5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т.2.– М.: Наука, 1968.– 624 с.

6. Авхадиев Ф.Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений.– Матем. заметки, 1970, т.7, № 5, с. 581 – 592.

7. Нежметдинов И.Р. Геометрические свойства решений основных обратных краевых задач.– Казань, 1978.– 18с.– Рукопись представлена Казанским университетом. Деп. в ВИНИТИ 22 декабря 1978 г., № 3889 – 78.

8. Аксентьев Л.А. Точные оценки для гармонических в круге функций.– Изв.вузов. Матем., 1968, № 3, с.3 – 8.

9. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения.– Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1965.– 333 с.

10. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности.– УМН, 1975, т.30, вып. 4, с.3 – 60.

11. Гайдук В.Н. Об однолистности решений обратных краевых задач.– Тр.семинара по краевым задачам, вып.9.– Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972, с. 39 – 48.

Н.В.Трунов

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ВЕСА НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В работе продолжается изучение одного специального класса нормальных весов на алгебрах Неймана, введенного автором в [3] в связи с задачами некоммутативного интегрирования. В схеме интегрирования в духе [2] относительно весов этого класса, названных в [3] локально конечными, удалось получить эффективные теоремы типа Радона–Никодима [3, 5], причем условие локальной конечности оказывается для этого фактически необходимым.

Работа состоит их трех параграфов. В § 1 собраны необходимые предварительные сведения. В § 2 получен новый критерий локальной конечности точного нормального полуконечного веса в терминах ассоциированной с ним группы модулярных автоморфизмов. В § 3 предлагается конструкция, позволяющая описывать с помощью квадратичных форм на линеале фиксированного точного нормального локально конечного веса все нормальные веса на алгебре Неймана, естественно согласованная с теорией некоммутативного пространства L_1 из [2].

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Всюду ниже $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, $\mathcal{M}_*$ – ее преддвойственное пространство, $\mathcal{M}^+$ (соответственно $\mathcal{M}_*^+$) – конус положительных элементов $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{M}_*$). Мы будем придерживаться в дальнейшем терминологии и обозначений работ [1,2, 8 и 10]. В частности, для веса φ на $\mathcal{M}$ полагаем

$$m_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}, \quad n_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}, \quad m_\varphi = n_\varphi^* n_\varphi .$$

Для точного нормального полуконечного веса φ через $(\pi_\varphi, \mathcal{Y}_\varphi)$ обозначается представление $\mathcal{M}$, ассоциированное с φ, $\nu: n_\varphi \to \mathcal{Y}_\varphi$ – тождественное вложение. Через $J_\varphi, \Delta_\varphi, \ldots$ обозначены известные объекты теории Томита–Такесаки, ассоциированные с обобщенной гильбертовой алгеброй $\widehat{n_\varphi^* \cap n_\varphi}$ в $\mathcal{Y}_\varphi$; (σ_t^φ) – группа модулярных автоморфизмов $\mathcal{M}$, связанная с φ. Следуя [2], будем через $L_1(\varphi)$ обозначать банахово пространство интегрируемых относительно φ билинейных форм (б.ф.) на линеале веса

$$D_\varphi = \{ f \in H \mid \exists\, \lambda > 0 : (xf, f) \le \lambda\, \varphi(x),\ \forall x \in \mathcal{M}^+ \},$$

и пусть $\gamma_\varphi : L_1(\varphi) \longrightarrow \mathcal{M}_*$ – соответствующий канонический изоморфизм.

2. Напомним [2, 5], что нормальный вес φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ называется <u>локально конечным</u>, если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(i) $\forall\, x \in \mathcal{M}^+ \ (\varphi(x) = \infty)\ \exists\, y \in \mathcal{M}^+ : y \le x,\ 0 < \varphi(y) < \infty,$

(ii) $\forall x \in \mathcal{M}^+ \ \exists (x_i) \subset m_\varphi^+ : x_i \nearrow x$,

(iii) $\forall x \in \mathcal{M}^+ : \varphi(x) = \sup\{\varphi(y) \mid y \in m_\varphi^+, y \leq x\}$.

3. Замечание. Отметим, что нормальный вес φ на $\mathcal{M}$ локально конечен тогда и только тогда, когда он наследственно полуконечен в следующем смысле: для каждого проектора $p \in \mathcal{M}$ вес φ_p – редукция φ на алгебру $p\mathcal{M}p$ – полуконечен. Действительно, достаточно вспомнить о существовании в $\mathcal{M}$ наибольшего проектора e такого, что вес φ_e полуконечен.

4. Замечание. В классе всех нормальных весов на $\mathcal{M}$ введем следующее отношение порядка: скажем, что ψ продолжает φ (пишем $\varphi \preccurlyeq \psi$), если $\varphi(x) = \psi(x)$ для каждого $x \in m_\varphi^+$. Очевидно, что каждый нормальный локально конечный вес φ максимален относительно этого порядка, более того, даже наследственно максимален (т.е. для каждого проектора $p \in \mathcal{M}$ вес φ_p максимален). Наоборот, из замечания 3 следует, что каждый наследственно максимальный нормальный вес является локально конечным.

5. Напомним [4, 5], что нормальный вес φ на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ называется <u>регулярным</u>, если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(i) $\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+ \ (\omega \neq 0) \ \exists \ \omega' \in \mathcal{M}_*^+ \ (\omega' \neq 0) : \omega' \leq \omega, \ \omega' \leq \varphi$;

(ii) $\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+ \ \exists (\omega_n) \subset \mathcal{M}_*^+ : \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n, \ \omega_n \leq \lambda_n \varphi$;

(iii) $\forall \omega \in \mathcal{M}_*^+ \ \exists (f_n) \subset D_\varphi : \omega = \sum_{n=1}^{\infty} ((\cdot) f_n, f_n)$.

§ 2. МОДУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ВЕСОВ

В этом параграфе φ – точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. Обозначим через $D(\sigma_{i/2}^\varphi)$ множество тех операторов $z \in \mathcal{M}$, для которых функция $t \to \sigma_t^\varphi(z)$

$(t\in\mathbb{R})$ продолжается по функции $\alpha\to\sigma_\alpha^\varphi(z)$ $(\in\mathcal{M})$, непрерывной в полосе $\{\alpha\in\mathbb{C}\ |\ 0\le \operatorname{Im}\alpha\le 1/2\}$ и аналитической внутри этой полосы.

1. Теорема. Для точного нормального полуконечного веса φ на $\mathcal{M}$ следующие условия эквивалентны:

(i) вес φ локально конечен,

(ii) для каждого $x\in\mathcal{M}^+$ найдется $z\in\mathcal{D}(\sigma_{i/2}^\varphi)$ такой, что $x=z^*z$.

Доказательство. $(ii)\Rightarrow(i)$. Воспользуемся критерием, установленным в работе [3] (теорема 2.3), согласно которому достаточно проверить, что для каждого $x\in\mathcal{M}^+$ найдется такой нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, что

$$\psi(y)=\gamma_\varphi(y)(x)\qquad (y\in m_\varphi^+)\tag{1}$$

(см. также [5], теорема 5). Мы проверим, что искомый вес ψ определяется равенством

$$\psi(y)=\varphi\left(\sigma_{i/2}^\varphi(z)\,y\,\sigma_{i/2}^\varphi(z)^*\right)\qquad (y\in\mathcal{M}^+),\tag{2}$$

где $z\in\mathcal{D}(\sigma_{i/2}^\varphi)$ таков, что $x=z^*z$. Для этого, во-первых, отметим, что равенство (2), очевидно, задает некоторый нормальный вес на $\mathcal{M}$, так что достаточно установить (1). Пусть $y\in m_\varphi^+$. Воспользовавшись выкладками доказательства леммы 7 работы А.Конна [6] и известными соотношениями теории Томита-Такесаки [1], нетрудно показать, что

$y^{1/2}\sigma_{i/2}^\varphi(z)^*\in n_\varphi$, причем $\widehat{y^{1/2}\sigma_{i/2}^\varphi(z)^*}=J_\varphi\pi_\varphi(z)J_\varphi\widehat{y^{1/2}}$.

В таком случае по определению γ_φ [2] имеем

$$\gamma_\varphi(y)(z^*z)=\left(J_\varphi\pi_\varphi(z^*z)J_\varphi\widehat{y^{1/2}},\widehat{y^{1/2}}\right)=$$

$$=\|\widehat{y^{1/2}\sigma_{i/2}^\varphi(z)^*}\|^2=\varphi\left(\sigma_{i/2}^\varphi(z)\,y\,\sigma_{i/2}^\varphi(z)^*\right).\tag{3}$$

$(i)\Rightarrow(ii)$. Пусть $x\in\mathcal{M}^+$. Тогда (см. [3], теорема 2.3) существует единственный нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, удовлетворяющий условию (1), причем $\psi\le\|x\|\varphi$. Пусть e -носитель ψ и ψ_e, φ_e - редукция ψ и φ соответственно на алгебру $e\mathcal{M}e$. Тогда ψ_e и φ_e - точные нормальные полуконечные веса на $e\mathcal{M}e$ (отметим, что полуконечность φ_e есть следствие того, что вес φ, а значит и φ_e, локально конечен). Поскольку $\psi_e \le \|x\| \varphi_e$, то найдется оператор $b \in e\mathcal{M}e$ такой, что $\psi_e(\cdot) = \varphi_e(b \cdot b^*)$ (см. [6], теорема 1 и замечание 2). Пусть $a = be$, тогда $a \in \mathcal{M}$, и для каждого $y \in \mathcal{M}^+$ имеем

$$\varphi(aya^*) = \varphi_e(b(ey \restriction eH)b^*) = \psi_e(ey \restriction eH) = \psi(y) \le \|x\| \varphi(y).$$

В таком случае в силу леммы 7 работы [6] функция $t \to \sigma_t^\varphi(a)$ продолжается до функции $\alpha \to \sigma_\alpha^\varphi(a)$ $(\in \mathcal{M})$, непрерывной в полосе $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid -1/2 \le \operatorname{Im} \alpha \le 0\}$ и аналитической внутри этой полосы. Положим $z = \sigma_{i/2}^\varphi(a)$. Нетрудно проверить, что $z \in \mathcal{D}(\sigma_{i/2}^\varphi)$ и $\sigma_{i/2}^\varphi(z) = a$. Воспользуемся теперь выкладкой(3), откуда следует, что

$$\gamma_\varphi(y)(z^*z) = \varphi(aya^*) = \psi(y) = \gamma_\varphi(y)(x) \qquad (y \in m_\varphi^+).$$

Отсюда следует, что $x = z^*z$ в силу тотальности множества функционалов $\gamma_\varphi(m_\varphi^+)$ в $\mathcal{M}_*$. Теорема доказана.

2. Замечание. Доказанная теорема дает полезный критерий локальной конечности по существу для любых нормальных полуконечных весов, а не только для точных, поскольку в [5] (лемма 3) показано, что для локальной конечности нормального веса достаточно и, очевидно, необходима локальная конечность точного нормального веса, являющегося его редукцией на носитель.

Ниже мы воспользуемся обозначениями, введенными в [3 и 5], где для точного нормального локально конечного веса φ на $\mathcal{M}$ через $\gamma_\varphi(x)$ обозначается нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, единственным образом определяемый условием (1) по $x \in \mathcal{M}^+$.

3. Следствие. При выполнении эквивалентных условий теоремы 1 для каждого $z \in \mathcal{D}(\sigma_{i/2}^\varphi)$ справедливо равенство

$$\gamma_\varphi(z^*z)(x) = \varphi(\sigma_{i/2}^\varphi(z)\, x\, \sigma_{i/2}^\varphi(z)^*) \qquad (x \in \mathcal{M}^+). \quad (4)$$

Следующий результат устанавливает связь между производной нормального веса $\psi \le \varphi$ по φ в смысле [3 и 5] и коциклом Конна $(D\psi : D\varphi)_t$ [6].

4. Следствие. Пусть φ, ψ – точные нормальные веса на $\mathcal{M}$, причем $\psi \le \varphi$ и φ локально конечен.

Тогда функция $t \to u_t \equiv (D\psi : D\varphi)_t$ продолжается до функции $\alpha \to u_\alpha$ $(\in \mathcal{M})$, непрерывной в полосе $\{\alpha \in \mathbb{C} \,/\, -1/2 \leq \alpha \leq 0\}$ и аналитической внутри этой полосы, причем

$$\psi(x) = \gamma_\varphi (u_{-i/2}\, u^*_{-i/2})(x) \qquad (x \in \mathcal{M}^+).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться равенством (4) и учесть, что

$$\psi(x) = \varphi(u^*_{-i/2}\, x\, u_{-i/2}) \qquad (x \in m^+_\varphi)$$

(см. [6], замечание 4).

§ 3. НОРМАЛЬНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ НА ЛИНЕАЛЕ ВЕСА

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что φ -фиксированный точный нормальный локально конечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H. Здесь будет введено понятие нормальной квадратичной формы, заданной на линеале D_φ веса φ, и установлено взаимно однозначное соответствие между такими формами и нормальными весами на $\mathcal{M}$. Это соответствие является естественным продолжением соответствия между б.ф. из $L^+_1(\varphi)$ и положительными нормальными функционалами на $\mathcal{M}$.

Напомним следующее известное

1. Определение. Квадратичной формой (к.ф.) на D_φ называется отображение $q: D_\varphi \to [0,+\infty]$ такое, что

(а) $q(\lambda f) = |\lambda|^2 q(f)$ $(\lambda \in \mathbb{C},\ f \in D_\varphi)$, причем $0 \cdot \infty \equiv 0$,

(б) $q(f+g) + q(f-g) = 2(q(f) + q(g))$ $(f, g \in D_\varphi)$.

Мы будем называть к.ф. q на D_φ нормальной, если существует такая возрастающая сеть б.ф. $(a_i) \subset L^+_1(\varphi)$, что

$$q(f) = \sup_i a_i(f,f) \qquad (f \in D_\varphi).$$

Условимся через $Q(\varphi)$ обозначать множество всех нормальных квадратичных форм на D_φ. Заметим, что каждая к.ф.

$q \in Q(\varphi)$ присоединена к $\mathcal{M}$ в следующем смысле: для каждого унитарного оператора $u \in \mathcal{M}'$ и $f \in \mathcal{D}_\varphi$ справедливо равенство $q(uf) = q(f)$.

Определим в $Q(\varphi)$ отношение порядка и операции сложения и умножения на неотрицательные скаляры, полагая

(а) $q_1 \le q_2$, если $q_1(f) \le q_2(f) \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi)$,

(б) $(q_1+q_2)(f) = q_1(f)+q_2(f) \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi)$,

(в) $(\lambda q)(f) = \lambda q(f) \quad (\lambda \geq 0,\ f \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Отметим, что каждая возрастающая сеть к.ф. $(q_i) \subset Q(\varphi)$ имеет в $Q(\varphi)$ точную верхнюю грань $q = \sup q_i$, причем

$$q(f) = \sup q_i(f) \qquad (f \in \mathcal{D}_\varphi).$$

2. Примеры. (а) С каждой б.ф. $a \in L_1^+(\varphi)$ связана к.ф. $[a] \in Q(\varphi)$, определяемая равенством $[a](f) = a(f,f)$. Такие к.ф. мы будем называть <u>интегрируемыми.</u>

(б) Для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ к.ф. $[x]$, заданная на $\mathcal{D}_\varphi$ равенством $[x](f) = (xf, f)$, является нормальной. Действительно, пусть возрастающая сеть $(x_i) \subset m_\varphi^+$ такова, что $x_i \uparrow x$. Тогда все к.ф. $[x_i]$ интегрируемы и $[x](f) = \sup\limits_i [x_i](f) \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi)$. Очевидно, что формами вида $[x]$ $(x \in \mathcal{M}^+)$ исчерпываются все ограниченные к.ф. из $Q(\varphi)$.

(в) Пусть $\widehat{\mathcal{M}^+}$ – расширенная положительная часть алгебры Неймана $\mathcal{M}$ [9]. Для каждого $m \in \widehat{\mathcal{M}^+}$ определим к.ф. $[m]$ на $\mathcal{D}_\varphi$, полагая

$$[m](f) = \int_0^\infty \lambda \, d\|e(\lambda)(1-p)f\|^2 + \infty \cdot \|pf\|^2,$$

где $m = \int_0^\infty \lambda \, de(\lambda) + \infty \cdot p$ – спектральное представление m. Тогда $[m] \in Q(\varphi)$, поскольку существует возрастающая сеть $(x_i) \subset \mathcal{M}^+$ такая, что $x_i \uparrow m$ в $\widehat{\mathcal{M}^+}$ (см. [9], следствие I.6), и, следовательно, $[m](f) = \sup\limits_i [x_i](f) \quad (f \in \mathcal{D}_\varphi)$. Из леммы I.4 [7] (см. также [9], лемма 5) следует, что к.ф. вида $[m]$ $(m \in \widehat{\mathcal{M}^+})$ суть элементы $Q(\varphi)$, полунепрерывные снизу в сильной топологии H.

Перед формулировкой следующей теоремы условимся через x_f обозначать для каждого $f \in \mathcal{D}_\varphi$ оператор из m_f^+, однозначно определяемый условием

$$\gamma_\varphi(x_f)(x) = (xf, f) \quad (x \in \mathcal{M}^+) \ . \tag{5}$$

3. Т е о р е м а. Для каждого нормального веса ψ на $\mathcal{M}$ равенство.

$$[\psi](f) = \psi(x_f) \qquad (f \in D_\varphi) \tag{6}$$

определяет к.ф. $[\psi] \in Q(\varphi)$. Наоборот, для каждой к.ф. $q \in Q(\varphi)$ существует, и притом единственный, нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$ такой, что $[\psi] = q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ψ – нормальный вес на $\mathcal{M}$. Тогда найдется возрастающая сеть б.ф. $(a_i) \subset L_1^+(\varphi)$ такая, что

$$\psi(x) = \sup_i \gamma_\varphi(a_i)(x) \qquad (x \in \mathcal{M}^+)$$

[2, 8]. В таком случае $[\psi](f) = \sup_i (a_i f, f)$ для каждого $f \in D_\varphi$, поскольку из (5) следует, что

$$a(f,f) = \gamma_\varphi(a)(x_f) \qquad (a \in L_1(\varphi),\ f \in D_\varphi) \ . \tag{7}$$

Таким образом, к.ф. $[\psi] \in Q(\varphi)$.

Наоборот, пусть к.ф. $q \in Q(\varphi)$ и возрастающая сеть б.ф. $(a_i) \subset L_1^+(\varphi)$ такова, что $q = \sup_i [a_i]$ в $Q(\varphi)$. Поскольку сеть $\gamma_\varphi(a_i)$ положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$ возрастает, то равенство

$$\psi(x) = \sup_i \gamma_\varphi(a_i)(x) \qquad (x \in \mathcal{M}^+)$$

определяет нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$. Из равенства (7) тогда следует, что $[\psi] = q$. Единственность ψ вытекает из следующей леммы, завершающей доказательство теоремы.

4. Л е м м а. Для каждого $x \in \mathcal{M}^+$ существует семейство векторов $(f_i) \subset D_\varphi$ такое, что вес $\gamma_\varphi(x) = \sum_i ((\cdot) f_i, f_i)$ на $\mathcal{M}^+$, при этом $\psi(x) = \sum_i [\psi](f_i)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование нужного представления нормально веса $\gamma_\varphi(x)$ следует из неравенства $\gamma_\varphi(x) \leq \|x\| \varphi$ [3]. Обозначив для краткости $x_{f_i} \equiv x_i$, имеем $\gamma_\varphi(x) = \sum_i \gamma_\varphi(x_i)$. Тогда для каждого $y \in n_\varphi$

$$(\pi_\varphi(x)J_\varphi\hat{y}, J_\varphi\hat{y}) = \gamma_\varphi(y^*y)(x) = \gamma_\varphi(x)(y^*y) =$$

$$= \sum_i \gamma_\varphi(x_i)(y^*y) = \sum (\pi_\varphi(x_i)J_\varphi\hat{y}, J_\varphi\hat{y}).$$

В силу плотности $J_\varphi(\widehat{n_\varphi})^i$ в $\mathcal{H}_\varphi$ отсюда следует, что $\pi_\varphi(x)=\sum_i \pi_\varphi(x_i)$, так что $x=\sum_i x_i$. В таком случае

$$\psi(x) = \sum_i \psi(x_i) = \sum_i [\psi](f_i).$$

Лемма доказана.

5. Следствие. Отображение $\psi\to[\psi]$ является монотонно аддитивной и положительно однородной биекцией множества всех нормальных весов на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ на $Q(\varphi)$, причем

(а) $\psi(1)<\infty \iff$ к.ф. $[\psi]$ интегрируема,

(б) $\psi\leq\lambda\varphi$ для некоторого $\lambda>0 \iff$ к.ф. $[\psi]$ ограничена,

(в) $\psi=\gamma_\varphi(m)$ для некоторого $m\in\widehat{\mathcal{M}^+} \iff$ к.ф. $[\psi]$ полунепрерывна снизу.

При этом $[\gamma_\varphi(a)]=[a]$ $(a\in L_1^+(\varphi))$ и $[\gamma_\varphi(m)]=[m]$ $(m\in\widehat{\mathcal{M}^+})$, где для $m\in\widehat{\mathcal{M}^+}$ нормальный вес $\gamma_\varphi(m)$ определен в [5] (теорема 5).

6. Замечание. В работе [7] А.Конн предложил описывать нормальные полуконечные веса ψ на $\mathcal{M}$ с помощью пространственных производных $d\psi/d\varphi'$ относительно фиксированного точного нормального полуконечного веса φ' на коммутанте $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Эти производные являются полунепрерывными снизу плотно определенными квадратичными формами на линеале $D_{\varphi'}$ и, следовательно, определяются положительными самосопряженными операторами. Однако даже для конечных весов ψ соответствующие операторы, вообще говоря, не присоединены к $\mathcal{M}$. В нашем подходе нормальные веса ψ на $\mathcal{M}$ описываются к.ф. $[\psi]$, присоединенными к $\mathcal{M}$, однако не всегда полунепрерывными снизу, т.е. не сводящимися, вообще говоря, к операторам. Более того, из теоремы 6 работы [5] следует, что все к.ф. из $Q(\varphi)$ полунепрерывны снизу тогда и только тогда, когда вес φ регулярен (тогда, в частности, алгебра $\mathcal{M}$ является полуконечной).

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о том, для каких нормальных весов ψ на $\mathcal{M}$ их производные – к.ф. $[\psi]$ – сводятся к операторам. Для этого, во-первых, условимся отождествлять самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$ с соответствующим элементом расширенной положительной части $\widehat{\mathcal{M}^+}$ алгебры $\mathcal{M}$. При этом, как нетрудно проверить, для $f \in D_\varphi$

$$[h](f)=\begin{cases} \|h^{1/2}f\| & \text{, если } f\in D(h^{1/2})\cap D_\varphi\,, \\ +\infty & \text{, в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим также, что из $h \leq k$ следует $[h] \leq [k]$, и если сеть $h_i \uparrow h$, то сеть к.ф. $[h_i] \uparrow [h]$ по поводу порядка и сходимости в классе самосопряженных положительных операторов [10].

Следующий результат является очевидным следствием предыдущих рассмотрений и теоремы Радона–Никодима, доказанной Г.Педерсеном и М.Такесаки [10] для σ_t^φ -инвариантных весов на $\mathcal{M}$. Ниже через $\mathcal{M}_\varphi$ обозначена подалгебра $\mathcal{M}$, состоящая из неподвижных точек группы автоморфизмов $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$.

7. П р е д л о ж е н и е (ср.[2], теорема 4). Для каждого самосопряженного оператора $h \geq 0$, присоединенного к $\mathcal{M}$, к.ф. из $Q(\varphi)$, отвечающая нормальному полуконечному весу $\varphi(h\cdot)$ на $\mathcal{M}$, есть $[h]$. Наоборот, если ψ – нормальный полуконечный, σ_t^φ – инвариантный вес на $\mathcal{M}$, то существует, притом единственный, самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}_\varphi$ такой, что к.ф. $[\psi]=[h]$.

8. О п р е д е л е н и е (ср. [4], определение 7 § 2). Скажем, что вес φ почти доминирует нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$, если для каждой последовательности $(x_n)\subset\mathcal{M}$ из условия $\lim\limits_{m,n}\psi((x_n-x_m)^*(x_n-x_m))=0$ и $\lim\limits_{n}\varphi(x_n^*x_n)=0$ всякий раз следует, что $\lim\limits_{n}\psi(x_n^*x_n)=0$.

9. Т е о р е м а (ср. [4], теорема 9 § 2). Пусть ψ – нормальный локально конечный вес на $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:

(i) существует самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$ такой, что к.ф. $[\psi]=[h]$

(ii) существует возрастающая последовательность $(x_n) \subset \mathcal{M}^+$ такая, что вес $\psi(\cdot) = \sup_n \gamma_\varphi(x_n)(\cdot)$,

(iii) существует семейство $(f_i) \subset D_\varphi$ такое, что вес $\psi = \sum_i ((\cdot) f_i, f_i)$ на $\mathcal{M}^+$,

(iv) к.ф. $[\psi]$ полунепрерывна снизу,

(v) к.ф. $[\psi]$ замыкаема (т.е. для каждой последовательности $(f_n) \subset D_\varphi$ из условия $\lim_{m,n} [\psi](f_n - f_m) = 0$ и $\lim_n \|f_n\| = 0$ всякий раз следует, что $\lim_n [\psi](f_n) = 0$),

(vi) вес φ почти доминирует вес ψ.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

10. Лемма. Для каждого нормального локально конечного веса ψ на $\mathcal{M}$ линеал

$$D([\psi]) = \{ f \in D_\varphi \mid [\psi](f) < \infty \}$$

плотен в гильбертовом пространстве H.

Доказательство. Поскольку к.ф. $[\psi]$ присоединена к $\mathcal{M}$, то линеал $D([\psi])$ инвариантен относительно $\mathcal{M}'$ и, следовательно, нам достаточно проверить, что $D([\psi])$ - разделяющее множество векторов для $\mathcal{M}$. С этой целью предположим, что оператор $x \in \mathcal{M}$ обращается в нуль на $D([\psi])$, и проверим, что $x = 0$. Поскольку D_φ плотно в H [2], то достаточно показать, что x обращается в нуль на D_φ, что мы сейчас и сделаем. Пусть $f \in D_\varphi$. Заметим, что $\gamma_\varphi(x^* x)(y) = 0$ для каждого $y \in m_\varphi^+$ такого, что $y \leq x_f$. Действительно, нормальный вес $\gamma_\varphi(y)$ на $\mathcal{M}$ можно записать в виде $\gamma_\varphi(y) = \sum_i ((\cdot) f_i, f_i)$, где $(f_i) \subset D_\varphi$. Отметим, что все $f_i \in D([\psi])$, поскольку по лемме 4

$$[\psi](f_i) \leq \sum_i [\psi](f_i) = \psi(y) < \infty .$$

Следовательно,

$$\gamma_\varphi(x^* x)(y) = \gamma_\varphi(y)(x^* x) = \sum_i |x f_i|^2 = 0 .$$

Выберем теперь возрастающую сеть $(y_i) \subset m_\varphi^+$ такую, что $y_i \uparrow x_f$. В таком случае $\gamma_\varphi(x^* x)(y_i) \equiv 0$ и, следовательно,

$$|xf|^2 = \gamma_\varphi(x_f)(x^* x) = \gamma_\varphi(x^* x)(x_f) = \sup_i \gamma_\varphi(x^* x)(y_i) = 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 9.

$(i)\Rightarrow(ii)$. По спектральной теореме найдется возрастающая последовательность операторов $(x_n)\subset \mathcal{M}^+$ такая, что $[h](f)=\sup_n (x_n f, f)$ для всех $f\in D_\varphi$. Тогда по следствию 5 вес $\psi(\cdot)=\sup_n \gamma_\varphi(x_n)(\cdot)$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. Полагая $y_1=x_1$, $y_n=x_n-x_{n-1}$ $(n=2,3,\dots)$, имеем $\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_\varphi(y_n)$. Заметим теперь, что для каждого $n=1,2,\dots$ нормальный вес $\gamma_\varphi(y_n)$ допускает представление $\gamma_\varphi(y_n)=$
$=\sum_i((\cdot)f_i^{(n)}, f_i^{(n)})$, где $(f_i^{(n)})\subset D_\varphi$, поскольку $\gamma_\varphi(y_n)\le\|y_n\|\varphi$.

$(iii)\Rightarrow(iv)$. Обозначив для краткости $x_{f_i}\equiv x_i$, имеем для каждого $f\in D_\varphi$

$$[\psi](f)=\psi(x_f)=\sum_i(x_f f_i, f_i)=\sum_i\gamma_\varphi(x_i)(x_f)=$$

$$=\sum_i\gamma_\varphi(x_f)(x_i)=\sum_i[x_i](f).$$

Отсюда следует, что к.ф. $[\psi]$ полунепрерывна снизу как сумма непрерывных к.ф. $[x_i]$.

$(iv)\Rightarrow(v)$. По поводу этой импликации см., например, [7], лемма 5.

$(v)\Rightarrow(i)$. Поскольку $D([\psi])$ плотно в H и к.ф. $[\psi]$ замыкаема на $D([\psi])$, то в силу хорошо известного результата о связи замыкаемых форм и операторов существует, притом единственный, самосопряженный оператор $h\geq 0$ в H такой, что $D([\psi])$ – существенная область определения оператора $h^{1/2}$ и $[\psi](f)=\|h^{1/2}f\|^2$ для всех $f\in D([\psi])$. Поскольку к.ф. $[\psi]$ присоединена к $\mathcal{M}$, то из единственности такого оператора h легко вывести, что он присоединен к $\mathcal{M}$. Для проверки равенства $[\psi]=[h]$ в силу следствия 5 достаточно убедиться в том, что $\psi=\gamma_\varphi([h])$, а для этого в силу локальной конечности ψ нужно лишь проверить, что нормальные веса ψ и $\gamma_\varphi([h])$ совпадают на m_ψ^+. Для проверки последнего утверждения предположим, что $y\in m_\psi^+$. Тогда из рассуждений, проводившихся при доказательстве леммы 10, следует, что вес $\gamma_\varphi(y)$ допускает представление
$\gamma_\varphi(y)=\sum_i((\cdot)f_i, f_i)$, где $(f_i)\subset D_\varphi$. В таком случае по лемме 4

$$\psi(y)=\sum_i[\psi](f_i)=\sum_i[h](f_i)=\gamma_\varphi([h])(y).$$

Доказательство эквивалентности условий (v) и (vi) почти дословно повторяет доказательство эквивалентности условий (i) и (vi) в теореме 9 из § 2 работы [4].

Теорема доказана.

10. З а м е ч а н и е . Оператор h определяется условием (i) теоремы 9, вообще говоря, не единственным образом даже для конечных φ и ψ (см. [2], замечание на с.88). Однако, как следует из доказательства импликации $(v) \Rightarrow (i)$ этой теоремы, среди таких h существует единственный с условием, что $\mathcal{D}([\psi])$ есть существенная область определения оператора $h^{1/2}$.

Результат теоремы 9 можно несколько усилить, если потребовать регулярность φ (что, в частности, влечет полуконечность алгебры $\mathcal{M}$ в силу теоремы 2 работы [5]). Отметим, что, как показано в [4], это равносильно выполнению эквивалентных условий $(i)-(vi)$ теоремы 9 для всех конечных нормальных весов ψ на $\mathcal{M}$.

11. П р е д л о ж е н и е. Пусть нормальный локально конечный вес φ регулярен и ψ - нормальный вес на $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:

(i) линеал $\mathcal{D}([\psi])$ плотен в H,

(ii) существует самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединенный к $\mathcal{M}$ такой, что к.ф. $[\psi]=[h]$.

При выполнении этих условий такой оператор h единственен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(i) \Rightarrow (ii)$. Согласно [5] (теорема 6) найдется $m \in \widehat{\mathcal{M}}^{+}$ с условием $\psi = \gamma_\varphi(m)$. Если $m=\int_0^\infty \lambda\, de(\lambda) + \infty \cdot p$ - спектральное представление m [9], то в силу плотности $\mathcal{D}([\psi])$ проектор $p=0$, и остается заметить, что к.ф. $[\psi]=[m]$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Поскольку линеал $\mathcal{D}([\psi]) = \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}(h^{1/2})$ инвариантен относительно $\mathcal{M}'$, то достаточно проверить, что $\mathcal{D}([\psi])$ - разделяющее множество векторов для $\mathcal{M}$. С этой целью предположим, что оператор $x \in \mathcal{M}$ обращается в нуль на $\mathcal{D}([\psi])$, и проверим, что $x=0$. Поскольку $\mathcal{D}(h^{1/2})$ плотно в H, то достаточно показать, что x обращается в нуль на $\mathcal{D}([h^{1/2}])$, что мы сейчас и сделаем. Пусть

$f\in D(h^{1/2})$. Найдется последовательность $(f_i)\subset D_\varphi$ такая, что функционал $((\cdot)f,f)=\sum_{i=1}^{\infty}((\cdot)f_i,f_i)$ на $\mathcal{M}$. Пусть $h=\int_0^\infty \lambda\, de(\lambda)$ – спектральное представление h и $h_n=\int_0^n \lambda\, de(\lambda)$ $(n=1,2,\ldots)$. Тогда

$$\sup_n (h_n f_i, f_i)\le \sup_n (h_n f,f)=\|h^{1/2}f\|^2<\infty \quad (i=1,2,\ldots),$$

откуда следует, что все $f_i\in D(h^{1/2})$. В таком случае

$$\|xf\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|xf_i\|^2=0,$$

откуда, в силу произвольности $f\in D(h^{1/2})$, оператор $x=0$. Доказательство единственности оператора h почти дословно повторяет соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 6 из § 7 работы [4]. Теорема доказана.

12. Следствие. Пусть φ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Нормальный вес ψ на $\mathcal{M}$ удовлетворяет эквивалентным условиям (i) и (ii) предложения 11 тогда и только тогда, когда он полуконечен, при этом $\psi=\varphi(h\,\cdot)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 7, учитывая, что вес φ локально конечен и регулярен, причем $\mathcal{M}_\varphi=\mathcal{M}$.

Литература

1. Такесаки М. Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения.– Математика (сб.переводов), 1974, т.18, № 3, с.84 – 120.

2. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I.– Изв.вузов.Матем., 1978, № 7, с. 79 – 88.

3. Трунов Н.В. Локально конечные веса на алгебрах Неймана.– Казань, 1978.– 24 с. – Рукопись представлена Казанским ун–том. Деп. в ВИНИТИ 10 января 1979 г., № 101 – 79 Деп.

4. Трунов Н.В. Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса.– В сб.: Конструктивная теория функций и функц. анализ, в.3, – Казань, Изд–во Казанского ун–та, 1981, с. 73 – 87.

5. Т р у н о в Н.В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана.– Изв. вузов. Матем., 1982, № 8, с.61 – 70.

6. Connes A. Sur le theorem de Radon – Nikodym pour les poids normaux fideles semifines.– Bull. Sc. math., 1973, t. 93, p. 253–258.

7. Connes A. On the spacial theory of von Neumann algebras. – J. Funct. Anal., 1980, v. 35, N 2, p. 153–164.

8. Haagerup U. Normal weights on W*-algebras. – J. Funct. Anal., 1975, v. 19, N 3, p. 302–317.

9. Haagerup U. Operator-valued weights in von Neumann algebras, I. – J. Funct. Anal., 1979, v. 32, N 2, p. 175–206.

10. Pedersen G.K., Takesaki M. The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras.– Acta math., v. 130, N 1–2, p. 53–87.

Н.В.Трунов, А.Н.Шерстнев

ОБ УСЛОВНЫХ ОЖИДАНИЯХ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА

Заметка непосредственно примыкает к работам авторов [2 и 3]. В ней продолжается исследование одного обобщения понятия условного ожидания в алгербах Неймана, введенного в этих работах в связи с теорией некоммутативного пространства L_1.

§ 1. Мы начнем со случая состояния. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана в гильбертовом пространстве H, φ – точное нормальное состояние на $\mathcal{M}$. В терминологии и обозначениях, касающихся теории пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых билинейных форм (б.ф.) на линеале состояния

$$D_\varphi = \{ f \in H \mid \exists \lambda > 0 : (xf, f) \leq \lambda \varphi(x), \forall x \in \mathcal{M}^+ \},$$