = u_{oh}\big|_{S_1} = 0$ при $K=1$ вместо (24) справедливо равенство

$$-\int\limits_{\Omega_1} u_{\bar t}(1)\, p^4 \Delta u(1)\, dx = \int\limits_{\Omega_1} u_{x\bar t}(1) v_x(1)\, dx. \qquad (34)$$

Это дает

$$h\sum_{K=1}^{m}\Big(\int\limits_{\Omega_K} u_{x\bar t}(K) u_x(K)\, dx + \frac{\nu}{2}\|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_K}\Big) \le$$

$$\le C_1 + C_2 h\sum_{K=1}^{m} \|u_x\|^4_{2,\Omega_{K-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_K}. \qquad (35)$$

Для первого члена левой части (35) в силу (10) и того, что $u(x, t_K) = 0$ для $x \bar\in \Omega_K$, верно неравенство (11) с функцией $u_x$ вместо $u$ именно:

$$h\sum_{K=1}^{m} \int\limits_{\Omega_K} u_{x\bar t}(K)\, u_x(K)\, dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_m} u_x^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} (u_{ohx})^2\, dx. \qquad (36)$$

Поэтому из (35) следует

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} + \nu h \sum_{k=1}^{m} \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \le$$

$$\le C_3 + C_4 h \sum_{k=1}^{m} \|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}, \qquad (37)$$

при $m = 1,2,\dots,\left[\frac{T}{h}\right]$, $(C_4 = 2C_2)$.

Из этих неравенств можно заключить, что на некотором интервале $[0, T_1]$ величина, стоящая в левой части (37), не превосходит некоторой постоянной $C$ для $m \le m_0 = \left[\frac{T}{h}\right]$, причем $T$ и $C$ определяются $C_3$, $C_4$ и $\|u_x\|_{2,\Omega_0}$. Действительно, отбрасывая сначала второй член левой части (37) и обозначая правую часть (37) через $z(m)$, получим

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} \le z(m), \; m = 1,2,\dots m_0, \qquad (38)$$

и

$$\frac{1}{h}\left[z(m) - z(m-1)\right] =$$

$$= C_4 \|u_x\|^4_{2,\Omega_{m-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_m} \le C_4 z^2(m-1)\, z(m), \qquad (39)$$

$m = 2,\dots m_0$.

Подсчитаем, для каких $m$ выполняется неравенство $z(m) \le M z(1)$, где $M$ – число, которое будет выбрано ниже $(M>1)$. Пусть $\varkappa(K) \leq M \varkappa(1)$ для $K \leq m$. Тогда из (39) получим

$$\varkappa(K) \leq \frac{\varkappa(K-1)}{1-C_{\text{ч}} h \varkappa^2(K-1)} \leq \frac{\varkappa(K-1)}{1-C_{\text{ч}} h M^2 \varkappa^2(1)} \leq$$
$$\leq \left[1+2C_{\text{ч}} h M^2 \varkappa^2(1)\right] \varkappa(K-1), \tag{40}$$

считая $h$, удовлетворяющим условию

$$C_{\text{ч}} h M^2 \varkappa^2(1) \leq \frac{1}{2}. \tag{4I}$$

Далее, из (40) следует

$$\varkappa(K) \leq (1+2C_{\text{ч}} h M^2 \varkappa^2(1))^{K-1} \varkappa(1) \leq$$
$$\leq \exp\left\{2C_{\text{ч}} M^2 \varkappa^2(1)(K-1)h\right\} \varkappa(1). \tag{42}$$

Это неравенство верно, пока $\varkappa(K) \leq M \varkappa(1)$, т.е. для $K$, удовлетворяющих условию

$$\exp\left\{2C_{\text{ч}} M^2 \varkappa^2(1)(K-1)h\right\} \leq M. \tag{43}$$

Легко подсчитать, что при $M=\sqrt{e}$ величина $(K-1)h$, удовлетворяются (43) со знаком равенства, имеет наибольшее возможное значение. Поэтому возьмем $M=\sqrt{e}$ и обозначим, через $T^h$ число $(4C_{\text{ч}} e \varkappa^2(1))^{-1}$. При $K \leq 1+\left[\frac{T^h}{h}\right]$ будет выполняться (43) с $M=\sqrt{e}$, а следовательно и оценка $\varkappa(K) \leq \sqrt{e}\, \varkappa(1)$. Возвращаясь к (37), находим, что

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} + \nu h \sum_{k=1}^{m} \|\rho \Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \le \sqrt{e}\, z(1) \qquad (44)$$

для $m \le 1 + [\frac{T^h}{h}] \equiv m^h$. Величина же $z(1)$ оценивается через известные нам величины из (37) при $m=1$, именно

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_1} \le z(1) = c_3 + c_4 h \|u_x\|^4_{2,\Omega_0} \|u_x\|^2_{2,\Omega_1},$$

и потому

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_1} \le 2c_3$$

и

$$z(1) \le 2c_3 \qquad (45)$$

при $h$, удовлетворяющих условию

$$h \le \frac{1}{2c_4 \|u_x\|^4_{2,\Omega_0}}. \qquad (46)$$

Условие (4I), наложенное на $h$ выше, будет выполняться, если мы потребуем от $h$, кроме (46), удовлетворения неравенству

$$h \le (8 C_4 C_3^2 e)^{-1} . \tag{47}$$

Напомним, наконец, что при доказательстве неравенства (I5) ( а оно использовано при данном выводе), мы предполагали $h \le (2C_1)^{-1}$, $C_1 = 1 + (\frac{3}{\nu})^3 C^4$, где " $C$ " взято из (5 ).

Неравенства (44) и (45) с учетом неравенства (7) дают оценку

$$\| u_x \|^2_{2,\Omega_m} + h \sum_{k=1}^{m} \| u \|^2_{W_2^2(\Omega_k)} \le C_5 \tag{48}$$

при $m = 1, 2, \ldots, m_1 = \left[ \frac{T_1}{h} \right]$, где $T_1 = (16 C_3^2 C_4 e)^{-1}$.

Из (48) и системы (4) получим оценку для $u_{\bar t}$. В силу (4)

$$u_{\bar t}(K) = \rho^K u_{\bar t}(K) + \frac{\rho^K u(K-1) - u(K-1)}{\Delta t} = \nu \rho^K \Delta u(K) -$$

$$-\rho^K \left[ (u_i(K-1) + \psi_i(K)) u_{x_i}(K) + u_i(K) \psi_{x_i}(K) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{F}_h \right] + \frac{\rho^K u(K-1) - u(K-1)}{\Delta t} .$$

Из этого соотношения, оценок (26) и (30), равенства(34), оценок членов, стоящих в правой части (I6), данных после формулы (20) и уже установленной оценки (48), получим

$$h\sum_{k=1}^{m}\|u_{\bar t}(k)\|^2_{2,\Omega_k}\le c_6\,,\quad m=1,2,\dots m_1.$$

Это неравенство вместе с (48) дает вторую основную для нас оценку

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m}+h\sum_{k=1}^{m}\left(\|u_{\bar t}\|^2_{2,\Omega_k}+\|u\|^2_{W_2^2(\Omega_k)}\right)\le c_7\,, \qquad (49)$$

при $m=1,2,\dots m_1=\left[\frac{T_1}{h}\right]$, где $T_1=(16c_3^{-2}c_4e)^{-1}$. Постоянная $c_7$ общая для всех достаточно малых $h<\bar h$, удовлетворяющих требованиям (46) и (47) ).

Для завершения доказательства оценки (49) нам осталось проверить справедливость неравенства (26). Мы докажем (26)для любой скалярной функции $u(x)$, используя лишь то, что она принадлежит $W_2^2(\Omega_{k-1})\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_{k-1})$ и равна нулю вне $\Omega_{k-1}$. Относительно изменения границы $S_t$ предположим, что оно происходит со скоростью, не превышающей некоторого числа $\beta_0$, точнее считаем, что для всех $\Delta t\le h_0$ и всех $t\in[0,T]$: I) множество точек $\bar\Omega_t+\Pi_{t,\Delta t}$ содержит $\bar\Omega_{t-\Delta t}$, где $\Pi_{t,\Delta t}$ есть приграничная к $S_t$ полоса $[S_t, S_t+\beta_0\Delta t\, n_t]$ ширины $\beta_0\Delta t$ (т.е. совокупность точек $x$, расположенных на внешних к $S_t$ нормалях $n_t$ и отстоящих от $S_t$ вдоль этих нормалей на расстояние, не большее $\beta_0\Delta t$) и 2) приграничная к $S_{t-\Delta t}$ полоса

$\tilde{\Pi}_{t-\Delta t,\Delta t} = [S_{t-\Delta t} - \beta_0 \Delta t\, n_{t-\Delta t}, S_{t-\Delta t}]$ содержит $\bar{\Omega}_{t-\Delta t} \cap \Pi_{t,\Delta t}$ ( $\tilde{\Pi}_{t-\Delta t,\Delta t}$ состоит из точек $x$, расположенных на внутренних к $S_{t-\Delta t}$ нормалях и отстоящих от $S_{t-\Delta t}$ на расстояние, не большее $\beta_0 \Delta t$ ). Из условий I) и 2) видно, что $S_t$ при возрастании $t$ может " раздуваться" с любой скоростью, а "сужаться" с конечной.

Итак, нам надо оценить $\int\limits_{S_t} u^2(x)\,ds$, зная, что $u \in W_2^2(\Omega_{t-\Delta t}) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_{t-\Delta t})$ и $u(x) \equiv 0$ для $x \bar{\in} \Omega_{t-\Delta t}$. В силу условия I) функция $u(x)$ равна нулю на внешней границе $\Pi_{t,\Delta t}$, поэтому, как хорошо известно,

$$\int\limits_{S_t} u^2 ds \leq c\beta_0 \Delta t \int\limits_{\Pi_{t,\Delta t}} u_x^2\, dx = c\beta_0 \Delta t \int\limits_{\Pi_{t,\Delta t} \cap \Omega_{t-\Delta t}} u_x^2\, dx.$$

Учитывая условие 2), отсюда заключаем, что

$$\int\limits_{S_t} u^2 ds \leq c\beta_0 \Delta t \int\limits_{\tilde{\Pi}_{t-\Delta t,\Delta t}} u_x^2\, dx \leq c_1 \beta_0 \Delta t \int\limits_0^{\beta_0 \Delta t} \int\limits_{S^\tau} u_x^2\, ds\, d\tau, \qquad (50)$$

где через $S^\tau$ обозначено семейство поверхностей $S_{t-\Delta t} - \tau n_{t-\Delta t}$ (т.е. $S^\tau$ есть совокупность концов внутренних нормалей к $S_{t-\Delta t}$ длины $\tau$ ). Величину $\Delta t$ считаем при этом столь малой, что $S^\tau$, $0 \leq \tau \leq \beta_0 \Delta t$, составляют регулярное семейство координатных поверхностей. Далее известно, что в области $\Omega$, ограниченной гладкой поверхностью $S$, для любой $v(x) \in W_1^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_S |v(x)|\,ds \le c \int_\Omega (|v| + |v_x|)\,dx \tag{51}$$

с постоянной $c$, определяемой лишь "нормой" $S$ в $C^1$.

Применяя его к $v = u_x^2$, получим

$$\begin{aligned}\int_{S^\tau} u_x^2\,dx &\le c \int_{\Omega^\tau} \{u_x^2 + [\sum_{i=1}^{3} (2u_{x_k} u_{x_k x_i})^2]^{1/2}\}\,dx \le \\ &\le c \int_{\Omega^\tau} [u_x^2 + 2\sum_{i,k=1}^{3} |u_{x_k} u_{x_k x_i}|]\,dx \le \\ &\le c \int_{\Omega_{t-\Delta t}} [\varepsilon u_{xx}^2 + (1 + \tfrac{3}{\varepsilon}) u_x^2]\,dx\end{aligned} \tag{51'}$$

с любым $\varepsilon > 0$. Подставляя эту оценку в (50), придем после элементарных оценок к желаемому неравенству

$$\int_{S_t} u^2\,ds \le c_2 (\beta_0 \Delta t)^2 \int_{\Omega_{t-\Delta t}} (\varepsilon u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon} u_x^2)\,dx, \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Тем самым вывод оценки (49) закончен.

§ 3. Устремим теперь $h$ к нулю. Функции $u_{oh}(x)$ будут при этом сходиться к $u_o(x)$ в $W_2^1(E_3)$, а $\mathcal{F}_h(x,t)$ к

$\mathcal{F}(x,t)$ в $L_2(Q^T)$. Обозначим через $u_h$ вектор-функцию, определенную нами выше на сечениях $\Omega_k$, $k=0,1,\ldots[\frac{T}{h}]\equiv m_0$, как решение задач (4) с $\Delta t = h$, причем $u_h(x,t_k)$ считается продолженной нулем вне $\Omega_k$. Заключим $Q^T$ в цилиндр $Q_T = \Omega \times (0,T)$ и построим по $u_h$ в $Q_{m_0 h} = \Omega \times (0, m_0 h)$ непрерывные функции $u_h'(x,t)$, совпадающие с $u_h$ на сечениях $t = kt$, $k=0,1,\ldots m_0$, и линейные по $t$ для $t\in((k-1)h, kh)$. Как легко видеть, такие функции принадлежат $J_{2,0}^{1,0}(Q_{m_0 h})$, т.е. соленоидальны, обращаются в нуль на боковой поверхности $Q_{m_0 h}$ и имеют конечную норму

$$\| u_h' \|_{J_{2,0}^{1,0}(Q_{m_0 h})} \equiv \left\{ \int_{Q_{m_0 h}} [(u_h')^2 + (u_{hx}')^2]\, dx\, dt \right\}^{1/2},$$

причем в силу (15) величины $\| u_h' \|_{J_{2,0}^{1,0}(Q_{m_0 h})}$ равномерно ограничены. Поэтому из $\{u_h'\}$ можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится в $J_{2,0}^{1,0}(Q_{T-\varepsilon})$ ($\varepsilon$ - произвольно-малое) к некоторому элементу $u(x,t)$ из $J_{2,0}^{1,0}(Q_T)$. Т.к. в любой точке $(x,t)\in \bar{Q}_T \setminus \bar{Q}^T$ все функции $u_h'$, начиная с достаточно малого $h$, равны нулю, то и $u$ в них равно нулю, и потому $u(x,t)\in J_{2,0}^{1,0}(Q_T)$.

Далее, $u_h(k) \in W_{2,0}^2(\Omega_k)$, поэтому для любой области $Q'$, отстоящей от боковой поверхности и верхнего основания $Q^{T_1}$ на положительное расстояние, все функции $u_h'$, начиная с некоторого $h$, принадлежат

$W_2^{2,1}(Q')$ и их нормы

$$\| u'_h \|_{W_2^{2,1}(Q')} \equiv \left\{ \iint_{Q'} \left[ |u'_h|^2 + \left|\frac{\partial u'_h}{\partial t}\right|^2 + |u'_{hxx}|^2 \right] dx\, dt \right\}^{1/2}$$

ограничены постоянной $C$, не зависящей ни от $h$, ни от $\delta$. Ввиду этого и для предельной функции $\| u \|_{W_2^{2,1}(Q')} \leq C$, а в силу произвольности $\delta$ и $\| u \|_{W_2^{2,1}(Q^{T_1})} \leq C$.

Осталось показать, что функция $u$ удовлетворяет системе (3). Делается это так же, как в [2] при доказательстве сходимости решений разностных уравнений к решению начально-краевой задачи для гиперболических уравнений (см. § 6 гл. I и §§ I-2 гл. III).

Именно, наряду с интерполяцией $u'_h$ введем интерполяцию $\tilde{u}_h$ для $u_h$. Функция $\tilde{u}_h(x,t)$ на слоях $t = kh$ равна $u_h(k) = u_h(x,t_k)$, а для $t \in ((k-1)h, kh]$ равна $u_h(k)$.

Ясно, что $(\widetilde{u_{h\bar{t}}})(x,t) = \dfrac{\partial u'_h(x,t)}{\partial t}$ для $t \in ((k-1)h, kh)$ и

$(\widetilde{u_{hxx}}) = (\tilde{u}_h)_{xx}$.

Возьмем гладкую соленоидальную вектор-функцию $\Phi(x,t)$, равную нулю вблизи боковой поверхности и верхнего основания области $Q^{T_1}$. Умножим на $h\,\Phi(x,t)$ скалярно первое из уравнений (4), проинтегрируем полученное равенство по $\Omega_k$, сложим по всем $k$ от $1$ до $m_1$, и результат запишем так:

$$0=h\sum_{k=1}^{m_1}\int_{\Omega_k}[u_{h\bar t}(k)-\nu\Delta u_h(k)+(u_{hi}(k-1)+$$

$$+\psi_i(k))u_{hx_i}(k)+u_{hi}(k)\psi_{x_i}(k)+\nabla p_h(k)-$$

$$-\mathcal{F}_h(k)]\varphi(k)dx=\int_{Q^{T_1}}[\frac{\partial u_h'(x,t)}{\partial t}-\nu\Delta\tilde u_h(x,t)+ \tag{52}$$

$$+(\tilde u_{hi}(x,t-h)+\tilde\psi_{hi}(x,t))\tilde u_{hx_i}(x,t)+\tilde u_{hi}(x,t)\tilde\psi_{hx_i}(x,t)-$$

$$-\tilde{\mathcal{F}}_h(x,t)]\tilde\varphi_h(x,t)\,dx\,dt,$$

считая $h$ достаточно малым. Как показано в § 6 гл. I [2], ввиду оценок (15) и (49) восполнения $u_h'$ и $\tilde u_h$ имеют один и тот же предел $u$ (слабый в $L_2(Q^{T_1})$), а функции $\frac{\partial u_h'}{\partial t}$, $\tilde u_{hx}$ и $\tilde u_{hxx}$ имеют своими пределами (слабыми в $L_2(Q')$) производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x$ и $u_{xx}$, соответственно. Кроме этого, $\tilde u_h(x,t)$ и $\tilde u_h(x,t-h)$ сходятся к $u(x,t)$ сильно в $L_2(Q')$ для любой области $Q'$ описанного выше вида. Функции $\tilde\psi_h$ и $\tilde{\mathcal{F}}_h$ сходятся к $\psi$ и $\mathcal{F}$ сильно в $L_2(Q')$, функции $\tilde\psi_{hx}$ сходятся к $\psi_x$ сильно в $L_2(Q')$, а $\tilde\varphi_h$ сходятся к $\varphi$ равномерно в $\bar Q^{T_1}$. Благодаря этому, предельным для (52) соотношением будет

$$\int_{Q^{T_1}}[\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+(u_i+\psi_i)u_{x_i}+u_i\psi_{x_i}-\mathcal{F}]\varphi\,dx\,dt=0,$$

откуда ввиду достаточного произвола $\varphi$ и принадлежности $u$

и $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ следует, что $u$ удовлетворяет уравнениям (3).

Итак, доказана теорема:

<u>Теорема I</u>. Задача (3) однозначно разрешима в $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$, где $T_1$ - положительное число, определяемое $\|u_0(x)\|_{W_2^1(\Omega_0)}$, $\|\rho\mathcal{F}\|_{L_2(Q^T)}$ и $\|\Psi\|_{W_2^{2,1}(Q^T)}$. Этими же величинами определяется и норма $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q^{T_1})}$ решения $u$. Область $\bar{Q}^T=\{x\in\bar{\Omega}_t, \ t\in[0,T]\}$ при этом должна иметь кусочно-гладкую границу в $E_{n+1}$, а границы $S_t$ областей $\Omega_t$ в $E_3$ должны иметь равномерно ограниченные для всех $t$ из $[0,T]$ "нормы" в $C^2$ и удовлетворять условиям I) и 2) страницы 269. Постоянные, входящие в эти предположения о границах, влияют на величины $T_1$ и $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q^{T_1})}$.

Из этой теоремы следует разрешимость задачи (I),(2) в $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ при тех же предположениях, что и в теореме I (напомним, что $\operatorname{div} u_0=0$ и $\operatorname{div}\Psi(x,t)=0$ ). Единственность решений задач (I),(2) и (3) в классе $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ доказывается так же, как и для прямого цилиндра $Q_T=\Omega\times[0,T]$ (см. гл. VI [I] ). Теорема, близкая к теореме I, для прямого цилиндра $Q_T$ была установлена независимо Проди [3] и нами (см. второе английское издание [I] ), и Дюже Каннелем и

Шинбродом [4] .

Если $\rho^t f(x,t) \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ (или если их нормы достаточны малы), то при достаточно малой $\| u_0(x) \|_{W_2^1(\Omega_0)}$ временной интервал $T_1$ существования решения из $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ будет равен $\infty$. В самом деле, в этом случае слагаемое $C_1$ в правой части будет равно нулю и потому вместо (37) будет иметь

$$\| u_x \|^2_{2,\Omega_m} + h \sum_{k=1}^{m} \nu \| \rho \Delta u \|^2_{2,\Omega_k} \le \le \| u_x \|^2_{2,\Omega_0} + C_4 h \sum_{k=1}^{m} \| u_x \|^4_{2,\Omega_{k-1}} \| u_x \|^2_{2,\Omega_k} . \tag{53}$$

В силу (7), или точнее

$$\| u_x \|^2_{2,\Omega_k} \le \beta_1^2 \| \rho \Delta u \|^2_{2,\Omega_k} , \tag{54}$$

из (53) заключим, что для всех $m$

$$\| u_x \|^2_{2,\Omega_m} \le \| u_x \|^2_{2,\Omega_0} , \tag{55}$$

если только

$$\nu - C_4 \beta_1^2 \| u_x \|^4_{2,\Omega_0} \ge 0 . \tag{56}$$

Оценка (55) вместе с (37) и системой (4) гарантируют неравенство (49) при любом $m$ .

Решения $v$ задачи (I),(2) из $W_2^{2,1}(Q^T)$ устойчивы по отношению к изменению $f$ и $\psi$. Именно, справедлива следующая теорема:

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f^0 \in L_2(Q^T)$ и $\psi^0 \in W_2^{2,1}(Q^T)$ соответсвует решение $v \in W_2^{2,1}(Q^T)$, Тогда для всех $\tilde{f}$ и $\tilde{\psi}$, достаточно близких к $f^0$ и $\psi^0$ в нормах $L_2(Q^T)$ и $W_2^{2,1}(Q^T)$ соответственно, существует решение $v$ из $W_2^{2,1}(Q^T)$ (с тем же $T$!), и оно мало отличается от $v^0$ в норме $W_2^{2,1}(Q_T)$. Предположения о $S_t$, $t \in [0,T]$, те же, что и в теореме I.

Действительно, функция $u = v - (\tilde{\psi} + v^0 - \psi^0)$ есть решение задачи типа (3), и как видно из доказательства теоремы 2, оно существует в $W_2^{2,1}(Q^T)$, и его норма в $W_2^{2,1}(Q^T)$ мала, если только $\| f - f^0 \|_{L_2(Q^T)}$ и $\| \psi - \psi^0 \|_{W_2^{2,1}(Q^T)}$ достаточно малы.

Заметим, что такой же устойчивостью обладают и другие обобщенные решения, изученные в [I].

Для случая плоско-параллельных потоков разрешимость имеет место в $W_2^{2,1}(Q^T)$ при любом промежутке времени $T$. Доказывается это так же, как и теорема I, только оценка основного нелинейного члена в (I6) вместо (2I) проводится иначе:

$$\left| \int_\Omega u_i(k-1)\, u_{x_i}(k)\, \rho^k \Delta u(k)\, dx \right| \le$$

$$\le \| \rho \Delta u \|_{2,\Omega_k} \cdot \| u \|_{4,\Omega_{k-1}} \cdot \| \, |u_x| \, \|_{4,\Omega_k} \le$$

$$\leq \sqrt{2}\ \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_k} \cdot \|u\|^{1/2}_{2,\Omega_{k-1}} \cdot \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_{k-1}} \cdot \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \cdot \|\,|u_{xx}|\,\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\beta_1}\ c\ \|\rho\Delta u\|^{3/2}_{2,\Omega_k}\ \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_{k-1}}\ \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \leq \qquad (\widetilde{21})$$

$$\leq \sqrt{2\beta_1}\ c\ \left(\frac{3}{4}\varepsilon^{4/3}\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{1}{4\varepsilon^4}\|u_x\|^2_{2,\Omega_{k-1}}\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}\right), \forall\varepsilon > 0.$$

При этом мы использовали неравенство ( 1 ) § I гл. I [I] и неравенства (7) и (I5) данной работы. Благодаря ( $\widetilde{21}$ ) вместо(37) получим

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} + \nu h \sum_{k=1}^{m} \|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \leq$$
$$\leq \tilde{c}_3 + \tilde{c}_4 h \sum_{k=1}^{m} \|u_x\|^2_{2,\Omega_{k-1}} \cdot \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}. \qquad (\widetilde{37})$$

Обозначив правую часть этого неравенства через $z(m)$ , из ($\widetilde{37}$) получим:

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} \leq z(m)$$

и

$$\frac{1}{h}\left[z(m) - z(m-1)\right] = \tilde{c}_4\ \|u_x\|^2_{2,\Omega_{m-1}} \cdot \|u_x\|^2_{2,\Omega_m} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_4\ z(m-1)\ \|u_x\|^2_{2,\Omega_m},$$

откуда

$$z(m) \le (1+\tilde{c}_4 h \|u_x\|^2_{2,\Omega_m})\, z(m-1) \le (1+\tilde{c}_4 h \|u_x\|^2_{2,\Omega_m}) \ldots$$

$$\ldots (1+\tilde{c}_4 h \|u_x\|^2_{2,\Omega_1})\, z(0) \le e^{1+\tilde{c}_4 h \sum_{k=1}^{m} \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}}\, z(0),$$

т.е. (принимаем во внимание оценку (15) ) $z(m)$ , а потому и левая часть (37), равномерно ограничена для всех $m=0,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]$. Таким образом, имеет место

<u>Теорема 3</u>. В случае плоско-параллельных потоков задачи (1),(2) и (3) однозначно разрешимы в $W_2^{2,1}(Q_T)$ при любом $T$, если $f, \psi$ и $S_t, t\in[0,T]$, удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 1.

## Литература


1 О.А.Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., 1961 г.

2 О.А.Ладыженская, Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., 1953 г.

3 G.Prodi, Resultats recents et problemes anciens dans la theorie des equations de Navier-Stokes, Institut de Mathematiques, Trieste, 1962.

4 M.Shinbrot and S.Kaniel, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, Archiv for Rational Mechanics and Analysis, 1966, 21, № 4, 270-285.